

# 幾何的思考に注目した授業に関する一考察

## ギリシャ 3 大作図問題、立方体倍積問題を用いて

筑波大学大学院修士課程教育研究科

松本 晃一

- |            |                        |
|------------|------------------------|
| 1、はじめに     | (要約)                   |
| 2、研究目的     | 本研究は、ギリシャ数学の幾何的思考に注目し  |
| 3、研究目的について | た。その中で「立方体倍積問題」を教材に用い  |
| 4、授業の概要    | て、生徒自身の解釈や活動(観察、操作、実験) |
| (1) 指導目標   | を中心とする問題解決型の授業を行った。特   |
| (2) 授業の特徴  | に、数学が人間の営みとして存在し発展してき  |
| (3) 授業展開   | たとする形成過程の認識と生徒の感覚的イメ   |
| 5、考察       | ージや幾何的思考の広がりを課題とし、授業の  |
| 6、おわりに     | 有用性を考察した。アンケートや感想等からは  |
|            | 十分な変容が窺えた。「立方体倍積問題」を教  |
|            | 材にした授業は有用であるといえる。      |

### 1、はじめに

数学の理解には、感覚的側面と数学的側面があると考えられる。感覚的側面とは論理的な証明なしでもイメージや経験等により裏打ちされ、納得、理解できる面であり、数学的側面とは論理的な証明等により納得、理解する面である。現在の数学教育はその二つを無意識に混在して指導しており、点数化しやすい数学的側面を評価している。それが「数学は決して嫌いではないが、計算ばかりでただ面倒だった。」という生徒の感想に現れている。しかも、数学的に学んでいるというものの「 $\sin 1$  とはいくつですか」という問いに答えられる生徒はどれだけいるだろうか。「 $\sin$  がわかる」とは本質を理解しており、いつでもそれが求められるということではないか。生徒にとっては「受験に必要なもの」「学校でやるもの」が数学であると捉えていると思われる。

しかし、「万物の根源は数である」というピタゴラスの言葉にもあるように数学は自然現象や社会現象など物事の仕組みやそのわけを解き明かす、科学の言葉であるといわれる。我々は数学により「見えないものが見える」ようになる。「見えないものが見える」とは何か。例えば、

三角定規を飛ばしたとき、ただ回転しながら飛んでいくというのではなく、その三角定規に重心が見えそれを中心に回転しながら弧を描くと説明できることである。

点数化という安易な評価のための「解ける」「解けない」に焦点をあてた受験偏重の教育では、数学の役割は見えてこないし、生徒にとってはイメージしていないことをやるので興味、関心がわかず、理解も浮ついたものになるだろう。私は感覚的側面の理解がベースとなり数学的側面の学習へとつながると考え、まず、感覚的側面の強化を目指したい。また、この報告書では触れないが、数学教師の感覚的側面と数学的側面との意識的分離を訴えたい。この感覚的側面、数学的側面という視点は概念的知識と手続き的知識の二元論ではなく、「理解のよりどころ」としての視点である。

現代の数学は厳密性、効率性を備える代数学に重点がおかれているが、その有用性のみをもって幾何学を代数学で置きかえようとする教育をすべきでないと言われはじめている<sup>1</sup>。また、人間のすべての生活機能は、どんなに基礎的で、生物学的な欲求に近いものであっても、文化に依存しており<sup>2</sup>、数学的知識も人間の社会文化的営為と切り放されたものではないともいわれる。

これらのことを踏まえて、幾何的視点による感覚的側面の強化、人間の文化的営みの観点から数学史を活用した授業に注目し、以下の研究目的について授業実践を通して考察していく。

## 2、研究目的

教材にギリシャ数学「立方体倍積問題」を用いて、生徒自身の解釈や活動（観察、操作、実験）を中心とした問題解決型授業は有用かどうか考察する。

課題1：生徒は、数学が人間の営みとして存在し、それにより発展してきたとする形成過程を認識できるか。また、現代と相対化するなど自分中心の数学観から脱却できるか。

課題2：生徒は、紙と鉛筆による計算中心の数学から脱却できるか。

---

<sup>1</sup>ルネ・トム(1975)「現代」数学、それは教育学的、哲学的誤りか」

R. ジョラン編者 森 毅他訳 「何のための数学か」東京図書 pp32

<sup>2</sup>H. N. Jahnke「The Historical Dimension of Mathematical Understanding」  
Proceeding of PME-18, Portugal, Vol.1 pp139-156

課題3：生徒は、現代の代数中心の発想を幾何的視点で捉えなおし、数学に対する感覚的イメージや思考の幅を広げるか。

### 3、研究目的について

これら数学史の活用を中心とした先行研究には、薬師寺（1998）<sup>3</sup>恩田（1999）<sup>4</sup>などがある。薬師寺は解析の歴史的変遷を取り上げ、恩田は古代エジプトについて考察している。しかし、授業実践と他の事例による考察が課題となっている。そこで、幾何学を重視したギリシャ数学に特定して取り上げる。

ギリシャ数学の特徴は単に正しい答えが出る、実用に資するというのではなく、ある結果が正しい論理の積み重ねによって保証されるというプロセスに価値を認めた<sup>5</sup>点にある。公理から出発し、論証を積み重ねるギリシャ数学の方法は、現代の公理的数学の出発点であるといわれる。しかし、当時のギリシャ数学には「現代的な意味での記号も定義もない」。また計算は数学の一部ではなく、証明は幾何学の特権で、代数の発想はなかった。

このことから、ギリシャ数学「立方体倍積問題」を用いて、現代の代数中心の発想を幾何的視点で捉える問題解決型授業が行えると考える。

この目的、課題に対し、授業事前に数学に関する意識を問うアンケートを（選択中心）以下の研究授業後に事前と同様のものと感想等を問うアンケートを実施した。そのアンケートや授業を撮影したビデオをもとに考察する。

