

九点円を生徒が発見する授業に関する一考察

数学史とコンピュータを利用して

筑波大学大学院修士課程教育研究科

竹谷 正

章構成

1 はじめに

要約

2 研究の目的・方法

3 教材について

4 授業内容

授業概要 三角形のこころのふしぎの探求

作図ツールの理解 (1時間目)

9点円の発見とその歴史 (2, 3時間目)

5 結果と考察

6 おわりに

参考文献

「数学基礎」で導入される数学史は生徒の数学嫌いの歯止めとなりうるか。本研究では、9点円とその発見史を教材とし、コンピュータを用いて、生徒に発見体験させた上で歴史的過程に触れることにより生徒の数学に対する考え方の変容を探った。結果、数学に対する興味・関心が深まり、数学は暗記中心であるなどの従来の考えからの変容を見出すことができた。またコンピュータ利用は、その便利さの中に当時の発見の凄さを見出した生徒も多かった。

1 はじめに

2000年12月、1999年に行われた国際教育到達度評価学会の「国際数学・理科教育調査」によると、日本の中学生は数学や理科のテストの成績は上位であるが、勉強が好きだと答える割合は最低レベルにあると報じられた¹。この記事によると、数学が「大嫌い」「嫌い」とする生徒は、前回(1995)の調査より5ポイント増えて52%になり、半数を超えたという。また、生徒の高等学校入学時の学力格差も拡大しており、高等学校で2003年度から導入される「数学基礎」もこれらへの対応の1つである。

特に「数学基礎」の(1)数学と人間との活動においては、数学における概念の形成や原理・法則の認識の過程と人間や文化のかかわりを中心として、数学史的な話題を取り上げるとされている^{2,3}。数学史を用いることによって、数学者の営みに触れ、数学を文化としてとらえることにより、生徒が数学をより身近なものとして認識し、興味・関心を高めることができれば、生徒の理数離れの歯止めの1つとなりうるのではないだろうか。

そこで、本研究では、9点円とその発見・発展過程を教材とし、その発見の過程の類似体験した上で、歴史的過程に触れることによって、生徒の数学に対する考え方の変化を探るものとする。9点円は、数学A「平面幾何」で扱われる三角形の五心と密接な関係があり一部教科書では扱われている⁴。その際、9点円とその諸性質の証明及びそれらの歴史に関しては、恩田(1998)⁵が指摘するように一次文献を資料として用いることにする。また吉田(1985)⁶は中学3年生に対して12時間かけ、9点円の定理について多様な角度から考察を行っている。本研究では授業時間の制約から、それらの考察のために、Cabri Geometry (以下カブリ)を用いることにする。なお、カブリに関しては、筑波大学数学教育学研究室⁷において多くの研究がなされている。

2 研究の目的・方法

目的 数学的事実が発見・発展される歴史的過程について、体験活動を通して触れることにより、生徒の数学観の変容を探る

この目的のために次の課題を設定する。

課題 生徒の発見活動が、9点円のもつ性質や三角形や円のもつ不思議さの認識につながったか。

課題 生徒の発見活動及び9点円の発見・発展の歴史に触れたことが、生徒の数学観に変容をもたらしたか。

なお、生徒の数学観の変容については、授業の前後の調査をもとに、課題及びによって達せられたかにより考察する。

3 教材について

9点円は、三角形の3辺の中点、垂心と3頂点を結ぶ線分の中点、3本の垂線の足の9点を通る円であり、別名でフォイエルバッハの円とも呼ばれ、フォイエルバッハの定理など、様々な美しい性質がある。カジョリ『初等数学史』^{8, 9}によると、9点円を発見したのはオイラーとされているが、オイラー1人による発見ではなく、幾人かの人々が独立に発見したものであるとされており、その後も多くの数学者の考察の対象となっている。そこで、本研究では9点円を持つ性質を生徒に発見させる活動を行い、それをもとに多くの数学者の考察の対象となったことを、文献を通して触れることにより、当時の数学者の在り方について触れるようにした。その際、歴史的な流れは、生徒による9点円の性質の発見活動の後に行った。

なお、本研究では一次文献として、Smith『A Source Book in Mathematics』¹⁰を用いた。また、9点円の探求に際し扱われる三角形の五心は、数学A「平面図形」の中で扱われている。

