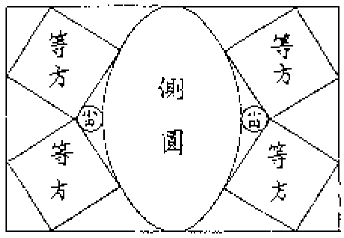
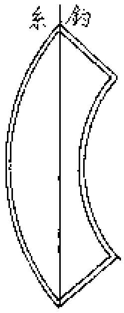
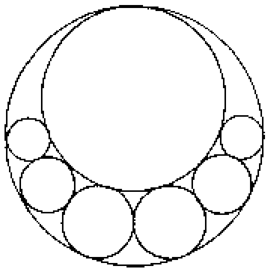
研究授業事前課題







關流内田新三郎恭常門人
●今有如圖側圓容等方
面四個小圓二個直長若干直
平若干短徑若干問得等方面
及小圓徑術如何
答曰如左術
術曰置長内減短徑以短徑
除之自之以減一個餘名元以一
乘方開之名亨以減五分元和餘乘
平方開之名利乘亨得方面名貞
以亨除之倍同乘一個名貞利乘
平加短徑以減長餘以貞除之
得小圓徑合問
●今有如圖扇紙形欲使中心點
釣之橫平大小徑各若干紙徑若干問
距線術如何
答曰如左術
術曰以大小徑差除倍徑擬圓徑
以一個擬弧背除術求玄乘小
徑除以大小徑和除之加大徑因
弦三除以減大徑半乘擬圓徑得
距線合問
●今有如圖圓内容數圓及累圓
乃不動者僅　其外圓徑若干問數容圓
假書六個
數得至此圓徑術如何
答曰如左術
術曰以容圓數除外圓徑得至大
止圓徑合問
于時安政三丙辰歳三月
（下に六十三名の門人名を記す）

事前課題は，一番左の問題の解法に関係している

読めるか

年　　組　　番　　氏名

平面上の変換に関する課題

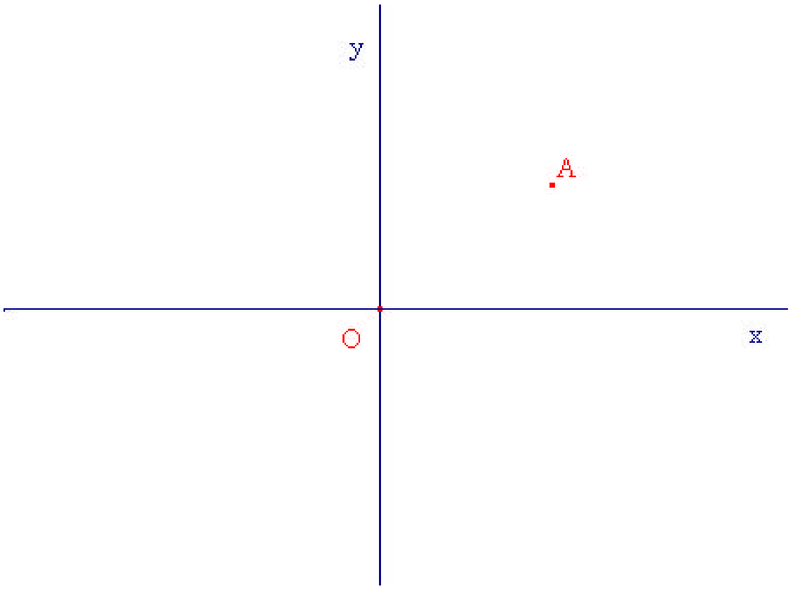
変換とは・・・平面上の各点を、ある規則に従って同じ平面上の点を移すことをいう。

座標平面上の点Aに対して、次の各点を描いてみよう。

（1）　原点Oに対して対称に移動した点B

（2）　X軸に対して対称に移動した点C

（3）　ｙ軸に対して対称に移動した点D



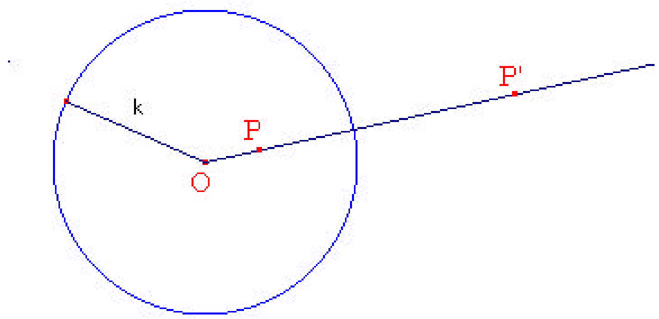
ここで,（1)では点,（2)（3）では直線に対しての変換を考えた。

次に，円に関しての変換を考えたい。この変換の規則を次のように定める。

定点０を中心とする半径kの円が与えられたとする。(O以外の）任意の点Pの反転像P’は、半直線ＯＰ上にあって、Oからの距離ＯＰ’が、

$$OP \cdot OP' = k^2$$

をみたすような点とする。

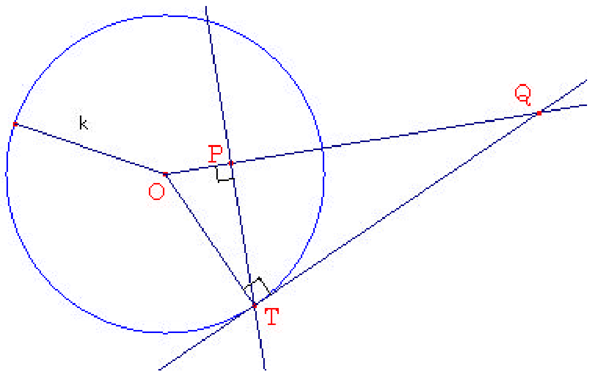


定点Oを中心とし､半径kの円Oがあり､Oと異なる円O内の点をPとする。Pを通ってOPに垂直な弦を引き、その端をTとし、Tを通って反転円に接線を引いて、OPとの交点をQとすると、三角形（　　　　　　　　　）と三角形（　　　　　　　　　）は相似であるから、

OP:（　　　　　　）＝（　　　　　　）：OQ

OP・OQ＝（　　　　　　）

よって、点Qが点Pの反転像P’である。

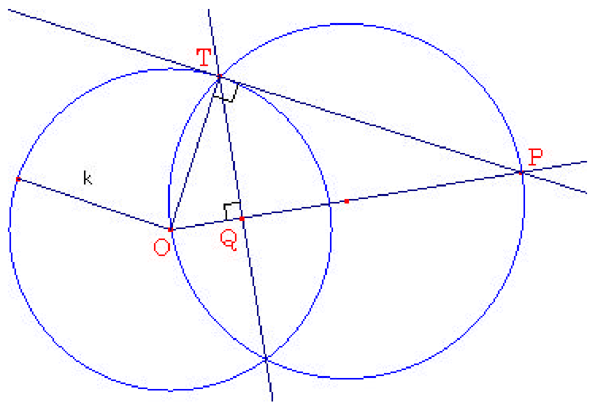


次に、点Pが円O外の点の場合について考えてみよう。OPを直径とする円と円Oとの交点の１つをTとする（と、（　　　　　　　　　　　　　）の定理により、∠OTP＝（　　　　　）度であり、点TはPから円O へ引いた接線の接点になる）。T から OP へ下ろした垂線の足を Q とすると、三角形（　　　　　　　　　）と三角形（　　　　　　　　　）は相似であるから、

OP:（　　　　　　）＝（　　　　　　）：OQ

OP・OQ＝（　　　　　　）

よって、点Qが点Pの反転像P’である

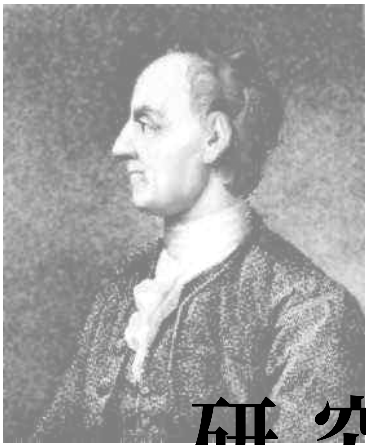
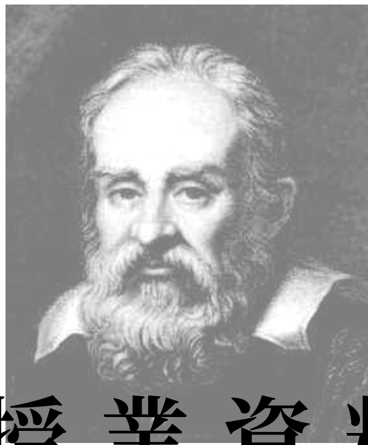