以下の研究授業は、平成12年10月に高校2年生（1クラス生徒数42名）を対象に行った。

---

<sup>3</sup> 薬師寺（1998）「解析の歴史的変遷を踏まえた曲線の探求に関する一考察～作図ツールの使用を前提に～」

平成10年度筑波大学大学院教育研究科修士論文

<sup>4</sup> 恩田洋一（1999）「一次文献を利用した数学史教育に関する一考察～「数学基礎」に関連して～」

平成10年度筑波大学大学院教育研究科修士論文

<sup>5</sup> 引用：現代思想10月臨時増刊「数学の思考」

斎藤 憲（2000）「数学史におけるパラダイム・チェンジ」pp56

## 4、授業の概要

### (1) 指導目標

- ・ 古代ギリシャ時代の数学を当時の状況も合わせて理解する。
- ・ 「立方体倍積問題」の解決を通して、それぞれに解釈する。

### (2) 授業の特徴

ギリシャ数学「立方体倍積問題」をテーマとした。数学が人間の文化的営みとして存在した視点を提供する為、エドモント・ハレーの『原論』の寓話やプラトン全集の対話を取り上げ、ギリシャ時代の状況を知ることから始めた。代数を用いずに幾何的に論理を積み重ねていくという当時と同じ状況の中で、生徒は、「平方倍積問題」から「立方体倍積問題」へと考察を進め、作図を行った。

この授業では、数学が人間の文化的営みとして存在した視点から思考だけでなく道具にも注目し、それらを取り入れていった。当時と同じモノで考察することはできないが、コンパスや定木、紙、紐などを用いた。また、現代との相対化という点で、作図ツール(コンピュータソフト:カブリ<sup>6</sup>)を積極的に用いた。これまでの学習形態とは違う形で進めることで、既知のイメージ、知識に対する異なる視点を意識させたいと考えた。そして、その自覚により再構成を促したい。

また、この授業は今回の学習指導要領の改訂で、高等学校に新たに加えられる科目、「数学基礎」<sup>7</sup>の指導案の提案も兼ねる。

---

<sup>6</sup> カブリ・ジオメトリ (Cabri - Geometry )

<sup>7</sup> 文部省 (1999) 「高等学校学習指導要領 数学編理数編」

「数学基礎」は数学への興味・関心等を高めるとともに、具体的な事象を通じて数学的な見方や考え方のよさを認識することをねらいとして内容を構成する。具体的には数学史的話題、統計処理、生活における数理的な考察など。

### (3) 指導展開

#### 【1 時間目】 ギリシャ時代の数学とその当時



(図1)

教師：「左図（図1）はエドモンド・ハレーの原論（ラテン語訳）の表紙にある口絵です。この口絵は、座礁した船と3人の哲学者を描いています。彼らの1人は「われわれは恐れる必要はない」と叫んだそうです。どうしてでしょうか。」

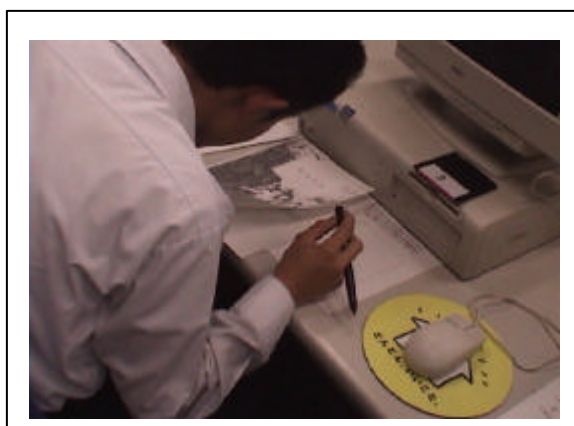
授業はこの問いから始めた。

生徒：「砂浜にこれほど精巧な図形が描かれているということは、他に人がいるということだから」

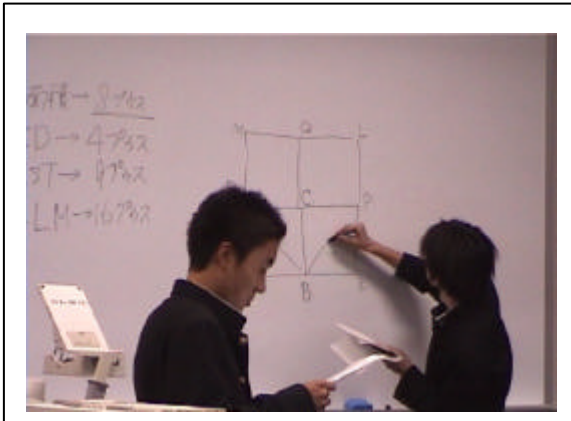
生徒：「自分たちと同じような知識を持つ人が住んでいると思い、理由を話せば新しい船をもらえと思ったから」

生徒：「強がって言ってみた」

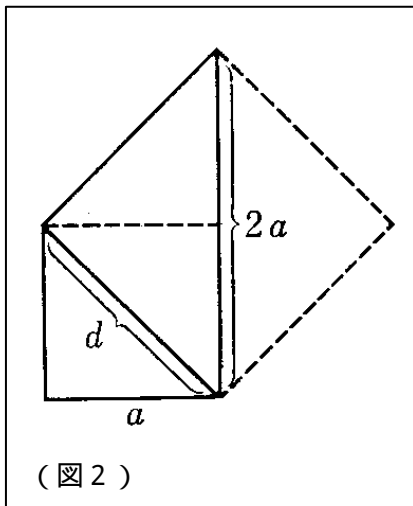
など様々な発言が出た。解答例は「砂の上にある幾何学の図形からギリシャ人の存在がわかり（当時、幾何学を扱っていたのはギリシャ人のみと考えられている）、自分たちがギリシャ世界にいると確信したので。」である。だがこの授業では模範的解答を作ることではなく「自分なりの意見を持つこと」「自分が活動（観察、操作、実験等）すること」を強調した。その後、「当時のギリシャ社会はどうだったのか」「なぜギリシャ人は幾何学を考えたのか」について考察した。数学だけでなく生活スタイルや思想に触れ、ギリシャ時代のイメージを膨らませ、「ギリシャ時代の状況」の中で問題を解決していく意識を持たせるようにした。