4 授業内容

(1)指導目標 9点円の諸性質を、カブリ を用いて発見的に学習する。9点円の発見をめぐる歴史的な流れを理解する。

(2)対象 学校法人茗溪学園中学校高等学校 中学校 3年生 1クラス45人

(3)時間数 3時間

(4)既習事項 中学校の内容は既習。数学A「数と式」、数学「二次関数」および「図形と計量」は既習。数学A「平面図形」は未習(履修しない)である。

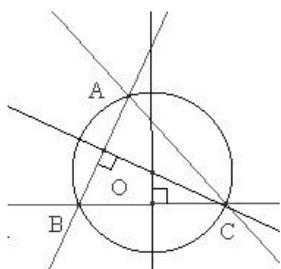
(5)準備物 ワークシート、資料(一次文献を含む)、FD、事前・事後調査

(6)授業概要 「三角形のこころのふしぎの探求」

作図ツールの理解(1時間目)

三角形の外接円・内接円を作図ツールを用いて描く

*生徒はカブリ の使用は初めてであり、その使い方についての理解をすすめた。

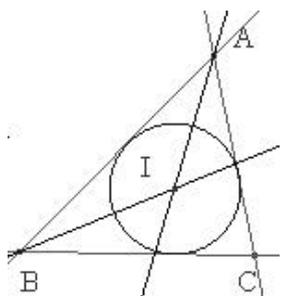


三角形の外接円

三角形の外接円の描き方を考える。

・コンパスと定木のみを用いて与えられた三角形の外接円を作図する方法を考える。

作図の方法がわかったら、カブリ を用いて作図する。



三角形の内接円

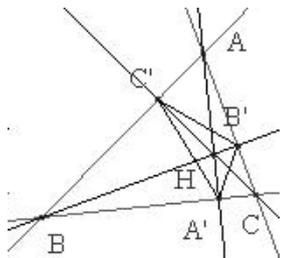
三角形の内接円の描き方を考える。

・カブリ の画面上の三角形を見ながら作図する。

・三角形を変形し、どんな三角形でも内接していることを確かめる。

9点円の発見(2・3時間目)

垂足三角形に着目し、9点円の性質を発見する。



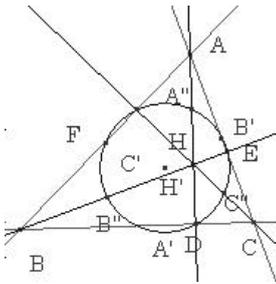
三角形の垂心と

垂足三角形

ユークリッド『原論』により、三角形の外接円・内接円の歴史にふれる。

三角形の重心・垂心・垂足三角形を導入する。

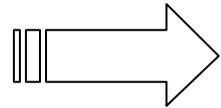
・外心・内心との関連性(3つの直線の交点となる)に着目させた上で導入した。



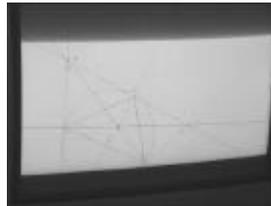
9点円の定理



の活動の様子



左



上の図の点Aを動かして変形して

いる

垂足三角形の外接円 (9点円) の性質を発見する。
 ・FDにすでに作図してある9点円の図を、三角形ABCの頂点を動かすことにより変形して、一般的な三角形において、以下の9点円の定理が成り立つことを発見する。

9点円の定理 三角形の3辺の midpoint, 垂心と3頂点を結ぶ線分の midpoint, 3本の垂線の足は同一円周上にある。



ブリアンション・ポンスレー
 による証明 (Smith)

・9点円の定理のブリアンションとポンスレーによる証明 (原典・Smith 前出) を読む。

三角形の外心・内心・重心・垂心・9点円の中心の相互関係を発見する。

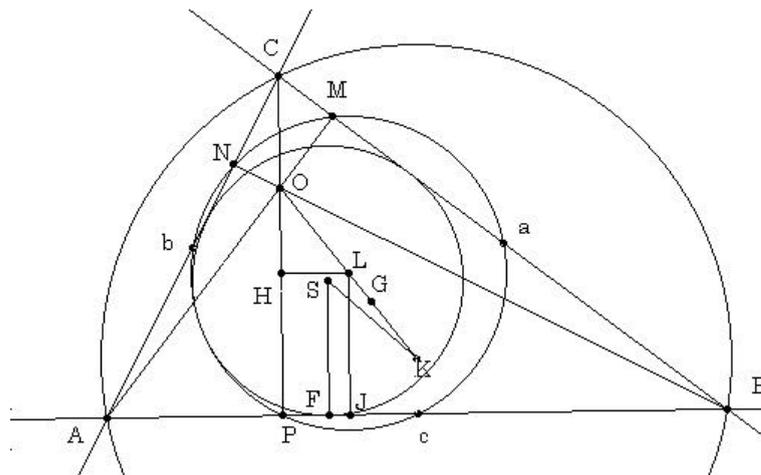


変形すると



正三角形の場合すべて
 一致することがわかる

・FDにすでに作図してある図を、三角形ABCの頂点を動かすことにより変形して、一般的な三角形において、これらの点の関係を発見する。



フォイエルバッハの定理



フォイエルバッハによる
 証明 (Smith)

