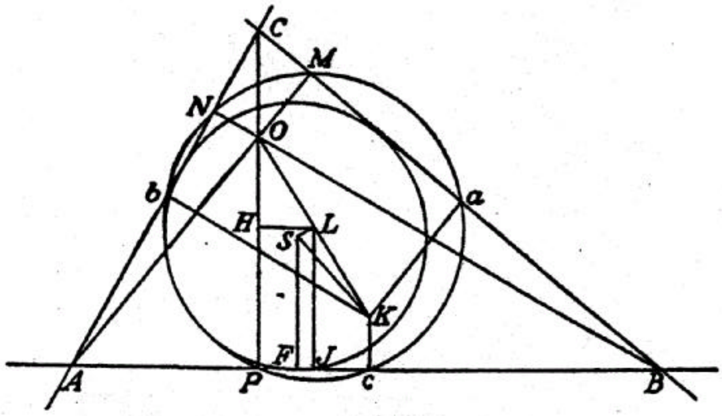
授業ノート(2000年12月4日～6日)

～三角形のこころのふしぎ～

担当　筑波大学大学院修士課程教育研究科　竹谷　正



3年Ｄ組　　番　氏名

もくじ

ギリシア文字

大文字	小文字	読み方	大文字	小文字	読み方	大文字	小文字	読み方
A	α	アルファ	I	ι	イオタ	P	ρ	ロー
B	β	ベータ	K	κ	カッパ	Σ	σ	シグマ
Γ	γ	ガンマ	Λ	λ	ラムダ	T	τ	タウ
Δ	δ	デルタ	M	μ	ミュー	Υ	υ	ユプシロン
E	ϵ	エプシロン	N	ν	ニュー	Φ	φ ϕ	ファイ
Z	ζ	ゼータ	Ξ	ξ	クシー	X	χ	カイ
H	η	エータ	O	o	オミクロン	Ψ	ψ ψ	プサイ
Θ	θ ϑ	シータ	Π	π	パイ	Ω	ω	オメガ

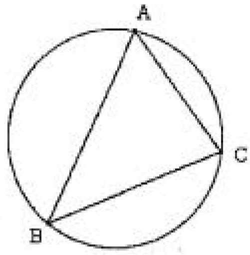
アルファ α　はじめに～三角形のこころのふしぎを探求しよう

◎1　みなさんが知っている三角形や円の性質について書き出してみよう。
（文章だけでなく、図なども使って描いてみよう）

β 三角形の外接円とその中心の関係

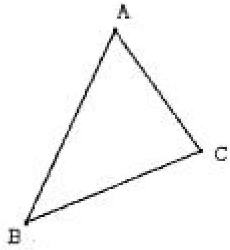
△ABC の3頂点 A，B，C を通る円Oを、△ABC の 外接円 という。この外接円の半径を R とすると、次の正弦定理が成り立つ。

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R$$



◎2 三角形の外接円を描いてみよう。

○ どのようにしたら描けるだろうか。考えてみよう。



☆ 三角形の外接円の中心を外心という。

○ パソコンを使って外接円を作図してみよう。

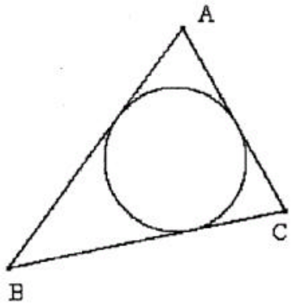
スタートメニューから Cabri Geometry Ⅱ を起動させる。

ファイル→開く→３．５インチFD→β 三角形の外接円を開く

まとめ2 三角形の外接円の中心（外心）は、

である。

ガンマー
$\boxed{\gamma}$ 三角形の内接円とその中心の関係

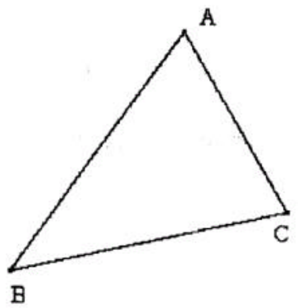


△ABC の3辺 a, b、c に接する円を、△ABC の内接円という。△ABC の面積を S、内接円の半径を r とすると、次の式が成り立つ。

$$S = \frac{1}{2}r(a+b+c)$$

◎3 三角形の内接円を描いてみよう。

○ どのようにしたら描けるだろうか。考えてみよう。



☆ 三角形の内接円の中心を内心という。

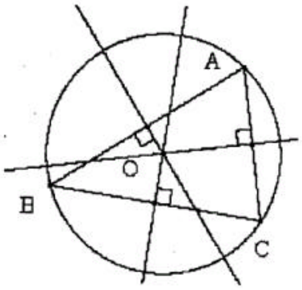
○ パソコンを使って内接円を作図してみよう。

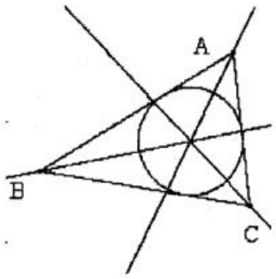
$\boxed{\text{ファイル}}$→$\boxed{\text{開く}}$→$\boxed{\text{3.5インチFD}}$→$\boxed{\gamma\ \text{三角形の内接円}}$を開く