続いて、プラトン全集対話篇『メノン』における、ソクラテスと奴隷の対話を再現した。生徒は「ソクラテスの口」「ソクラテスの手」



「奴隷」のパートにわれ、実演した。その対話を通して、ギリシャ時代は現代の代数を用いずに幾何的に捉え、論理を積み重ねていったことを理解した。同時に「ある正方形の2倍の面積を持つ正方形をつくるには…」という平方倍積問題に対し、ある正方形の対角線を一辺とする正方形を作ること(図2)を確認した。



教師：「2倍の面積を持つ正方形をつくるには、その正方形の対角線を一辺とする正方形を作ればよいが、立方体ではどうか」

生徒：「立方体でも同じように対面から対角線を引く」

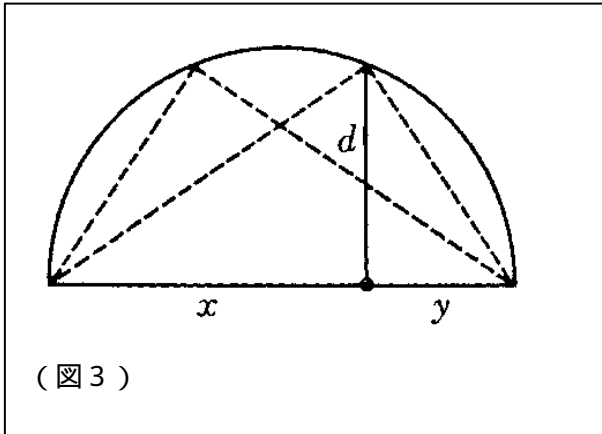
生徒：「それじゃ、3だよ。2倍の立方体の一辺は3乗根になる必要がある」

教師：「当時のギリシャにははないし当然3乗根はない。正方形の対角線のように当時のギリシャでは図形で捉えていた。そして、その作図を論理的に考えていた。」

この遣り取りからギリシャ3大作図問題の一つ「立方体倍積問題」へと入っていった。当時の作図には「定木<sup>8</sup>」と「コンパス」のみが道具として認められていた。その制約の中で作図をしていくことになった。また、背景としてギリシャ「立方体倍積問題」の起源(デルフィの神託<sup>9</sup>)についても押さえた。

<sup>8</sup> 通常「定規」と書くが、ここでは「目盛りがない」ことを強調するために「定木」を用いた

<sup>9</sup> 「現存する宮殿の2倍の体積を持つ宮殿を造れ」



(図3)

【2 時間目】 立方体の倍積問題の解法( 1 )  
 まず、「立方体倍積問題」の作図指針はヒポクラテスの比例中項<sup>10</sup>の発想から始まる。これは2つの直角三角形の相似に注目している。(図3)

2 時間目はこの比例中項の理解から始める。

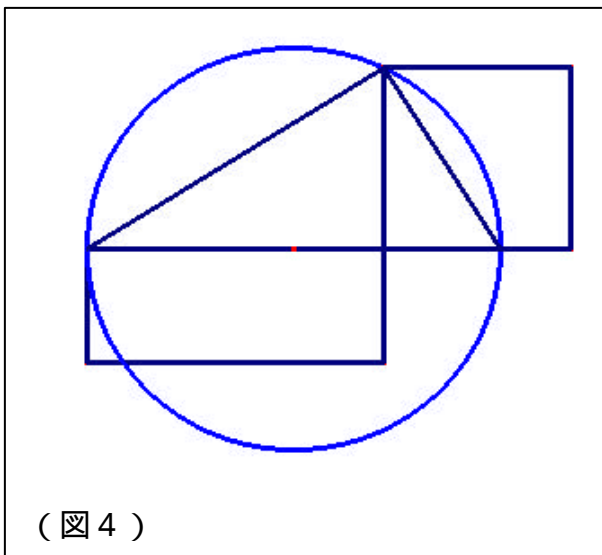
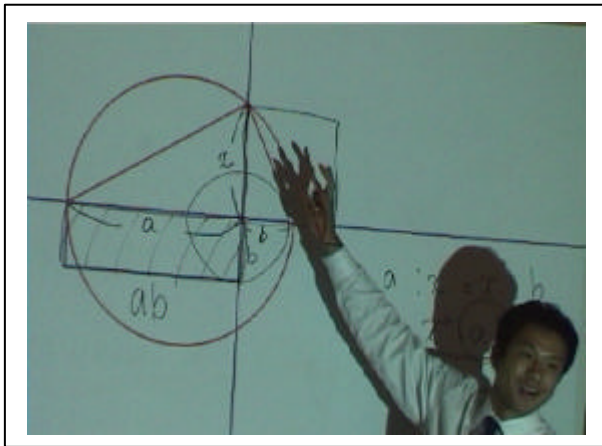
教師：「現代の  $\sqrt{2}$  は正方形の対角線であることは分かった。では  $\sqrt{3}$ 、 $\sqrt{4}$ 、 $\sqrt{5}$  ... はどんな図形からできているのか、またどんな図形にあるのか」

生徒：「三平方の定理を使えば、どこにでもある。」

生徒：「直角三角形。」

生徒：「ギリシャ時代はコンパスと定木しかない。それに  $\sqrt{3}$  の正確な長さは取れるのか」

生徒：「それは無理だろう。」



(図4)

そこで、ユークリッド「原論」第2章命題14を取り上げた。ユークリッドの「原論」第2章命題14は長方形の正方形化という比例中項の作図を扱っている。これを作図ツール：カブリを用いて、実際に作図過程を投影していった。この時、生徒もカブリを用いて作図した。(カブリでは「定木」と「コンパス」のみという制約を実現できる)その後、生徒はそれぞれの完成図(図4)から比例中項の関係を捉えた。