フォイエルバッハの定理とその証明 (原典・Smith 前出) を読む。
 ・内容を深追いするのではなく、で発見した諸性質を証明しつつ、フォイエルバッハの定理の証明がなされていることに着目し、9点円をフォイエルバッハの円ともいうことにふれる。



カジヨリ A History of
Mathematics 5ed

9点円発見の歴史(カジヨリ『初等数学史』)を読む。

・多くの数学者の考察の対象となり、何度も再発見された点に着目させる。

まとめ(生徒の考察)

問1 過去の数学者はどのようにして9点円についての研究をしたと思うか。

問2 9点円やそれに関するいくつかの性質を再発見したが、それらを再発見したことに対してどう思うか。

なお、授業を進めるにあたり以下の点に留意した。

・生徒の回答・感想に直接影響を与える発言をしない

・9点円の諸性質を生徒に発見させ、その後歴史的流れを示すという過程を取った。

5 結果 考察

の問および事前・事後調査の結果を基に、課題の考察をする。

(1) 課題 「生徒の発見活動が、9点円のもつ性質や三角形や円のもつ不思議さの認識につながったか。」

問1の回答に、当時の数学者の視点を通して、図形のもつ不思議さの認識に関する回答が見られた。

・三角形に隠された性質が不思議で興味深いことであったため。三角形にはいろいろな性質が会ったため、それを発見して、有名になりたかった。どうして思ったか？僕自身が、三角形の性質というものが不思議で興味深いものだと思ったから。

・三角形や円には、まだまだ未知なものがたくさんあります。だから、それを、少しでも解明するために、円の研究をはじめ、9点円に結びつけたのだと思います。

・円や三角形が面白くて、不思議だと思ったから。昔の人は研究したのだと思う。かたちがめずらしくったのかなあ。

・調べれば調べるほど、たくさんいろんな発見があったの嬉しいし、おもしろいし、注目もよけるから。

・数学というと数字と図形なので三角形の性質はいろんな不思議なことがかかされているので、9点円の性質は調べれば調べるほどわかってくると思う(たぶんまだいろいろあると思うが。)また三角形からいろいろするのに考える参考書のようなものになるからだと思った。

問1では、当時の数学者はどのようにして研究したのかという問にしたが、生徒が図形のもつ不思議さを認識していない限り、このような回答は出ないであろう。なお、授業のはじめに三角形や円の性質についての知識を調査したところ、今回の内容との関連では、三角形の重心を挙げた生徒が1名だけで、9点

円やその性質に関して回答した生徒はいなかった。また、問2では、カブリを発見活動の手段として用いたが、

・昔の人はパソコンも何も使わずにこのことを発見したことはすごいと思う。

・昔の人は、コンピュータなどを持っていないし、なかったから、自分たちでは簡単に思ったけど、当時の人たちは紙とかでやったと思うので、とても苦労したなと思った。

・神秘的。でも昔の人はどうやって発見したのだろうと思った。パソコンがないと、絶対にできないと思った。数学は奥が深いものだなと思った。

など、自らの体験に基づき、当時の数学者の発見の大変さも見出している。以上のことは、次の生徒の問2に対する回答に見ることができる。

・今まで、私はこのような性質があったなんて、知りませんでした。昔の人はパソコンがないのに、発見することができたなんて、そうとう頭のいい人たちなんだと思った。発見したときの楽しさを知ることができました。

以上のことから、生徒は発見活動に基づいて図形の持つ不思議さの認識をしていると考えられる。よって、課題は達せられたと考える。

(2) 課題 生徒の発見活動及び9点円の発見・発展の歴史に触れたことが、生徒の数学観に変容をもたらしたか。」について

問2の回答として、図形に対する興味や関心の高まりのほかに、数学の歴史を通して、数学のおもしろさを捉えなおしたり、数学の発見のよさを感じている。また、コンピュータを利用したことによって、当時のなされた発見の凄さを感じた生徒も多かった。

・図にかくとわからないことがコンピュータだと一瞬にして図形が動くのが面白かった。ただの3つの点や線の組み合わせだけで9点の性質のような不思議な性質ができていなんですごいと思った。今回の発見のように今、私たちがあたりまえのように使っている定理を昔の人たちは長い時間をかけて発見している、と思うと"数学"というものも歴史があるのだな - と思う