これらのことから、次のことが分かる。

1　点Oを除いた反転円Oの内部の点は、反転円Oの（　　　　　　）へ移る。

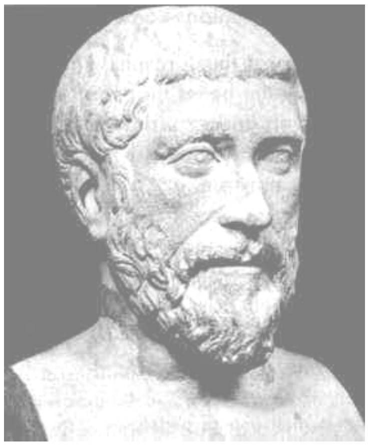
2　反転円Oの外部の点は、反転円Oの（　　　　　　）へ移る。

3　点Pの反転像P’の反転像は（　　　　　　　　　）である。


研 究 授 業 資 料






年　　組　　番　　氏名

Euler	Galileo	Kepler
Leibniz	Newton	Pythagoras
Taylor	Descartes	Archimedes

1．Pappus of Alexandria (アレクサンドリアのパッポス)・・・A.D.300 頃

ギリシアの偉大な数学者たちの最後を飾る人物はパッポスである。彼については，紀元後 320 年頃に『数学集成』という大著を編纂したということしか知られていない。この著作は 10 巻のうち 8 巻が残っており，それらはまさに情報の宝庫である。何人かの重要なギリシアの数学者についてその名前だけ伝えており，もしその記述がなければ彼らの存在は全く我々には知られなかったろう。

（数学を築いた天才たち　上　スチュワート･ホリングデール著　講談社より）

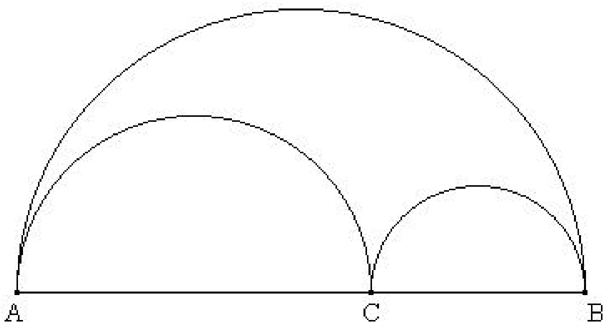
『数学集成』あるいは『集成』

“集成”は，ギリシア幾何学の全範囲を包括すると同時に，百科辞典というよりむしろ手引書あるいは入門書である．この集成は，独立したものというよりむしろ（当時存在していた）原著といっしょに読まれるようにつくられたものであった．しかしながら，ある論題の歴史，たとえば立方体の倍積とか，二つの比例中項を見出す問題とかの歴史の場合にはその解の写しがとられている．たぶんそれらの解は，すでにかなり入手困難で，散逸してしまった資料から集められねばならなかったからであろう．入手しやすい古典などが記述される場合ですら，別解とか，よりよい証明とか，拡張とかが与えられている．著者としては，非常な独創性を装おうともせずに，全巻にわたって，論題の完全な理解，判断の独自性，技術の熟達とが示されている．その文体は簡潔，明瞭である．要するにパッポスは，洗練された多才の数学者で古典ギリシア幾何学のすぐれた代表者として目だった存在である．

（復刻版　ギリシア数学史　T.L.ヒース著　共立出版より）

靴屋のナイフ（アルベロス）の作図題

第 4 巻の第 2 項は，きわめて興味ある独創的なものである．ここには，その形からみて＜靴屋のナイフ＞（アルベロス）といわれる図形に内接する円に関連した作図題がある．もし，一つの直線 AB が C で一般に等しくない二つの部分に分けられるとし，さらに AB，AC，CB を直径とする半円を，AB の同じ側に書くとすれば，この三つの半円に囲まれた図形が，＜靴屋のナイフ＞である．＜靴屋のナイフ＞とそれに内接する円についてのいくつかの命題は，アルキメデスの名前でアラビアに伝えられた“補助定理の書”中に見出される．



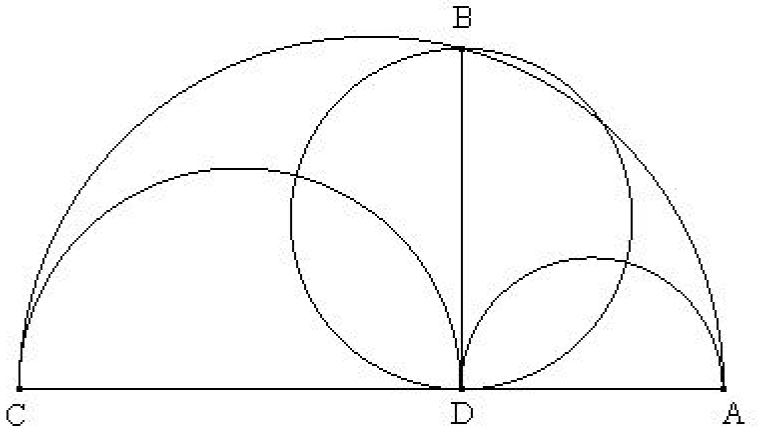
（復刻版　ギリシア数学史　T.L.ヒース著　共立出版より）

まずは，アルキメデスの“補助定理の書”で扱われている図形の問題について考えてみよう。

２．アルキメデスの“補助定理集”（*Liber Assumptorum*）

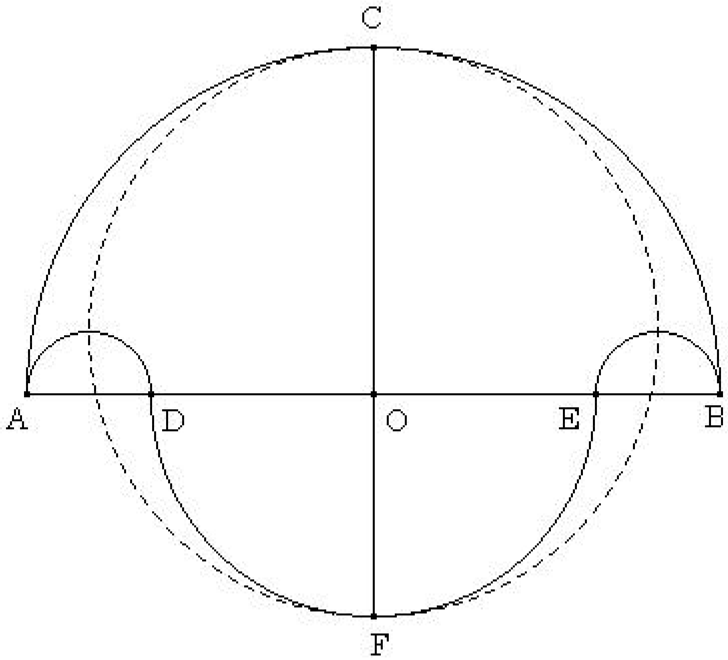
①『靴屋のナイフ（アルベロス）』：円環問題

「ABC を半円とし、直径 AC 上に AD と DC を直径とする半円を書き、AC に垂直に垂線 BD をたてる。アルベロス（大きな半円と２つの小さな半円の周囲によって囲まれる図形）の面積は、線分 BD を直径とする円の面積に等しい」



②『**塩入れ（サリノン）**』

「**線分** AB、AD、DE、**および** EB **に対し、それぞれを直径とする半円を描く。ただし** AD＝EB **とする。すると、塩入れの囲む面積全体（半円弧だけで囲まれている）は、その図形の対称軸を直径とする円の面積に等しくなっている**」

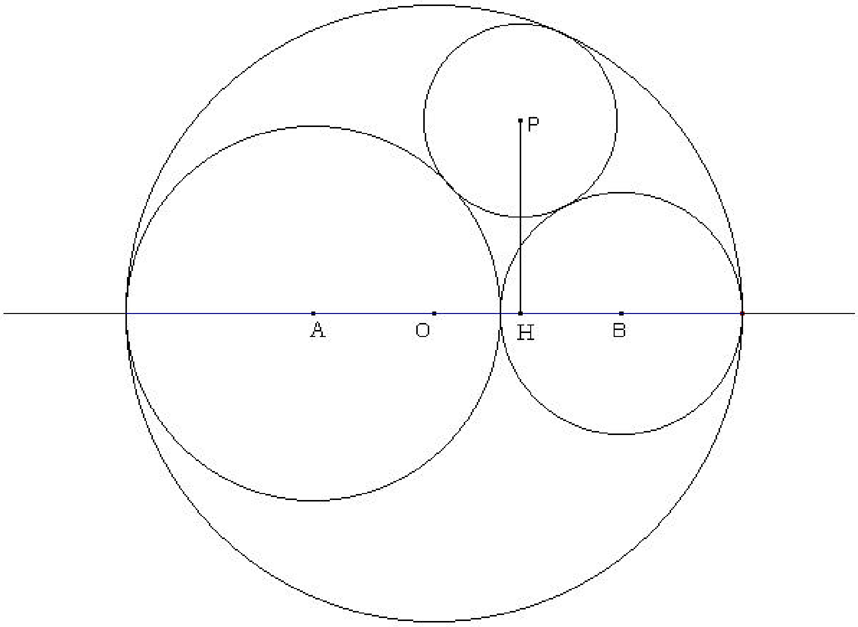


３．「靴屋のナイフ（アルベロス）」に注目した問題

アルベロスの問題に関する入試問題より

図のように3個の円A，B，Pは互いに外接し，円Oに内接している。円O，A，Bの中心OABは図のように一直線上にあり，半径はそれぞれ5，3，2である。点Pから直線ABへの垂線PHをひき，線分BHの長さをx，円Ｐの半径をyとする。