<sup>10</sup>  $a : x = x : b$  の関係の  $x$  にあたる。

7、ディオクレス(Diocles)の解法

○原典 (英訳、日本語訳)

Euclid. *Coma. in Archim. De Sphaera et Cycl. II.*, Archim. ed. Heiberg III. 66. 9-10. 5

Ἡς Διοκλῆς ἐν τῷ Περὶ πύργων

Ἐν κύκλῳ ἔχθουσιν δύο διαμέτρους πρὸς ἀρθοῦς αἱ AB, ΓΔ, καὶ δύο περιφέρειαι ἴσας ἀπέχουσαι ἀπ' ἀσπίρα τοῦ Β αἱ ΕΗ, ΗΖ, καὶ διὰ τοῦ Ζ περιπέφυκτος τῆ AB ἡχθῶν ἡ ΖΗ, καὶ ἐπιπέφυκτος ἡ ΔΕ. λέγεται, ὅτι τῶν ΓΗ, ΗΘ δύο μέτρα ἀνάλογόν εἰσιν αἱ ΖΗ, ΗΔ.

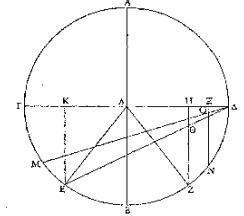
Ἐγὼ δὲ οὕτως ἀπὸ τοῦ Ε τῆ ΑΗ παράλληλον ἡ ΕΚ τῆσ ἀπὸ ἐπιπέφυκτῆς ΖΗ, ἡ δὲ ΚΓ τῆ ΗΔ. ἴσται γὰρ τούτοις ὄρθον ἀπὸ τοῦ Α ἐπὶ τὰ Ε, Ζ ἐπιπέφυκτουσιν εὐθείαισιν ἴσαι γὰρ γίνονται αἱ ἀπὸ ΓΑΕ, ΖΑΔ, καὶ ὀρθαὶ αἱ πρὸς τοῖς Κ, Η, καὶ πάντα ἀρα πῶσον διὰ τοῦ ΑΕ τῆ ΑΖ ἴσην εἶναι: καὶ λοιπὴ ἀρα ἡ ΓΚ τῆ ΗΔ ἴση ἐστίν. ἐπεὶ οὖν ἐστίν, ὡς ἡ ΔΚ πρὸς ΚΕ, ἡ ΔΗ πρὸς ΗΘ, ἀλλ' ὡς ἡ ΔΚ πρὸς ΚΕ, ἡ ΕΚ πρὸς ΚΓ, μέση γὰρ ἀνάλογον ἡ ΕΚ τῶν ΔΚ, ΚΓ: ὡς ἀρα ἡ ΔΚ πρὸς ΚΕ καὶ ἡ ΕΚ πρὸς ΚΓ, ὅσως ἡ ΔΗ πρὸς ΗΘ. καὶ ἐστὶν τῆσ ἡ μὲν ΔΚ τῆ ΓΗ, ἡ δὲ ΚΕ τῆ ΖΗ, ἡ δὲ ΚΓ τῆ ΗΔ: ὡς ἀρα ἡ ΓΗ πρὸς ΗΖ, ἡ ΖΗ πρὸς ΗΔ καὶ ἡ ΔΗ πρὸς ΗΘ. εἰς δὲ πᾶσι μέρησιν τοῦ Β ἀπέχουσιν περιφέρειαι ἴσαι αἱ ΜΒ, ΕΝ, καὶ διὰ μὲν τοῦ Ν περιπέφυκτος ἐχθῆσ τῆ ΑΒ ἡ ΝΕ, ἐπιπέφυκτῆ δὲ ἡ ΔΜ, ἴσονται οὖν τῶν ΓΕ, ΕΘ μέτρα: ἀνάλογον αἱ ΝΕ, ΕΔ, πλείονων οὖν ὅσως καὶ συνεχῶν παραλλήλων ἐπιπέφυκτουσιν μετὰ τῶν Β, Δ καὶ τὰς ἀποκαταβαθμοῦσιν ἐπ' αὐτῶν περιφέρειαι πρὸς τῷ Β ἴσαι τρεῖσιν ἀπὸ τοῦ Β ὡς ἐπὶ τὸ Γ' καὶ ἐπὶ τὰ γινόμενα σημεῖα ἐπιπέφυκτουσιν εὐθείαισ ἀπὸ τοῦ Δ, ὡς τῶν ὁμοίων τοῖς ΔΕ, ΔΜ, τρηβήσονται αἱ παράλληλοι αἱ μετὰ τῶν Β, Δ κατὰ τὰ σημεῖα, ἐπὶ τῆσ προκειμένησ: καταγράφουσι τὰ Ο, Θ, Θ', ἃ κακόνος παραβῆσαι ἐπιπέφυκτουσιν εὐθείαισ ἕξουσιν καταγε-

Euclid. *Commentary on Archimedes' Sphaera and Cyclodromia*, Archim. ed. Heiberg III. 66. 9-10. 5

(III) *The Solution of Diocles in his Book "On Burning Mirrors"*

In a circle let there be drawn two diameters AB, ΓΔ at right angles, and on either side of B let there be cut off two equal arcs BE, BZ, and through Z let ZH be drawn parallel to AB, and let DE be joined. I say that ZH, EK are two mean proportionals between ΓΗ, ΗΘ.