・いろんな数学者の研究を振り返ることによって、9点円の意味、その不思議さを知り、数学のおもしろさを改めて考えさせられたと思う

・円やいろいろな図形について私は今まで教えられて知ってきましたが、今回の授業で自ら発見することは気持ちいいことだなあーと思いました。数学者の人たちはこれを目指にがんばったのかなあーと感じました。

事後調査の以下の質問に関しては、数学を自ら発見することによってそのよさを感じた生徒や、数学 = 暗記というイメージからの脱却が図れた生徒もいた。また、それらの理由として、コンピュータを用いて実際に動かしてみたからという生徒も多かった。

質問 この授業を通してあなたが変わったと思う点を自由に書いてください。(理由も書いてください)

・前までは、シャーペンとか握ってやるのが数学で、誰かが説明して理解していくのが数

学だと思っていたけど、この授業を受けて、自分でやって自分で理解できる数学っていうのもあることを知った。

・数学を勉強することに関して意欲が深まった。・理由いろいろな人が「発見」といっているため、自分もそういう発見をしてみたいと思ったから。

・「発見することの楽しさ」を知ることができた。同時にその難しさも知ることができた。・理由この授業でいろいろ発見させてくれたので。

・今まで性質などを丸暗記していて、あまり自分でどうしてこうなるのかをあまり自分で考えていなかった。でも、それが少し出来るようになった気がする。・理由三角形を自分で動かして性質を見つけたりしたから。

また、数学の発見に関して、「数学はどんな学問だと思いますか」という問いを授業の前後ですたところ、以下のように、数学を発見するものと捉えている生徒が増えている。

| 事前調査 (複数回答・上位) | 事後調査 (複数回答・上位) |
|----------------|----------------|
| 難しい……………10 | 発見する学問 ……10 |
| わからない……………7 | 難しい……………4 |
| めんどくさい……………5 | 楽しい……………3 |

以上のことから、生徒には自らの発見活動及び9点円の発見・発展の流れを通して、数学観の変容が見られている。よって、課題2は達せられたと考える。

(3)考察

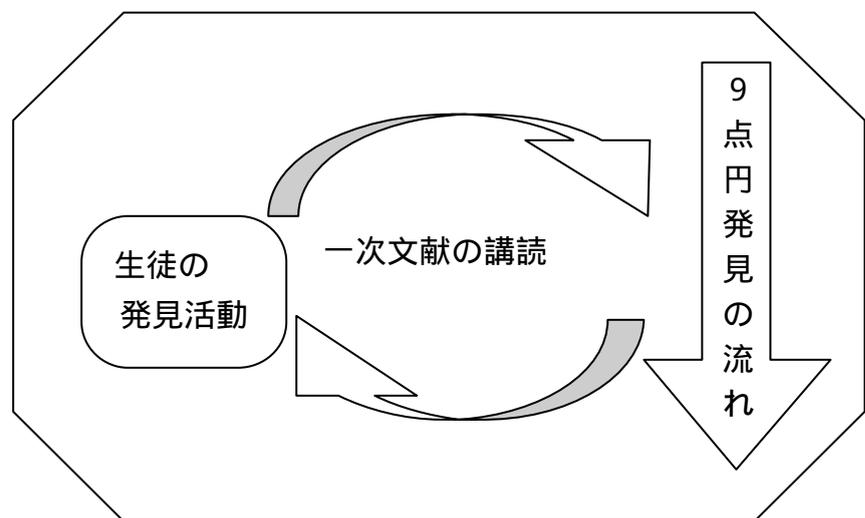
問1において、図形の性質に関する回答は、予想された範囲の回答であった。本研究では、その性質の探求にあたっては、カブリを用いたが、高島(2000)¹⁾は、数学史教材に対するコンピュータの役割として、時間・内容的に再現が困難な場合のコンピュータ活用により理解に必要な時間の短縮ができると指摘している。吉田の研究では、9点円の定理の探求で12時間かかっているが、本研究のカブリを用いた活動では、大幅に時間を短縮できた。一方で、9点円のもつ性質を発見することに焦点をあてたため、証明はSmithの文献のどこにあるかということに触れるにとどめた。吉田の研究では最終的に定理の証明がなされており、生徒の「証明とかはできなかったので、本当に発見したとはいえないが、楽しかった。」との指摘もあった。問2の回答からはコンピュータを用いて容易に体験がなされたために、当時の数学者の発見のすごさがより強調されたと考えると、本研究のカブリの利用は生徒の図形の認識において妥当であったと考える。