【99　お茶の水女子大附属高校改】



（１）x，yの関係式を求めてみよう．

（2）x，yの値を求めてみよう．

（3）円 P の半径と垂線 PH の長さの関係を求めてみよう．

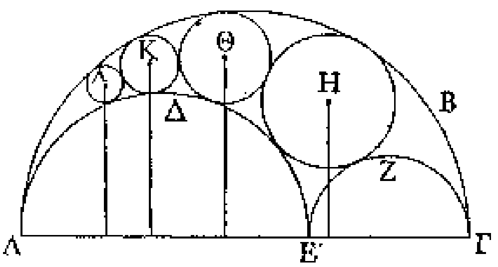
4．「数学集成」第４巻・第２項（ギリシア語／英語訳）

XXIV. REVIVAL OF GEOMETRY: PAPPUS OF ALEXANDRIA

(*g*) Circles Inscribed in the ἄρβηλος

Ibid. iv. 14. 19, ed. Hultsch 208. 9-21

Φέρεται ἔν τισιν ἀρχαία πρότασις τοιαύτη· ὑποκείσθω τρία ἡμικύκλια ἐφαπτόμενα ἀλλήλων



τὰ ΑΒΓ, ΑΔΕ, ΕΖΓ, καὶ εἰς τὸ μεταξὺ τῶν περιφερειῶν αὐτῶν χωρίον, ὃ δὴ καλοῦσιν ἄρβηλον, ἐγγεγράφθωσαν κύκλοι ἐφαπτόμενοι τῶν τε ἡμικυκλίων καὶ ἀλλήλων ὁσοιδηποτοῦν, ὡς οἱ περὶ κέντρα τὰ Η, Θ, Κ, Λ· δεῖξαι τὴν μὲν ἀπὸ τοῦ Η κέντρου κάθετον ἐπὶ τὴν ΑΓ ἴσην τῇ διαμέτρῳ τοῦ περὶ τὸ Η κύκλου, τὴν δ' ἀπὸ τοῦ Θ κάθετον διπλασίαν τῆς διαμέτρου τοῦ περὶ τὸ Θ κύκλου, τὴν δ' ἀπὸ τοῦ Κ κάθετον τριπλασίαν, καὶ τὰς ἑξῆς καθέτους τῶν οἰκείων διαμέτρων πολλαπλασίας κατὰ τοὺς ἑξῆς μονάδι ἀλλήλων ὑπερέχοντας ἀριθμοὺς ἐπ' ἄπειρον γινομένης τῆς τῶν κύκλων ἐγγραφῆς.

(*g*) Circles Inscribed in the ἄρβηλος

Ibid. iv. 14. 19, ed. Hultsch 208. 9-21

There is found in certain [books] an ancient proposition to this effect: Let ΑΒΓ, ΑΔΕ, ΕΖΓ be supposed to be three semicircles touching each other, and in the space between their circumferences, which is called the "leather-worker's knife," let there be inscribed any number whatever of circles touching both the semicircles and one another, as those about the centres Η, Θ, Κ, Λ; to prove that the perpendicular from the centre Η to ΑΓ is equal to the diameter of the circle about Η, the perpendicular from Θ is double of the diameter of the circle about Θ, the perpendicular from Κ is triple, and the [remaining] perpendiculars in order are so many times the diameters of the proper circles according to the numbers in a series increasing by unity, the inscription of the circles proceeding without limit.[a]

[a] Three propositions (Nos. 4, 5 and 6) about the figure known as the ἄρβηλος from its resemblance to a leather-worker's knife are contained in Archimedes' *Liber Assumptorum*, which has survived in Arabic. They are included as particular cases in Pappus's exposition, which is unfortunately too long for reproduction here. Professor D'Arcy W. Thompson (*The Classical Review*, lvi. (1942), pp. 75-76) gives reasons for thinking that the ἄρβηλος was a saddler's knife rather than a shoemaker's knife, as usually translated.

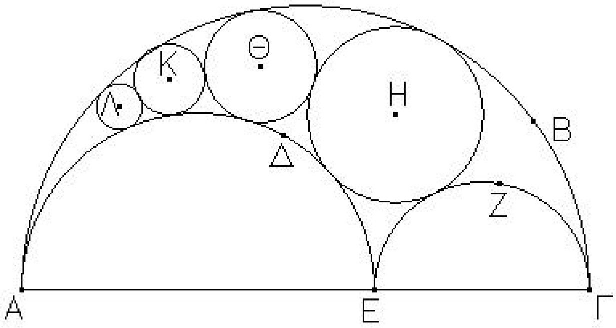
ギリシア文字

文　字	発　音	文　字	発　音	文　字	発　音
Α　α	ǽlfə	Κ　κ	kǽpə	Τ　τ	tau, tɔ:
Β　β	bi:tə, béitə	Λ　λ	lǽmdə	Υ　υ	jú:psilən,
Γ　γ	gǽmə	Μ　μ	mju:, mu:		ju:psáilən
Δ　δ	déltə	Ν　ν	nju:, nu:	Φ　φ, ϕ	fai
Ε　ε, ϵ	épsilən/-lan,	Ξ　ξ	gzai, ksai	Χ　χ	kai
	epsáilən	Ο　ο	óumikrən,	Ψ　ψ	psai, psi:/-sai
Ζ　ζ	zi:tə		oumái-	Ω　ω	óumigə,
Η　η	i:tə, éitə	Π　π, ϖ	pai		oumégə/-mi:-
Θ　θ, ϑ	θi:tə, θéitə	Ρ　ρ	rou		
Ι　ι	íoutə, aióutə	Σ　σ, ς	sigmə		

5．「数学集成」第４巻・第２項（日本語訳）

(g)　　β　ηολ　　に内接する円

Ibid. IV. 14. 19, ed. Hultsch 208. 9-21



ある巻においてこの結果への古代の命題がある：ＡＢΓ、ＡΔＥ、ＥＺΓをそれぞれ接している３つの半円であると仮定する。それら３つの半円の間隔に、中心Ｈ、Θ、Ｋ、Λを中心とする円列のように、半円と円列の両方に接している円がいくつでも内接しているとする。(その間隔は“leather-worker's knife”と呼ばれる。)　；そして以下のことを証明しなさい。中心ＨからＡΓへの垂線はＨについての円の直径に等しく、Θからの垂線はΘについての円の直径の２倍に等しく、Ｋからの垂線は３倍に等しい。残りの垂線は、限りなく生ずる円の内接によって単一に増加する円列の順番に従って，順序正しくそれと同数倍の適当な円の直径に等しい。

その類似点からleather-worker's knifeへの　β　η　λ　(

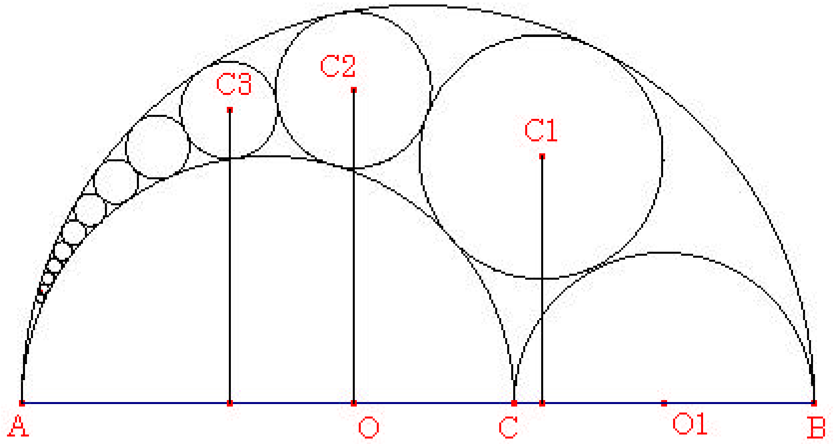
(Nos. 4, 5 and 6)はアルキメデスのLiber Assumptorumに含まれていて、それはアラビア語で残っている。それらの命題はパッポスの説明における特別な場合としても含まれているが、残念ながらここで複製するにはあまりにも時間がかかりすぎる。D'Arcy W. Thompson教授 (The Classical Review, lvi. (1942), pp. 75-76) は、