For let DE be drawn through B parallel to AB; EK will therefore be equal to ZH, and KF to HD; this will be clear if straight lines are drawn joining



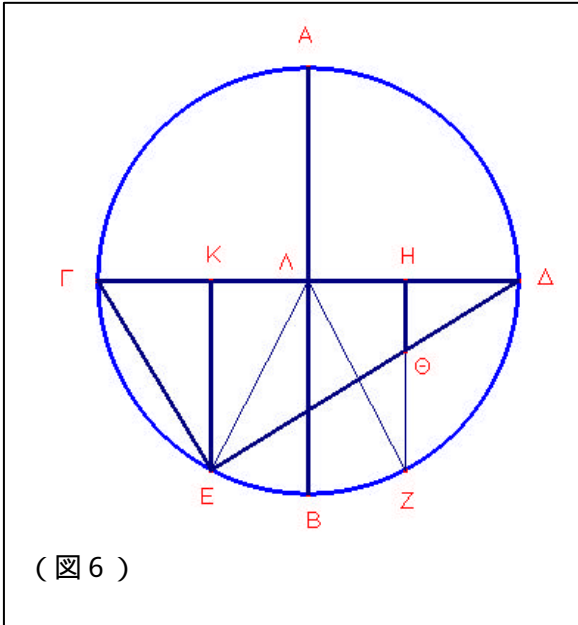
A to E, Z; for the angles ΓΑΕ, ΖΑΔ are equal, and the angles at K, H are right; and therefore, since ΔΕ=ΔΕ, all things will be equal to all; and therefore the remaining element EK is equal to ΗΔ. Now since

ΔΚ : ΚΕ = ΔΗ : ΗΘ,  
but  
ΔΚ : ΚΕ = ΕΚ : ΚΓ (for EK is a mean proportional between ΔΚ, ΚΓ),  
therefore  
ΔΚ : ΚΕ = ΕΚ : ΚΓ = ΔΗ : ΗΘ,  
and  
ΔΚ = ΓΗ, ΚΕ = ΖΗ, ΚΓ = ΗΔ;

therefore ΓΗ : ΗΖ = ΖΗ : ΗΔ = ΔΗ : ΗΘ.

If then on either side of B there be cut off equal arcs MB, EN, and NH be drawn through N parallel to AB, and BM be joined, NE, ED, will again be mean proportionals between ΓΗ, ΗΘ. If in this way more parallels are drawn continually between B, Δ, and arcs equal to the arcs cut off between them and B are

( 図 5 )



( 図 6 )

続いて、比例中項による解明指針により立方体倍積問題の作図に取り組んだ。まず、「平方倍積問題では  $a : x = x : b$  となる直角三角形の作図よりできたことから、立方体倍積問題では、 $a : x = x : y = y : b$  の関係にある直角三角形を作図ができればよい」という解明指針が立った。

しかし、立方体倍積問題を「定木」と「コンパス」のみでは作図不可能であることが証明されていることを提示した。そこで、理論上作図できたディオクレスの解法(図5)を作図ツール:カブリを用いて追っていった。(図6)

作図直後には「なんだ、描けるじゃないか」といった発言が多数の生徒から出た。この理論上となる前提の考察と「どこが比例中項の関係にあるか」を宿題とし2時間目は終了した。

どちらも、難しかったようである。しかし、数人の生徒は比例中項の関係<sup>11</sup>を見つけた。また、「この円は実際に描けるのか」と疑問を提示するなど理解できた生徒がいた。(今日的には、 $\sqrt[3]{a}$  が立方根になる)



11 図7において  

$$\frac{a}{x} = \frac{x}{y} = \frac{y}{b}$$
 となるようにとる)より  

$$a : x = x : y = y : b$$



8、エラトステネス (Eratosthenes) の解法

○原典 (英訳、日本語訳)

194. 88. 3-36. 51  
 (41) The Solution of Eratosthenes . . .

Let there be given two unequal straight lines AE, AB between which it is required to find two mean proportionals in continued proportion, and let AE be placed at right angles to the straight line EB, and upon EB let there be erected three successive parallelograms AZ, ZI, IO, and let the diagonals AZ, AH, IO be drawn therein; these will be parallel. While the middle parallelogram ZI remains stationary, let the other two approach each other, AZ above the middle one, IO below it, so in the second figure, until A, B, Γ, Δ lie along a straight line, and let a straight line be drawn through the points A, D, Γ, Δ, and let it meet EB produced in K; it will follow that in the parallel AE, ZB

AK : KB = EK : KZ  
 and in the parallel AE, BI  
 AK : KB = EK : KH.  
 Therefore AK : KB = EK : KZ = EK : KH.  
 Again, since in the parallel BZ, ΓH  
 BK : KT = ZK : KH  
 and in the parallel BH, ΓΘ  
 BK : KT = HK : KΘ,  
 therefore BK : KT = ZK : KH = HK : KΘ.  
 But ZK : KH = EK : KZ, and therefore  
 BK : KZ = EK : KZ, and therefore  
 BK : KZ = EK : KZ = EK : KZ = EK : KZ.  
 Therefore AE : BZ = BZ : ΓH = ΓH : ΔΘ.  
 Therefore between AB, ΔΘ two means, BZ, ΓH, have been found.

Such is the demonstration on geometrical surfaces; and in order that we may find the two means mechanically, a board of wood or ivory or brass is placed through, having on it three equal tables, as smooth as possible, of which the middle is fixed and the two outside run in grooves, their sizes and proportions being a matter of individual choice—for the proof is accomplished in the same manner: in order that the lines may be found with the greatest accuracy, the instrument must be skilfully made, so that when the tables are moved everything remains parallel, smoothly fitting without a gap.