この授業を進めるにあたっては、9点円の諸性質を生徒に発見させる活動のあとに、それらを一次文献(Smith)との対比させ、9点円発見の歴史的流れ(カジョリ『初等数学史』)を読むという方法をとった。これは、本研究で用いた一次文献(Smith)が、定理の発見者の簡単な紹介と定理の証明が主であり、歴史

にはほとんど触れられておらず、それを補完する必要があったためでもある。よって、不明確な当時の数学的・時代的背景や当時の数学者の考え方の話題をせず、生徒の回答・感想に直接影響を与えないよう留意した。このため、9点円の発見の活動と、その結果である歴史がうまく結びつくかが、この授業における問題点でもあったが、生徒の回答を見ると、一次文献 (Smith) が、体験と歴史の橋渡しの役割をうまく果たしたといえる。また、9点円発見の歴史的流れ (カジョリ『初等数学史』) を読んだことによって、

昔の人が調べていたから、本当にそうなのかという疑問が出てきて、自分でそれをちゃんと証明できるようにするため、いっぱいの人が研究した。(問1回答)

のように、数学者の数学に対するあり方についての一端までも考えさせることができたといえる。よって、この授業のような、生徒の活動を先行させたあとに数学史に触れる方法は、有効であったと考える。



6 おわりに

本研究では、数学的事実が発見・発展される歴史的過程について、体験活動を通して触れることにより、生徒の数学観の変容を探ることを目的とした。その結果、数学に対する興味・関心が深まる生徒や、数学が暗記中心であるなどのこれまでの考えからの転換が進む生徒など、変容を見出すことができた。また、体験活動のためにカブリを用いたが、その便利さの中に当時の発見の凄さを見出した生徒も多かった。一方、今回の授業では、当時の数学的・時代的背景や当時の数学者の考え方について直接話題にしなかったが、問1, 2については、当時の数学者の在り方などを、生徒の間で議論することにより、更なる変容の深化をはかることができたのではないかと考えられる。

謝辞

私立茗溪学園中学校高等学校の鈴木誠先生、島一史先生をはじめ、数学科の先生方には、研究授業の実践に際し、多大なるご協力をいただきました。ここに御礼申し上げます。

註) 本研究は、科学研究費、基盤研究 B(2)展開研究 (課題番号 10558032、研究代表者磯田正美)の一貫として行われた。

註) 授業の詳細並びに資料等は次に掲示している。

<http://130.158.186.11/mathedu/forAll/project/2000/index>

引用 参考文献

- 1 朝日新聞朝刊 (2000, 12, 6)
- 2 文部省 (1999) 高等学校学習指導要領解説 数学編 理数編 pp31- 34
- 3 吉田明史・飯高茂 (2000) 改訂高等学校学習指導要領の展開数学科編 明治図書 pp68- 83
- 4 永尾汎他 (1997) 改訂版高等学校数学 A 数研出版 pp128- 134, pp154
- 5 恩田洋一 (1998) 一次文献を利用した数学史教育に関する一考察～数学基礎に関連して～ 平成 10年度筑波大学大学院教育研究科修士論文 pp6- 13
- 6 吉田稔 (1985) 算数 数学教育実践講座第 12巻 ニチブン pp101- 122
- 7 筑波大学数学教育学研究室 (2000) 数学教育改革の推進とテクノロジーの利用の実証に関する研究～ミレニアム・プロジェクトに因って～ 中学校・高等学校数学科教育課程の開発に関する研究 (7) 等
- 8 小倉金之助補訳 (1960) カジヨリ初等数学史下近代 共立出版 pp392- 393
- 9 Florian Cajori(1991) A History of Mathematics 5ed Chelsea Publishing Company pp297-298
- 10 David Smith(1959) A Source Book in Mathematics Dover Publications pp337-345
- 11 高島由順 (2001) 高校数学における数学史に基づいた教材作成の視点 第 33回 数学教育論文発表会論文集 日本数学教育学会 pp83- 88

(上記以外の授業資料作成における参考文献)

- 中村幸四郎他訳 (1996) ユークリッド原論 - 縮刷版 - 共立出版 pp81- 83
- 岡部恒治訳 (1993) 数学を築いた天才たち (上・下) 講談社
- 矢野健太郎 (1967) モノグラフ数学史改訂版 科学新興新社
- 岩波数学辞典増訂版 岩波書店
- 銀林博訳 (1965) コクセター幾何学入門第 2版 明治図書 pp18- 19
- 数学セミナー編集部 数学 100の定理 日本評論社 pp12- 13