β　η　λ　o

そして，その理由を示している。

6．円環問題の拡張

パッポスはアルキメデスの『靴屋のナイフ（アルベロス）』：円環問題を拡張させた



内接円 C1，C2，C3・・・を順に描いてどれもが半円 AB と AC に接し，かつ円自身も順に接しあっているようにし，これらの円 C1，C2，C3・・・の直径をそれぞれ d_1，d_2，d_3・・・，中心 C1，C2，C3・・・から AB に下ろした垂線の長さを p_1，p_2，p_3・・・とすれば，

$$p_1 = d_1,\ p_2 = 2d_2,\ p_3 = 3d_3,\ \cdots$$

となる

証明は反転を用いる

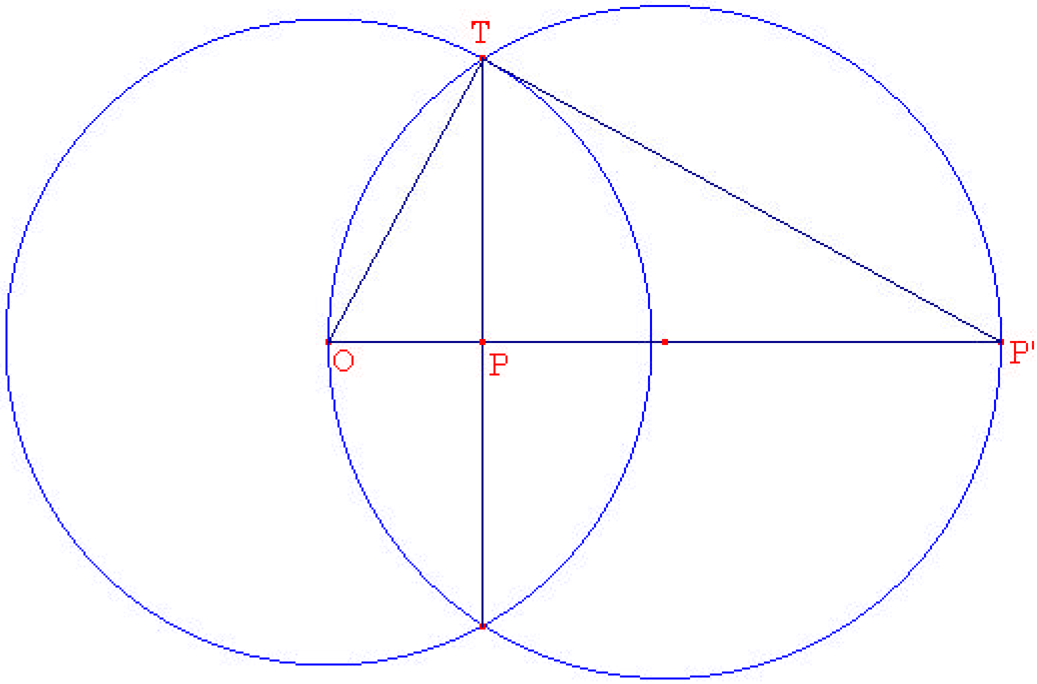
７．反転（inversion）とは

反転（inversion）・・・マグヌス（L.J.Magnus）が1831年に発明

定点O**を中心とし半径**k**の円が与えられたとする。そこで、**（O**以外の）任意の点Pの反転像P' は半直線**OP **上にあって、**O**からの距離**OP'**が**

$$OP \cdot OP' = k^2$$

をみたすような点であるとする。



（参考　「幾何学入門」　コクセター著　銀林浩訳　明治図書）

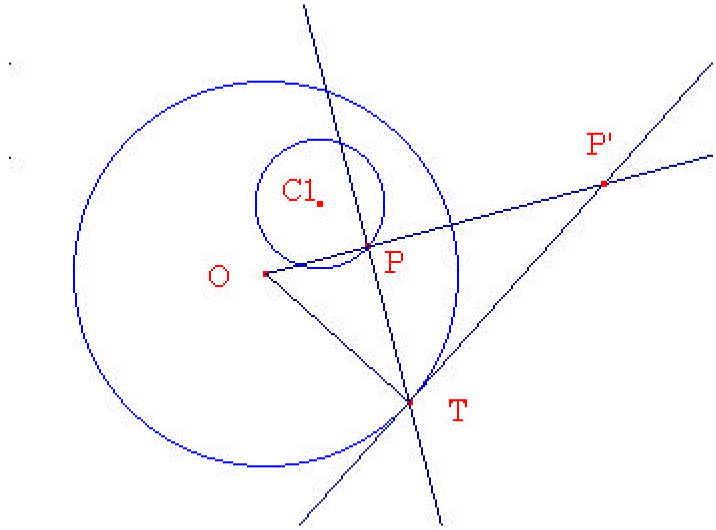
8．反転を使って作図をしよう

反転とは・・・

定点Ｏを中心とする半径kの円が与えられたとする。そこで，(O 以外の)任意の点Ｐの反転象 P'は半直線 OP 上にあって，Ｏからの距離 OP'が

$$OP\cdot OP' = k^2$$

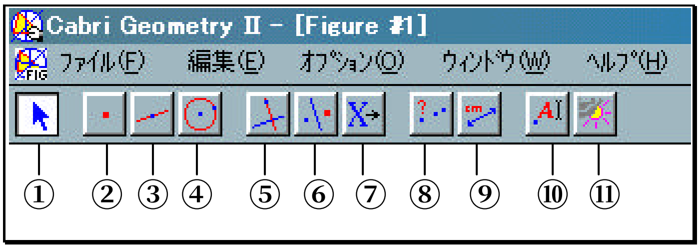
をみたすような点であるとする。



課題１　反転円内の円Ｃ１を反転させてみよう。

（1）どんな図形になるか予想してみよう。

（2）作図ツール Cabri Geometry Ⅱ（以下カブリⅡ）を使って作図してみよう。



（作図方法）

1　点Ｏと点Ｐを通る半直線を引く

③から$\boxed{\text{半直線}}$を選び，点 O，点 P の順にクリックする。

2　点Ｐを通り半直線ＯＰに垂直な線を引く

⑤から$\boxed{\text{垂線}}$を選び，点 P と，半直線 OP をクリックする。

3　円Ｏと２の垂線の交点を取る

②から$\boxed{\text{交点}}$を選び，円 O と２の垂線をクリックし T とする。

4　点Ｏと点Ｔを結ぶ

③から$\boxed{\text{線分}}$を選び，点 O と点 T をクリックする。

5　点Ｔを通り線分ＯＴに垂直な線を引く

⑤から$\boxed{\text{垂線}}$を選び，点 T と線分 OT をクリックする。

6　点 P'を取る

②から$\boxed{\text{交点}}$を選び，半直線 OP と５の垂線をクリックし，点 P'を取る。

7　P'の P に対する軌跡を描く

⑩から$\boxed{\text{トレース　オン／オフ}}$を選び，点 P'をクリックして点滅させる。

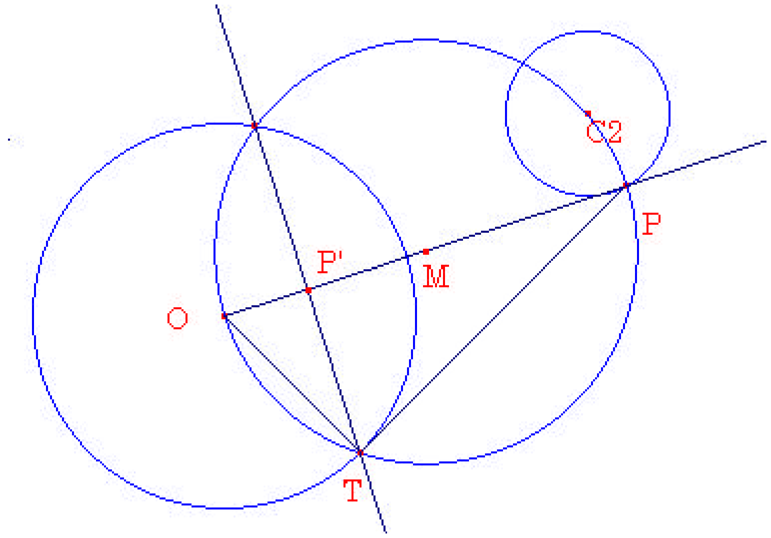
①から$\boxed{\text{ポインタ}}$を選び，点 P をドラッグしながら円 C１に沿って動かす。