<u>**まとめ3**</u> 三角形の内接円の中心(内心)は、

である。

デルタ
δ 三角形のこころの発見!





三角形の外心 O は、3つの辺の垂直二等分線の交点

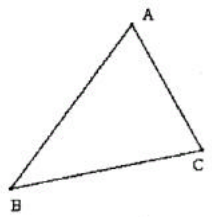
三角形の内心 I は、3つの内角の二等分線の交点

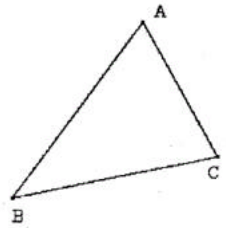
となり、3本の直線（半直線）がちょうど**1点で交わっている。**

では、

◎4 外心、内心の他に、3本の直線がちょうど**1点で交わる**例はないだろうか?

○ 三角形にどのように作図をすればよいのだろうか。





○ パソコンを使って作図してみよう。

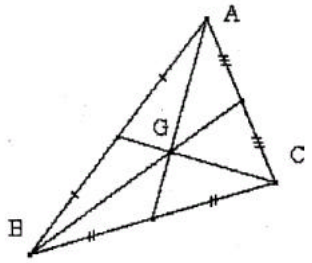
ファイル→開く→3．5インチFD→δ 1三角形の・・・を開く

たくさん作図する人は、δ 2、δ 3、・・・・も使ってね。

まとめ4 外心、内心の他に、3本の直線がちょうど1点で交わる例は、

である。

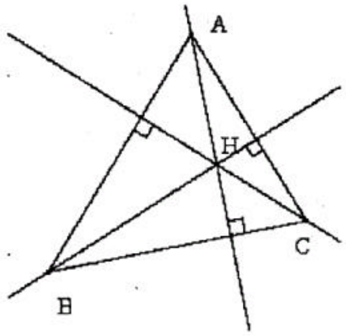
まとめ4について、



各頂点と対辺の中点を結んだ線分（中線という）の交点は1点　G　で交わるということがわかる。この

点　G　を　△ABC　の重心

という。



各頂点から対辺へ下ろした垂線の交点は1点　H　で交わるということがわかる。この

点　H　を　△ABC　の垂心

という。

☆☆　きょうのまとめ

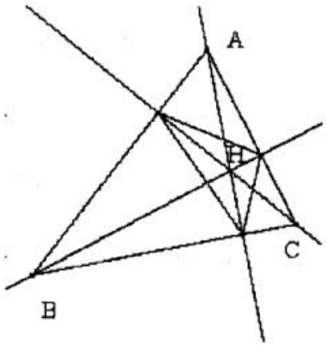
○　きょうの授業でわかったこと（理由も）や、感想などを書いてください。

イプシロン ε	垂足三角形の外接円

図ように、各頂点から対辺へ下ろした垂線の交点は垂心 H で交わる。このような △DEF のことを

△ABC の 垂足三角形

という。

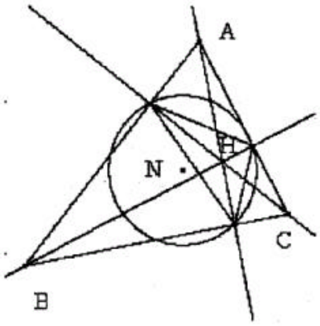


◎5 垂足三角形の外接円と△ABCの関係を調べてみよう。

○ △ABCを動かしてみよう。

スタートメニューから Cabri Geometry II を起動させる。

ファイル→開く→3．5インチFD
→ε 垂足三角形を開く



<u>**まとめ5**</u> 垂足三角形DEFとその中心の間には、

という関係がある。

まとめ5より

垂足三角形DEFは、

△ABCの3つの頂点から各対辺へ下ろした垂線の足

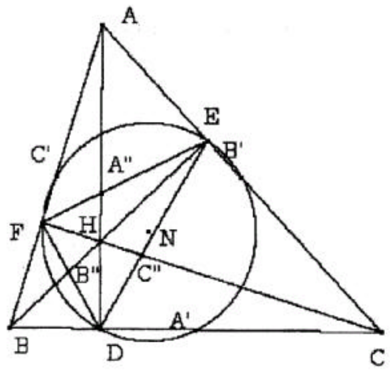
△ABCの3つの辺の中点

3つの線分AH、BH、CHの中点

の**9つの点を通る円**であることがわかった。

そこでこの垂足三角形の外接円のことを、**9点円**という。

◎6 このこと(次の定理)を示してみよう。



定理(9点円の定理)