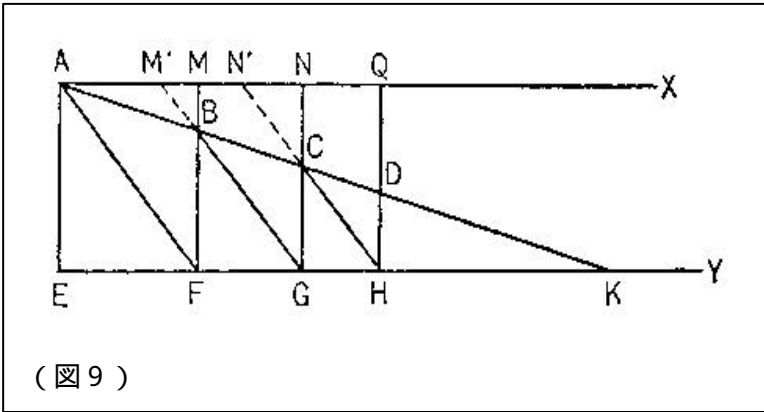
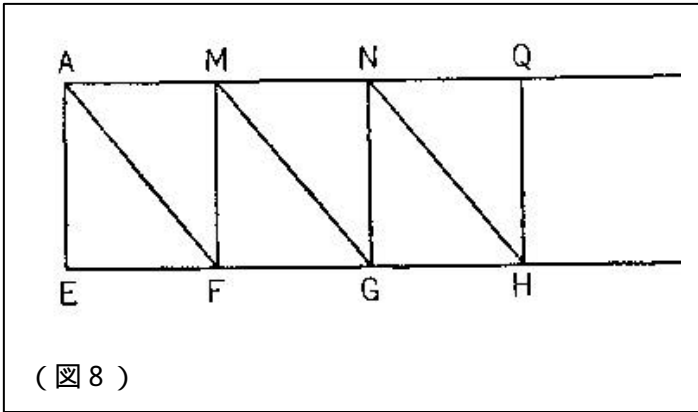
In the figure left the instrument is sketched and is fastened on with lead close under the crown of the pillar, and beneath it is a shortened form of the proof.

(図7)

【3時間目】立方体の倍積問題の解法(2)  
 立方体倍積問題の解法について、前回の理論上の作図の他に、道具を用いたエラトステネスの解法(図7)がある。3時間目では道具による解法を取り上げた。

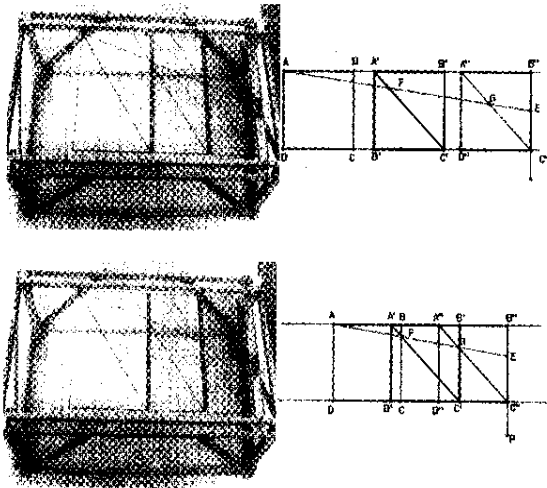
エラトステネスの解法を、実際に簡易の模型を用いて追っていった。まず、3枚の模造紙を、図8にあるように並べ、対角線を入れる。(AEFM、MFGN、NGHQが模造紙1枚に当たる)そして、図9にあるようにAからKまで、紐を張る。MF、NGとの交点ができ、それぞれB、Cをとする。「中」の模造紙の対角線MGがBに、「右」の模造紙の対角線NHがCに合わさるように移動する。(図9)

前回同様「どこが比例中項の関係にあるのか」を考察した。今回は相似性を発見しやすく、ほとんどの生徒が比例中項の関係<sup>12</sup>を見つげられた。



12 図10において  
 $AE : BF = EK : FK = AK : BK$  ( AEK BFK )  
 $= FK : KG$  ( AFK BGK )  
 $= BF : CG$  ( BFK CGK )  
 $AE : BF = BF : CG$   
 同様にして  $BF : CG = CG : DH$   
 よって  $AE : BF = BF : CG = CG : DH$

○エラトステネスが用いた道具



(図 10)

次に、ネット接続により、復元されたエラトステネスの道具を確認した。生徒の中にはインターネットを利用したことがない生徒もあり、「こんなことも分かるんだ」「インターネットでも勉強ができるんじゃないか」といった発言が飛び交った。(図 10)

## 5、 考察

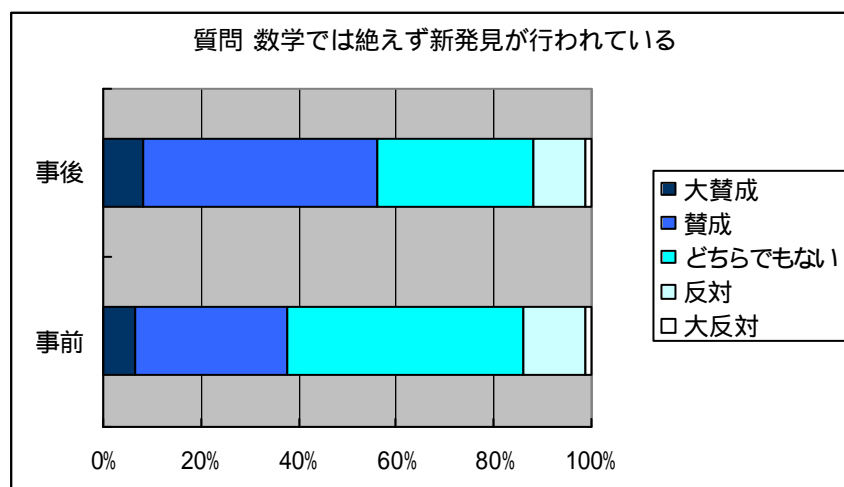
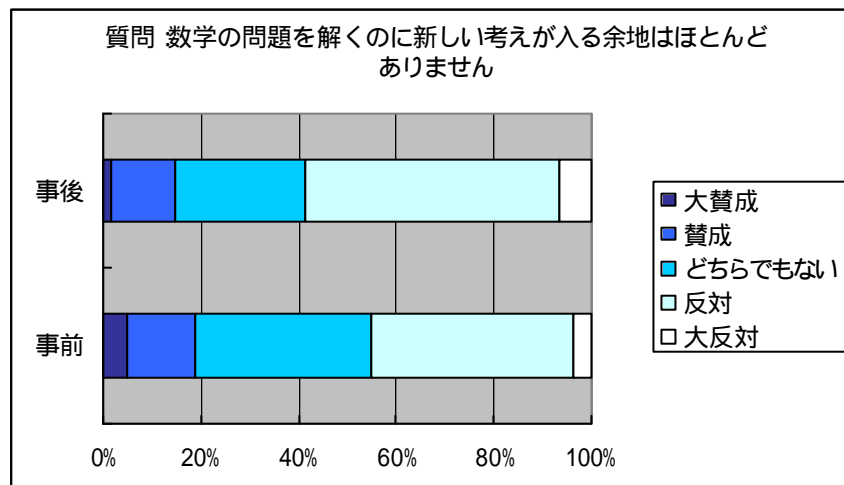
課題 1：生徒は、数学が人間の営みとして存在し、それにより発展してきたとする形成過程を認識できるか。また、現代と相対化するなど自分中心の数学観から脱却できるか。