(もっと詳しく見るために)⑤から$\boxed{\text{軌跡}}$を選び，点 P'，点 P の順にクリックする。

（3）作図の結果，円 C1 はどんな図形に移りましたか。

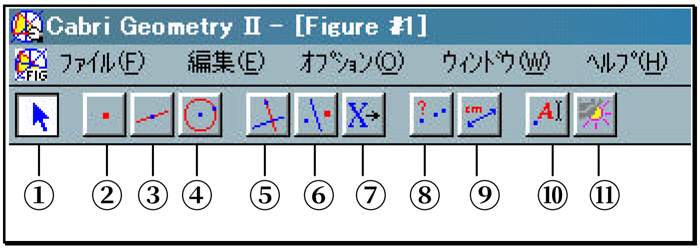
課題２　反転円外の円 C２を反転させてみよう。

（事前課題を見ながらやってみよう。）



（1）　どんな図形になるか予想してみよう。

（2）　カブリⅡを使って作図してみよう。



（作図方法）

1　半直線 O P を描く

③から$\boxed{\text{半直線}}$を選び，点 O，点 P の順にクリックする。

2　O P の中点 M を取る

⑤から$\boxed{\text{中点}}$を選び，点 O と点 P をクリックする。

3　点 M を中心に直径 O P の円を描く

④から$\boxed{\text{円}}$を選び，点 M，点 P(または点 O)をクリックする。

4　円Ｏ と円Ｍ の交点を取る

②から交点を選び，円Ｏと円Ｍをクリックし，交点の１つをＴとする。

5　線分ＯＴ と線分ＴＰ を描く

③から線分を選び，点Ｏと点Ｔをクリックする。

③から線分を選び，点Ｔと点Ｐをクリックする。

6　点Ｔ を通り，線分ＯＰ に垂直な線を描く

⑤から垂線を選び，点Ｔ，線分ＯＰをクリックする。

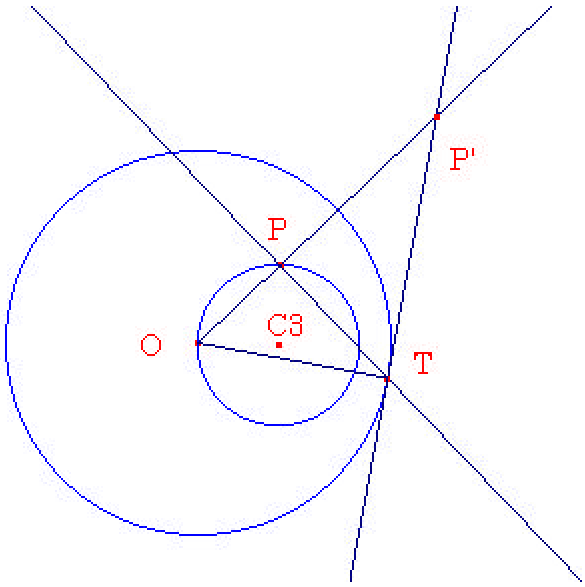
7　点Ｐ'を取る

②から交点を選び，５の垂線と線分ＯＰをクリックし，交点Ｐ'を取る。

8　課題１と同様に点Ｐ'の軌跡を描く

（３）　作図の結果，円Ｃ２はどんな図形に移りましたか。

課題３　反転の中心Ｏを通る円を反転してみよう。



（１）　どんな図形になるか予想してみよう。

（２）　カブリⅡを使って作図してみよう。

（作図方法）課題１と同様に，点Ｐ'を作図し，軌跡を描く。

（３）　作図の結果，円Ｃ３はどんな図形に移りましたか。

課題４　円Ｃ３の半径を変えてみるとＰ'の軌跡はどうなるか考えてみよう。
（　⇒　点Ｃ３をドラッグして実際に動かしてみよう。）

課題５　円Ｃ３が，反転円Ｏと２点で交わるときのＰ'の作図方法を考えよう。

9．反転のまとめ

参考

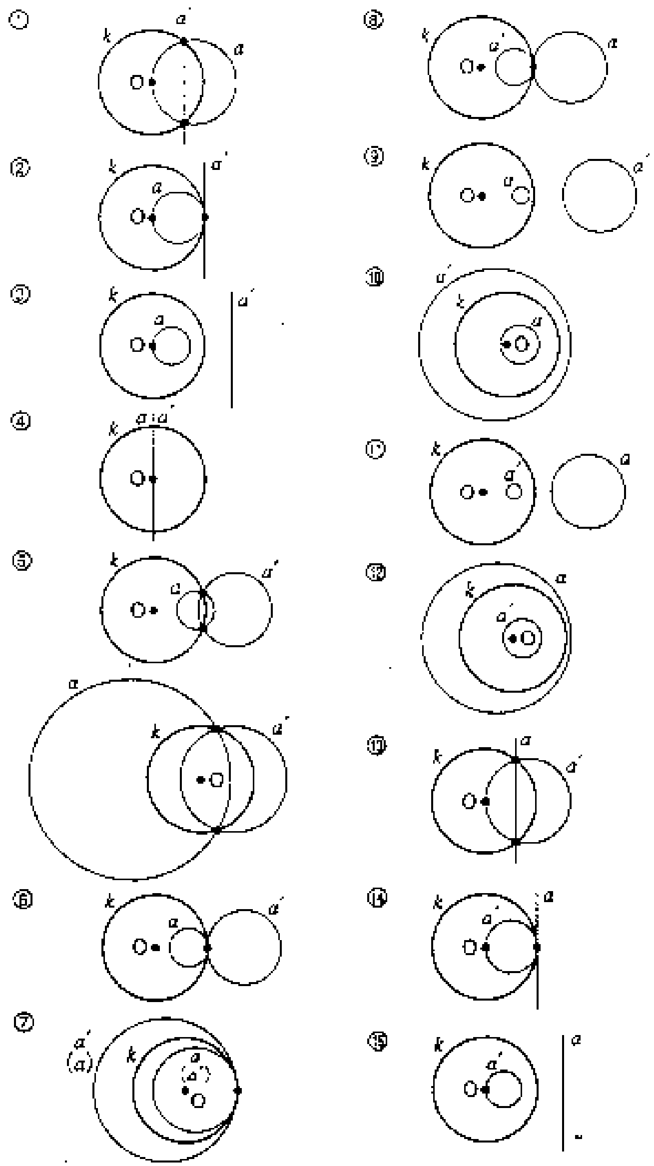
● 円周 k の中心Oを通るとき、

- 円周
  - k と交わっているとき —1→ 2交点を通る直線
  - k と接しているとき —2→ 接点を通る直線（接線）
  - k と共有点がないとき —3→ k と離れた直線
- 直線 —4→ 直線（同じもの）

● 円周 k の中心Oを通らないとき、

- 円周
  - k と交わっているとき —5→ 2交点を通る円周
  - k と接しているとき
    - 内接
      - Oを含まない —6→ 同点で接する外接円周
      - Oを含む —7→ 同点で接し k を含む円周
    - 外接 —8→ 同点で接するOを含まない内接円周
  - k と共有点がないとき
    - k の内
      - Oを含まない —9→ k 外の円周
      - Oを含むとき —10→ k を含む円周
    - k の外
      - Oを含まない —11→ Oを含まない k 内の円周
      - Oを含むとき —12→ Oを含む k 内の円周
- 直線
  - k と交わっているとき —13→ 2交点とOを通る円周
  - k と接しているとき —14→ 同点で接し、Oを通る内接円周
  - k と共有点がないとき —15→ Oを通る、k 内の円周

(9-18) 円周 k に関する，円周と直線の反転



(9-19) 円周 k に関する，円周と直線の反転 $a \to a'$

(『定規とコンパスで挑む数学』　大野栄一著　講談社)

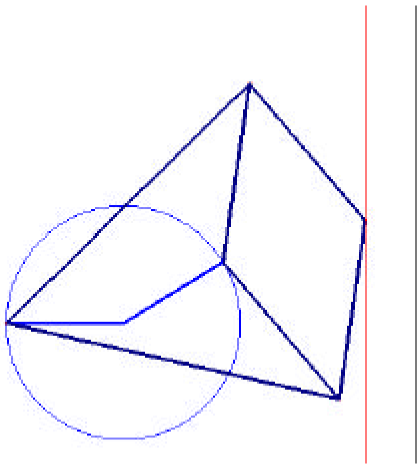
参考

１０．Peaucellier の反転機（inversor）

①直線を描く反転機

このリンケージは２本の長い長さの等しい棒と４本の短い長さの等しい棒と１本の棒からできている．

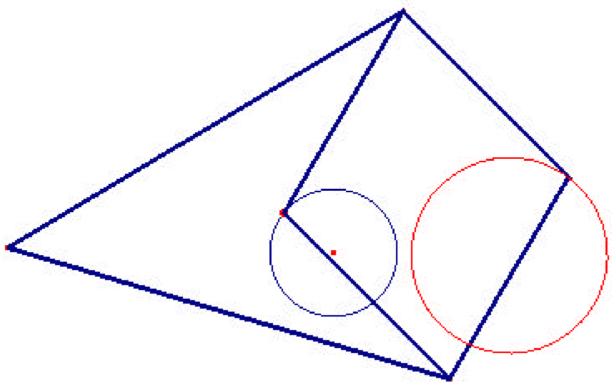
（構造）



②円を描く反転機

このリンケージは２本の長い棒と４本の短い棒からできている．
長い２本は O を支点に固定されている．

（構造）

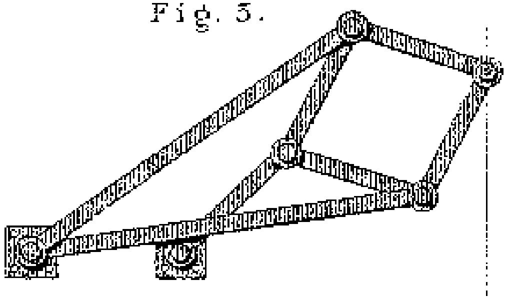


１１．反転機についての文献（「HOW TO DRAW A STRAIGHT LINE」A．B．KEMPE 著）

We have failed then with three links, and we must go on to the next case, a five-link motion—for you will observe that we must have an odd number of links if we want an apparatus describing definite curves. Can we solve the problem with five? Well, we can; but this was not the first accurate parallel motion discovered, and we must give the first inventor his due (although he did not find the simplest way) and proceed in strict chronological order.