三角形の3辺の中点、垂心と3頂点を結ぶ線分の中点、3本の垂線の足は同一円周上にある。

証明 図のように、BC, CA, AB, HA, HB, HC の中点をそれぞれ、A', B', C', A", B", C"とし、高さの足を D、E、F とする。

これまでに出てきた三角形のこころは、

外心(O)、内心(I)、重心(G)、垂心(H)

そして

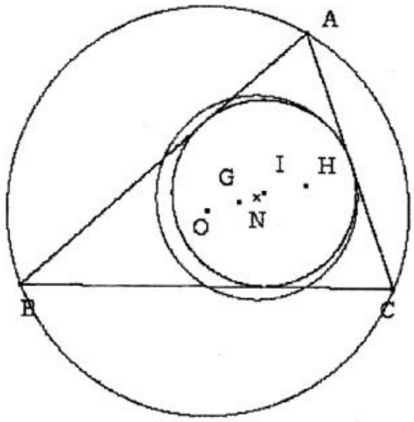
9点円の中心(N)

では、これらはどんな関係にあるのだろうか。考えてみよう。

◎7　三角形の外心(O)、内心(I)、重心(G)、垂心(H)、9点円の中心(N)の関係について調べてみよう。

○　△ABCを動かして、三角形の外心(O)、内心(I)、重心(G)、垂心(H)、9点円の中心(N)がどのように変化するか調べてみよう。

ファイル→開く→3．5インチFD
→ζ 垂足三角形を開く



まとめ7　△ABCにおいて、外心(O)、内心(I)、重心(G)、垂心(H)、9点円の中心(N)が、

である。

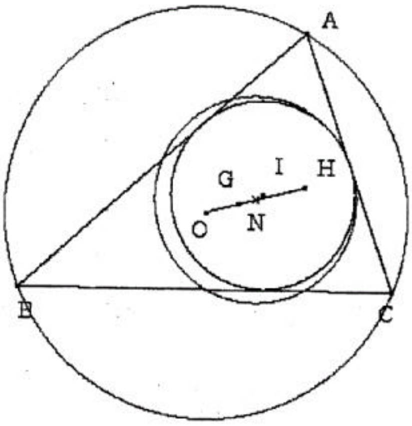
まとめ7より、

① **外心(O)、重心(G)、垂心(H)、9点円の中心(N) は1つの直線上**にある。
→この直線のことを**オイラー線**という。

② **9点円の中心(N)は、外心(O)と垂心(H)を結ぶ線分の中点**である。

③ **垂心(H)を相似の中心として、9点円と外接円の半径の比は1:2**になっている。

ということがわかる。



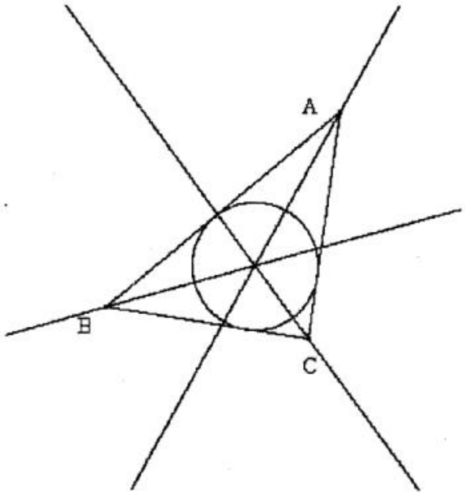
☆☆ きょうのまとめ

○ きょうの授業でわかったこと(理由も)や、感想などを書いてください。

エータ
η 三角形のこころの発見II

三角形の内心 I は、3つの内角の二等分線の交点

となり、3本の直線(半直線)がちょうど**1点で交わっている。**



では、

◎8 三角形の

外角の二等分線の交点

はどうなっているのだろうか?

○ △ABCの外角の二等分線を引いてみるよう?