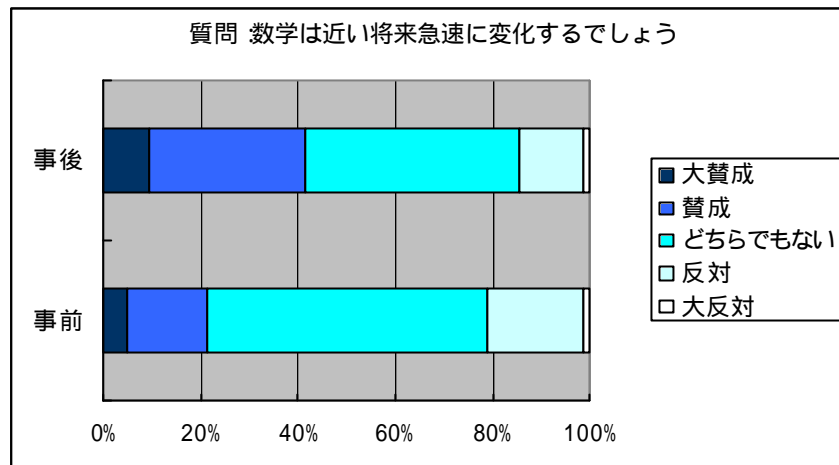
生徒の一人は、授業後のアンケート中で「自分たちが普段授業でやっていることだけが数学でないと知りました。古代の人の発想はすばらしいと感じました。」と感想を述べている。この生徒は、ギリシャ人の業績を認め、評価している。そして、従来の数学観に「古代の人」「数学は古代にもあった」という視点が加えられ見事に脱却しているといえる。

また、ある生徒は「今まで公式とか使うのを当たり前のようだったけど、この公式の背景には様々な人の苦労があったことがわかった。」と回答している。さらに「どのようなことからそのように変わったか」との質問には「今だと、コンピュータで簡単に作図ができるけど、昔は何もない中で、多くのことを考え、試行錯誤をして作図してきたこと」と述べている。彼は当時の状況や人間の営みの中から、数学が発

展してきた過程をとらえ、現代と相対化して当時の苦勞を感じている次に、全体のデータにも注目したい。選択型のアンケートでは、数学に関する事象に対する考えや態度をリカート尺度（5：大賛成～1：大反対）を用いて調査した。項目ごとに生徒全体の平均数値を算出し、事前と事後の数値変化を見た。「数学の問題を解くのに新しい考えが入る余地はほとんどありません」の質問では、事前 2.750 が事後 2.506 と低下し、逆に「数学では絶えず新発見が行われている」の質問では、事前 3.287 が事後 3.506 と上昇した。さらに「数学は近い将来急速に変化するでしょう」の質問では、事前 3.037 が事後 3.346 に上昇した。

以上のことから課題 1 は果たせたといえる。以下にそのアンケート結果のグラフを載せる。





### 課題 2 : 生徒は、紙と鉛筆による計算中心の数学から脱却できるか

ある生徒は、「数学の授業について、教科書や参考書でやるものだと思っていたがインターネットなどでもできるということが分かった」という感想を述べている。

全体でも、事前アンケートの最後の質問「数学をするときにどんなものを使いますか？（複数可）」に対して、定規やコンパスなど参考書・問題集や筆記用具以外の道具を回答した生徒は 26 人（84 人中）。「特になし」などの無回答や「頭」という回答も目立った。しかし、授業後の感想等を問うアンケートでは「コンピュータなどを使っても数学はできる」と回答するなど、「コンパス・定規」「コンピュータ（パソコン）」、「インターネット」、「カブリ」、といった道具に対するコメントがほぼすべての生徒から聞かれた。

これらのことから、生徒は、紙と鉛筆による計算中心の数学から、それらのみではない数学へと脱却できたといえる。

### 課題 3 : 生徒は、現代の代数中心の発想を幾何的視点で捉えなおし、数学に対する感覚的イメージや思考の幅を広げるか。

生徒の一人は事前アンケートで、「数学は自分で新しいことを考えていこうとする人にとって適した学問です」の質問に「反対」、「日常の問題を解決するのに数学が役に立ちます」の質問に「反対」、「ほとんどの数学の問題にはいろいろな解き方があります」の質問に「どちらともい

えない」と回答していることから、数学をパターン化されたものとして捉えていた。しかし、授業後には「図形を描いたりするのは単純なことだと思っていたがなかなか頭を使うもんだと思った。今までの作図とかはこうなればこうなると言う程度だったが今回の3回の授業ではいろいろな比などを駆使してやっとできたように思えたから」と感想を述べている。従来の思考に、違った視点で捉える、従来のものを駆使するなど思考の幅が広がっていることが窺える。

また、ある生徒は「数学は図形が大切なんだと改めて思わされた。数学は数字と記号で解くほうが重要だと思っていたが図形を解くことも(が)大切であり、それを解くことで数学は発展していくのだと思った。」と述べ、形成過程の認識から現代と相対化するとともに、現代の代数中心の学習に対し、幾何的視点の重要性を再認識している。