In 1864, eighty years after Watt's discovery, the problem was first solved by M. Peaucellier, an officer of Engineers

Fig. 5.



in the French army. His discovery was not at first estimated at its true value, fell almost into oblivion, and was rediscovered by a Russian student named Lipkin, who got a substantial reward from the Russian Government for his supposed originality. However, M. Peaucellier's merit has at last been recognized, and he has been awarded the great mechanical prize of the Institute of France, the "Prix Montyon."

M. Peaucellier's apparatus is shown in Fig. 5. It has, as you see, seven pieces or links. There are first of all

two long links of equal length. These are both pivoted at the same fixed point; their other extremities are pivoted to opposite angles of a rhombus composed of four equal shorter links. The portion of the apparatus I have thus far described, considered apart from the fixed base, is a linkage termed a "Peaucellier cell." We then take an *extra* link, and pivot it to a fixed point whose distance from the first fixed point, that to which the cell is pivoted, is the same as the length of the extra link; the other end of the extra link is then pivoted to one of the free angles of the rhombus; the other free angle of the rhombus has a pencil at its pivot. That pencil will accurately describe a straight line.

I must now indulge in a little simple geometry. It is absolutely necessary that I should do so in order that you may understand the principle of our apparatus.

In Fig. 6, $Q\ C$ is the extra link pivoted to the fixed point Q, the other pivot on it C, describing the circle $O\ C\ R$. The straight lines $P\ M$ and $P'\ M'$ are supposed to be perpendicular to $M\ R\ Q\ O\ M'$.

Now the angle $O\ C\ R$, being the angle in a semicircle, is a right angle. Therefore the triangles $O\ C\ R$, $O\ M\ P$ are similar. Therefore,

$$O\ C : O\ R :: O\ M : O\ P,$$

Therefore,

$$OC \cdot OP = OM \cdot OR,$$

wherever C may be on the circle. That is, since $O\ M$ and $O\ R$ are both constant, if while C moves in a circle P moves

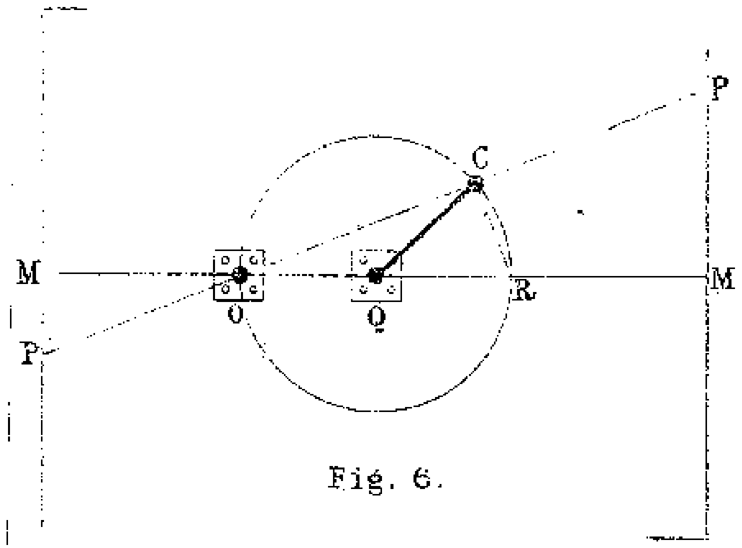


Fig. 6.

so that O, C, P are always in the same straight line, and so that $OC{\cdot}OP$ is always constant; then P will describe the straight line $P\,M$ perpendicular to the line $O\,Q$.

It is also clear that if we take the point P' on the other side of O, and if $OC{\cdot}OP'$ is constant P' will describe the straight line $P'M'$. This will be seen presently to be important.

Now, turning to Fig. 7, which is a skeleton drawing of the Peaucellier cell, we see that from the symmetry of the construction of the cell, O, C, P, all lie in the same straigh line, and if the straight line $A\,n$ be drawn perpendicular to $C\,P$—it must still be an imaginary one, as we have not proved yet that our apparatus does draw a straight line —Cn is equal to nP.

Now,

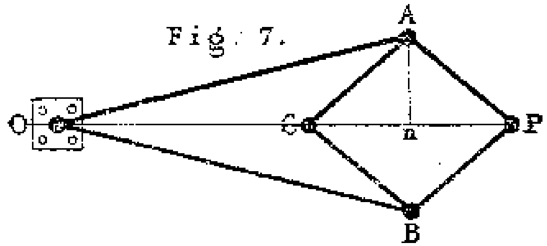
$$O\,A^2 = On^2 + An^2$$
$$A\,P^2 = Pn^2 + An^2$$

therefore,

$$\begin{aligned} O\,A^2 - A\,P^2 &= On^2 - Pn^2 \\ &= [On - Pn][On + Pn] \\ &= OC{\cdot}OP. \end{aligned}$$

Thus since $O\,A$ and $A\,P$ are both constant $OC{\cdot}OP$ is always constant, however far or near C and P may be to O. If then the pivot O be fixed to the point O in Fig. 6, and the pivot C be made to describe the circle in the figure by being pivoted to the end of the extra link, the pivot P will

Fig. 7.



satisfy all the conditions necessary to make it move in a straight line, and if a pencil be fixed at P it will draw a straight line. The distance of the line from the fixed pivots will of course depend on the magnitude of the quantity $OA^2 - OP^2$ which may be varied at pleasure.

I hope you clearly understand the two elements composing the apparatus, the extra link and the cell, and the part each plays, as I now wish to describe to you some modifications of the cell. The extra link will remain the same as before, and it is only the cell which will undergo alteration.

If I take the two linkages in Fig. 8, which are known as the "kite" and the "spear-head," and place one on the other so that the long links of the one coincide with those of the other, and then amalgamate the coincident long links together, we shall get the original cell of Figs. 5 and 7. If then we keep the angles between the long links, or

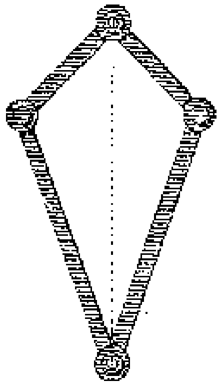
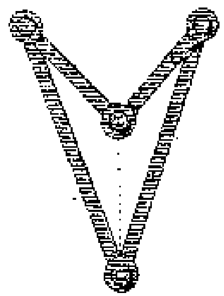


Fig. 8.



that between the short links, the same in the "kite" and "spear-head," we see that the height of the "kite" multiplied by that of the "spear-head" is constant.

Let us now, instead of amalgamating the long links of the two linkages, amalgamate the short ones. We then get the linkage of Fig. 9; and if the pivot where the short links meet is fixed, and one of the other free pivots be made to move in the circle of Fig. 6 by the extra link, the other will describe, not the straight line $P M$, but the straight line $P' M'$. In this form, which is a very compact

one, the motion has been applied in a beautiful manner to the air engines which are employed to ventilate the

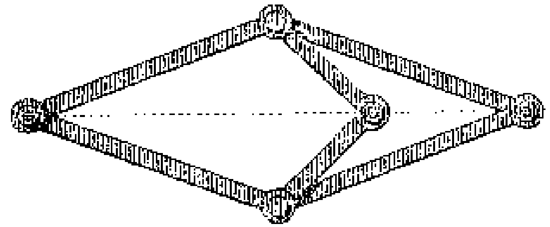


Fig. 9.

Houses of Parliament. The ease of working and absence of friction and noise is very remarkable. The engines were constructed and the Peaucellier apparatus adapted to them by Mr. Prim, the engineer to the Houses, by whose courtesy I have been enabled to see them, and I can assure you that they are well worth a visit.

Another modification of the cell is shown in Fig. 10. If instead of employing a "kite" and "spear-head" of the

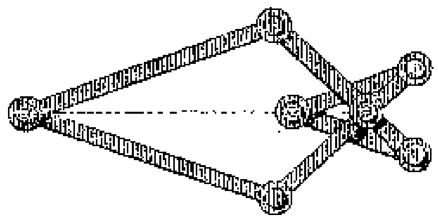


Fig. 10.

same dimensions, I take the same "kite" as before, but use a "spear-head" of half the size of the former one,

１２．日本語訳

How to draw a straight line

1864 年に、Watt の発見後 80 年、その問題はフランス陸軍の将校である M. Peaucellier によって解決された。彼の発見はその本当の価値に対して最初評価されず、ほとんど世間から忘れられた。そして Lipkin という名のロシアの学生（彼はその期待された独創性に対してロシア政府から報酬を得た）によって再発見された。しかしながら、M. Peaucellier のメリットはついに認められ、“ Prix Montyon ” というフランスの学会の偉大な機械学の賞を与えられた。

M. Peaucellier の器械は図 5 に示されている。それには、あなたが見るように、7 つの部品すなわちリンクがある。最初に共に長さの等しい２つの長いリンクがある。これらは両方とも同じ固定点で軸につけられる；それらの他方の先端は、4 つの等しい短いリンクで構成されるひし形の反対側の角で軸につけられる。私がこのように以前に記述した器械の部分は、固定された基盤から離れてとらわれるが、“ Peaucellier cell ” と名づけられたリンケージである。私たちはそれから、追加のリンクをする。そしてそれを固定点（最初の固定点からの距離が追加のリンクの長さと同じで、それに対してセルが回転される）に対して回転させる；残った追加のリンクの先端はそのときひし形の自由な角の一つに回転軸をつけられる；残ったひし形の自由な角にはその回転軸で鉛筆がある。その鉛筆は正確に直線を描くだろう。

私は今、少し簡単な幾何学を与えなければならない。あなたが我々の器械の原理を理解できるように私がそのようなことをすべきであるのは絶対に必要である。

図 6 で、QC は固定点 Q に回転軸をつけられ、他方がそれを軸に C で回転ずる追加のリンクである。そして円 OCR を描く。直線 PM と直線 P’M’は MRQOM’に垂直であると考えられる。

今、角 OCR（半円上の角）は直角である。ゆえに三角形 OCR、三角形 OMP は相似である。ゆえに、

$$OC : OR = OM : OP$$

ゆえに、

$$OC \cdot OP = OM \cdot OR$$

ここで C はいつでも円上にある。すなわち、OM と OR はともに定数であるので、もし C が円上で動く間 P が O、C、P がいつも同じ直線上にあるように動きかつ、OC・OP がいつも定数であるように動いたら；P は線分 OQ に垂直な直線 PM を描くだろう。

もし我々が O の反対側に点 P’をとり、OC・OP’が定数ならば P’が直線 P’M’を描くだろうということも明らかである。このことはやがて重要であるとみなされるだろう。

今、図 7 にいくと、我々はセルの構造の対称から、O、C、P がすべて同じ直線上にあり、もし直線 An が CP に垂直に描かれたら Cn は nP に等しいことがわかる。

今、

$$OA^2 = On^2 + An^2$$
$$AP^2 = Pn^2 + An^2$$

ゆえに、

$$\begin{aligned} OA^2 - AP^2 &= On^2 - Pn^2 \\ &= (On - Pn) \cdot (On + Pn) \\ &= OC \cdot OP \end{aligned}$$

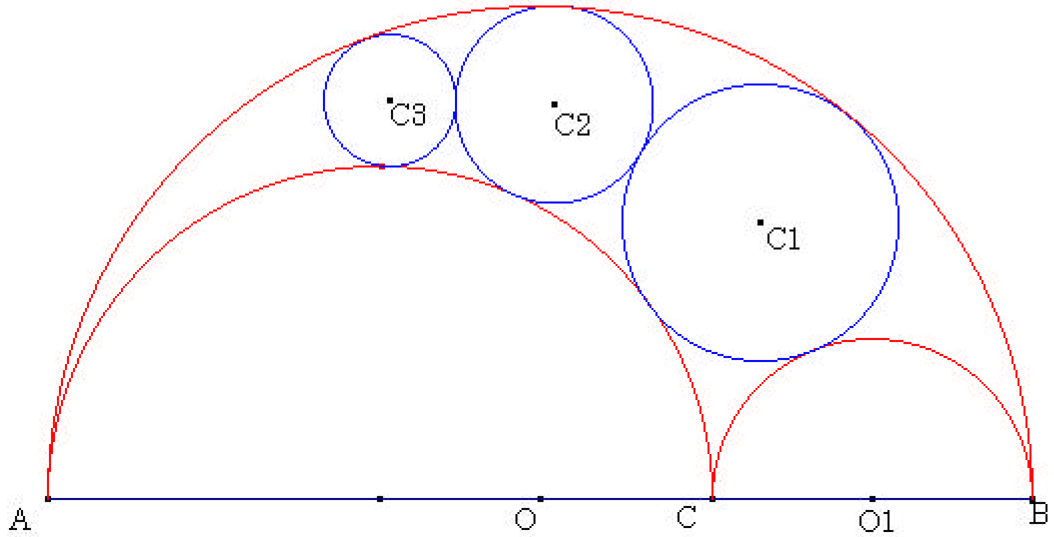
従って、OA と AP は共に定数であるので OC・OP はいつも定数である。しかしながら、遠くか近くで C と P は O の方にあるかもしれない。もしそのとき、回転軸 O が図 6 おいて点 O で固定され、回転軸 C が、追加のリンクの先端で回転することによって、図で円を描くように作られたら、回転軸 P は直線上で P が動くようにさせるの必要なすべての条件を満たすだろう。そしてもし鉛筆が P で固定されたら、それは直線を描くだろう。

固定された回転軸からの線分の長さはもちろん量 $OA^2 - AP^2$（勝手に値を取るかもしれない）の大きさに依存する。

私が今あなたにセルのいくつかの修正を記述してもらいたいように、私はあなたがその器械を構成する２つの要素、追加のリンクとセル、それぞれが動く部分 をはっきりと理解することを望む。追加のリンクは依然と同じままであるだろう。そしてそれは lteration を経験するセルだけだろう。

１３．演習問題

アルベロスに内接する円を実際にカブリを使い反転して、その図から実際に円 C3 の直径とその中心の線分 AC からの距離をはかって，それがパッポスの主張にあっていることを確かめてみよう．



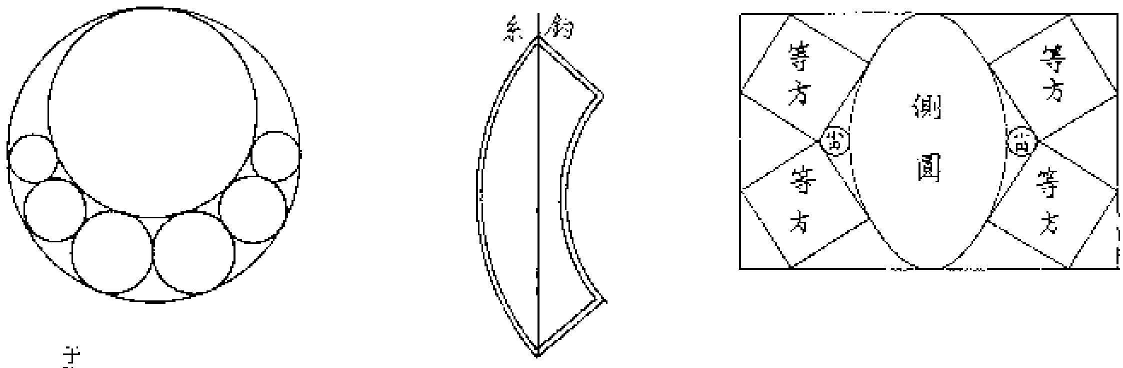
14．日本における円環問題

$\boxed{\text{参考}}$　**日本においてもパッポスの円環問題に似た問題が考えられてきた。**

（埼玉県史料集　第二集「埼玉の算額」　埼玉県立図書館編）

算額とは，神社や仏閣に奉納した数学の絵馬である．江戸時代中期，寛文年間の頃から始まった風習といわれ，現在全国に約 820 面の算額が現存しています．　算額は，数学の問題が解けたことを神仏に感謝し，益々勉学に励むことを祈願して奉納されたと思われます．人の集まる神社仏閣を発表の場とし，難問や問題だけを書いて解答を付けないで奉納するものも現われ，その問題を見て解答を算額にしてまた奉納するといったことが行われました．算額奉納の習慣は世界に例を見ず，日本独自の文化であり，明治になり洋算の導入を容易にしたのも算額を奉納する風習が貢献しました．

（「和算の館」より　http://www.asahi-net.or.jp/~NJ7H-KTR/　）



四六　川越市山田府川一五三八　八幡神社

関流[illegible]田新三郎[illegible]門人

●今有如圖等側圓容等方

面四個小圓二個直径若干[illegible]