全体ではこれらの生徒のようなはっきりとした感覚的イメージや思考の幅の広がりに関するデータは得られなかったが、課題1、2と合わせても十分果たせたといえる。

## 6、おわりに

「数学基礎」は「理解のよりどころ」としての感覚的側面の強化を担うと考える。本研究はその提案を試みた。今回、生徒の数学観の変容から、十分な可能性を感じた。なお、今回の授業では、磯田や恩田の「一次文献を利用した数学史は数学自身の理解を深めるような議論を促すことに役立つ」、「真正の歴史資料である一次文献、そしてその時代の道具(言語表現、用具など)が解釈、吟味の対象にできる」という考えを支持し、一次文献を用いて行った。また、歴史は遺跡により推測されるものであり、数学的著作の大部分は既に失われており、後に書かれた注釈者や編集者の言及によるところが大きい。これらのことを注意する必要がある。

今後の課題について。「コンピュータを使ってみると知らなかったことが簡単に分かる」と述べる生徒もあり、結果のみを求める姿勢が窺える。この状況を踏まえ、数学的側面に対するコンピュータのあり方、活用方法の検証が課題となる。

註 1

本研究は、科学研究費、基盤研究 B(2) 展開研究 (課題番号 10558032 研究代表者 磯田正美) の一環として行われた。

註 2

授業の詳細並びに資料等は次に掲示している。

<http://130.158.186.11/mathedu/forAll/project/2000/index>

謝辞

研究授業の実施に際して、埼玉県立春日部高等学校の今西善徳先生、江守弘明先生、斎藤芳明先生、早乙女勤先生、保科孝先生、渡辺正弘先生にご指導、ご協力いただきました。ありがとうございました。

(氏名五十音順)

参考文献

- (1) ルネ・トム (1975) 「『現代』数学、それは教育学的、哲学的誤りか」  
R. ジョラン 編者 森 毅 他 訳 「何のための数学か」 東京図書 pp32
- (2) H. N. Jahnke 「The Historical Dimension of Mathematical Understanding」  
Proceeding of PME-18, Portugal, Vol.1 pp139-156
- (3) 斎藤 憲 (2000) 「数学史におけるパラダイム・チェンジ」  
現代思想 10 月臨時増刊 「数学の思考」 pp56
- (4) 文部省 (1998) 「子どもの現状、教育課程実施の現状と教育課題」  
教育課程審議会答申
- (5) 文部省 (1999) 高等学校学習指導要領解説 数学編理数編
- (6) 磯田正美 (1999) 「マルチメディアの導入でかわる教育観・指導観」  
生きる力をはぐくむ算数授業の創造講座第 12 巻 磯田正美編  
マルチメディアの活用 ニチブン  
2 節 マルチメディアへの道から指導法の転換を問い直す
- (7) 磯田 正美 (1999) 「メディアの歴史的変遷と算数・数学文化の変遷」  
生きる力をはぐくむ算数授業の創造講座第 12 巻 磯田正美編  
マルチメディアの活用 ニチブン  
2 節 マルチメディアへの道から指導法の転換を問い直す
- (8) 磯田 正美 (2000) 「道具が媒介する図形における「観察、操作、実験」  
型探究の楽しさ」 数学教育改革の推進とテクノロジーの利用の実証に関  
する研究～ミレニアム・プロジェクトに就いて～

筑波大学数学教育学研究室

- (9) 磯田正美 (1987) 「数学学習における数学史の利用に関する一考察」  
筑波大学附属駒場中・高等学校研究報告 第26集
- (10) 磯田正美 原田耕平編著 (1999) 「生徒の考えを活かす問題解決授業の創造 意味と手続きによる問いの発生と納得への解明」明治図書
- (11) 磯田正美 (1999) 「数学の弁証法的発展とその適用に関する一考察 - 「表現の再構成過程」再考 - 」筑波数学教育研究 第18号
- (12) 沖田和美 (1996) 「学校数学における数学史を生かした指導に関する一考察」平成7年度筑波大学大学院教育研究科修士論文
- (13) 後藤司 (1997) 「曲線の表現史と作図ツールをふまえた解析幾何教材の刷新に関する一考察～ギリシャから微積分学創成期をふまえて～」平成8年度筑波大学大学院教育研究科修士論文
- (14) 薬師寺将二 (1998) 「解析の歴史的変遷を踏まえた曲線の探求に関する一考察～作図ツールの使用を前提に～」平成9年度筑波大学大学院教育研究科修士論文
- (15) 恩田洋一 (1999) 「一次文献を利用した数学史教育に関する一考察～「数学基礎」に関連して～」平成10年度筑波大学大学院教育研究科修士論文
- (16) 野口和久 (2000) 「数学的な発見における図的表記の役割について～平面幾何において用いる図的表記の一般性に焦点をあてて～」平成11年度筑波大学大学院教育研究科修士論文
- (17) スチュアート・ホリングデール著 岡部恒治監訳 (1993)  
「数学を築いた天才たち」(上) 講談社 pp29～61、
- (18) T. L. ヒース著 平田寛 大沼正則 菊池俊彦訳 (1998)  
「復刻板 ギリシャ数学史」共立出版 pp75～163
- (19) アルパッド・サボー著 中村幸四郎 中村清 村田全訳 (1978) 「ギリシャ数学の始原」玉川大学出版部 pp49～69、202～213
- (20) カール・B・ボイヤー著 加賀美鉄雄 浦野由有訳 (1983) 「数学の歴史1」朝倉書店 pp88～143
- (21) 大野栄一 (1993) 「定規とコンパスで挑む数学」講談社 pp223～234
- (22) ハイベルグ編著 中村幸四郎他訳 (1998) 「ユークリッド原論」共立出版
- (23) 藤沢令夫訳 「プラトン全集9」(1974) 岩波書店 pp279～291
- (24) 矢野健太郎 「幾何の発想ギリシャ」朝日出版社 pp118～126、173～175
- (25) V. Frederick Rickey (1996) 「The Necessity of History in Teaching Mathematics」Via Mathematica、Mathematical Association of America
- (26) K. C. コール著 大貫昌子訳 (1999) 「数学の秘かな愉しみ 人間世界を数学で読む」白揚社