平若干短径若干問得等方面

及圓径術如何

答曰如左術

術曰[illegible]長[illegible]以短径

除之自之以減一個餘以一

乗方開之名甲以減[illegible]和除半

平方開之名乙[illegible]得方面别

以[illegible]除之[illegible]一個[illegible]

平加短径以減長餘以長除之

得圓径合問

●今有如圖扇紙形欲使中心點

釣之擺平大小径各若干紙径若干問

距紙術如何

答曰如左術

術曰以大小径差除[illegible]圓径

以一個[illegible]

[illegible]以大小[illegible]和除之加大径因

[illegible]三除以減大径半乗[illegible]圓径得

距紙合問

●今有如圖圓内容累圓及累圓

乃不動[illegible]六個　其外圓径若干問[illegible]容圓

[illegible]得至[illegible]圓径術如何

答曰如左術

術曰以容圓数除外圓径得[illegible]

此圓径合問

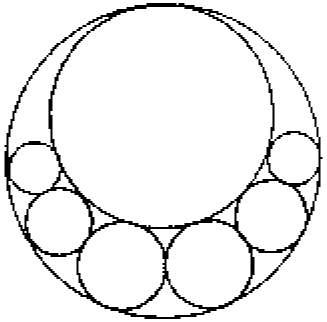
于時安政三丙辰春三月

（下に六十三名の門人名を記す）

八七

算額番号46　第３問

今有如図円内容源円及累円（源円不動累円随所畫六個）其外円径若干問随容円数得至大止円径術如何



答曰如左術

術曰以容円数除外円径得至大止円径合問

（問題答術の読み方）

今図の如く円内に源円及累円（すなわち，随に容りて動かず，仮りに六個を画く。）を容る。其の外円径若干，問う容円数に随って至大止円径を得るの術如何と。

答に曰く左術の如し。

術に曰く容円数を以て外円径を除すれば至大止円径を得て問に合す。

（問題及び術の現代的解釈）

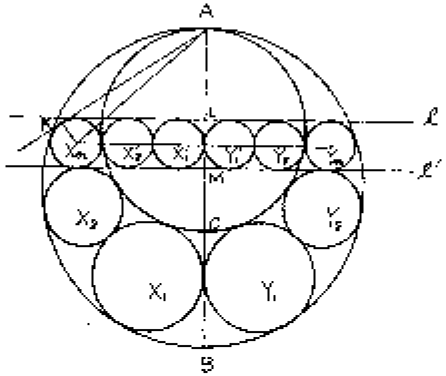
今図の如く外円に源円を内接させ両円に接し互に接する累円を入れる。仮りに六個を画く。外円径を与えたとき，止円径の最大値を容円数に従って求める方法を問う。

術　　　止円径の最大値＝外円径÷容円数

（現代的解法）　累円数を n とする。（n は偶数 $2m$）

外円と源円との接点Aを通る両円の直径をAB，ACとする。

累円の中心を図の如く X_1，X_2……X_m 及び Y_1，Y_2……Y_m とす止円 X_m，Y_m に接する２直線 ℓ，ℓ' をひき直径ABとの交点をL，Mとし，LMの中点をNとする。



累円は直径ABに対して対称に配置されているから，円 X_m と円 Y_m は等円で ℓ，ℓ' は共にABに垂直となる。

Aより止円 X_m に引いた接線をAKとする。

$AB=a$，$AC=t$，$AK=k$ とする。

今Aを中心とし k^2 を率として全部の円に反形変換を施す。（すなわち各円周上の一点QとAを結び，AQ又はその延長上にPをとり，$AP\cdot AQ=k^2$ とする。Qを各円周上に移動かしてPのえがく軌跡を作る。）

この変換によって円 X_m，Y_m はそれ自身に，外円は直線 ℓ に，源円は直線 ℓ' に，累円 X_1，X_2…；Y_1，Y_2……はそれぞれ円 X_1'，X_2'…；及び円 Y_1' Y_2'…に変換され，円 X_1' X_2'…X_m 及び円 Y_1'，Y_2'…Y_m はみな ℓ，ℓ' に接しかつ互に相接する等円である。

$AL=\dfrac{k^2}{a}$，$AM=\dfrac{k^2}{a}$，円 X_m，円 Y_m の直径を $2r$ とすると

$$2r=ML=\frac{k^2}{t}-\frac{k^2}{a}=k^2\left(\frac{1}{t}-\frac{1}{a}\right)\quad\therefore r=\frac{k^2}{2}\left(\frac{1}{t}-\frac{1}{a}\right)$$

直角三角形 AKX_m において　$AX_m^2=k^2+r^2$

$X_mN=(n-1)r$，　　$AN=\dfrac{k^2}{a}+r$

直角三角形　AX_nN より　$AX_n^2=X_nN^2+AN^2$

故に　$\left(\frac{k^2}{a}+r\right)^2+(n-1)^2r^2=k^2+r^2$

これより　$k\neq 0$ だから

$$k^2=\frac{1}{\frac{(n-1)^2}{4}\left(\frac{1}{t}-\frac{1}{a}\right)^2+\frac{1}{a}\left(\frac{1}{t}-\frac{1}{a}\right)+\frac{1}{a^2}}$$

よって　$2r=\dfrac{\frac{1}{t}-\frac{1}{a}}{\frac{(n-1)^2}{4}\left(\frac{1}{t}-\frac{1}{a}\right)^2+\frac{1}{a}\left(\frac{1}{t}-\frac{1}{a}\right)+\frac{1}{a^2}}$

今　$\frac{1}{t}-\frac{1}{a}=x$ とおけば $x>0$　$2r$ を $f(x)$ とおくと

$$f(x)=\frac{x}{\frac{(n-1)^2}{4}x^2+\frac{1}{a}x+\frac{1}{a^2}}$$

$$f'(x)=\frac{1}{\left\{\frac{(n-1)^2}{4}x^2+\frac{1}{a}x+\frac{1}{a^2}\right\}^2}\times\left\{\frac{1}{a^2}-\frac{(n-1)^2}{4}x^2\right\}$$

$f'(x)=0$ を満足する x の値は　$x=\frac{2}{a(n-1)}$

x	……	$\frac{2}{a(n-1)}$	……
$f'(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$	↗	極大	↘

よって　$x=\frac{2}{a(n-1)}$ のとき　$f(x)$　すなわち止円の直径は最大となる。

よって　止円の直径の最大値 $=2r=f\left(\frac{2}{a(n-1)}\right)$

$$=\frac{\frac{2}{a(n-1)}}{\frac{(n-1)^2}{4}\times\frac{4}{a^2(n-1)^2}+\frac{1}{a}\times\frac{2}{a(n-1)}+\frac{1}{a^2}}$$

$$=\frac{2}{a(n-1)}\times\frac{a^2(n-1)}{2n}$$

$$=\frac{a}{n}$$

よって止円の直径の最大値＝外円径：累円の個数

幕末の歴遊算家　法道寺和十郎はその著「観新考算変」においてこれに類した多くの問題を解決している。この問題はその書物に誌るされて居り，この額を掲げた戸田新三郎は法導寺と関係があるものと考えられる。

アンケート１

２年　　組　　番

いずれかを○で囲んでください

１　数学の時間に外国語の文献を読むことは
　　必要である　　どちらともいえない　　必要ではない

２　数学を歴史的な視点でとらえたことは
　　ある　　どちらともいえない　　ない

３　パッポスが円環問題を拡張したことは、数学において
　　意味のあること　　どちらともいえない　　意味のないこと

質問・感想等自由に書いてください

御協力ありがとうございました

筑波大学大学院修士課程教育研究科
保坂高志　竹谷正　野口敬子

アンケート２

２年　　組　　番

いずれかを○で囲んでください

１　反転の作図をする上で、事前課題をやったことは
役に立った　　どちらともいえない　　役に立たなかった

２　作図ツール(カブリ)を使うことで、反転について
よく理解できた　　理解できた　　どちらともいえない
理解できなかった　　ほとんど理解できなかった

３　過去に作られた反転機の構造を考えることは、数学と
関係がある　　どちらともいえない　　関係がない

質問・感想等自由に書いてください

御協力ありがとうございました
筑波大学大学院修士課程教育研究科
保坂高志　竹谷正　野口敬子

アンケート３

２年　　組　　番

１　　パッポスが円環問題を拡張したように、今後円環問題は

発展するだろう　　どちらともいえない　　発展しないだろう

２　　数学を歴史的に捉えることは

必要である　　　どちらともいえない　　必要ではない

３　　このような授業を受けることによって、あなた自身何か変わったことがあったら書いてください

４　　あなたの数学に対するイメージを書いてください

質問・感想等自由に書いてください

御協力ありがとうございました

筑波大学大学院修士課程教育研究科
保坂高志　竹谷正　野口敬子