スタートメニューから Cabri Geometry II を起動させる。

ファイル→開く→3.5インチFD→η1外角の二等分線を開く

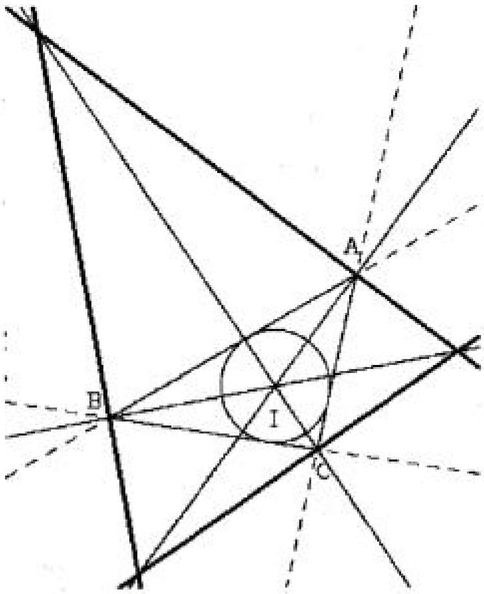
まとめ8 △ABCにおいて外角の2等分線は

である。

まとめ8より、

2つの**外角の二等分線と残りの内角の二等分線は1点**で交わる。

3つの直線が1点で交わったので、この点を中心とする円を描いてみよう。



◎9　2つの外角の二等分線と残りの内角の二等分線の交点を中心とする円を半径を工夫して描いてみよう。

ファイル→開く→3．5インチFD→ｸ 2外角の2等分線と円を開く

まとめ9　2つの外角の二等分線と残りの内角の二等分線の交点を中心とする円を半径を工夫して描くと、

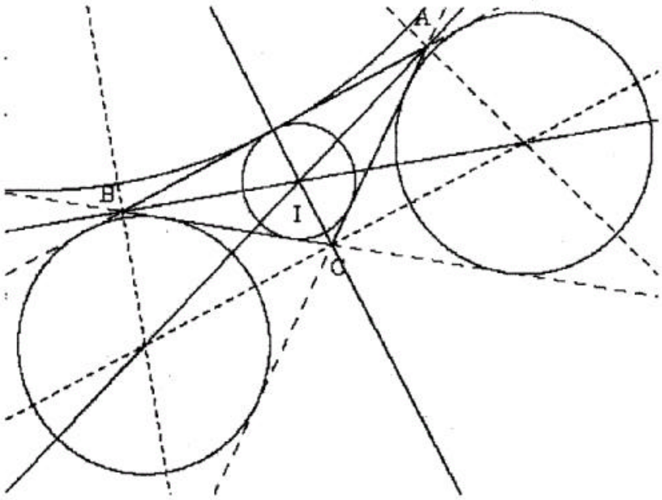
である。

まとめ9より

2つの外角の二等分線と残りの内角の二等分線の交点を中心とし、△ABCに接する円は、2つの外角の二等分線とも接する。

2つの外角の二等分線と残りの内角の二等分線の交点J1，J2，J3を**傍心**といい、

傍心を中心とする円を**傍接円**という。



また、三角形の外心(O)、内心(I)、重心(G)、垂心(H)、および傍心(J1，J2，J3)を

まとめて、**三角形の5心**という。

シータ
Θ フォイエルバッハの定理

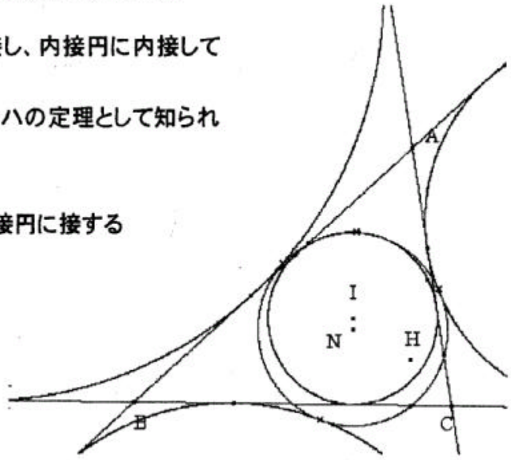
前のページの図に、9点円を加えてみよう(図7．1)。

すると、9点円は傍接円に外接し、内接円に内接していることがわかる。

この性質は次のフォイエルバッハの定理として知られている。

定理(フォイエルバッハ)

9点円は傍接円及び内接円に接する



これまでに学習してきた三角形のこころに関する性質や、フォイエルバッハの定理は、ドイツの数学者 Karl Wilhelm Feuerbach(フォイエルバッハ)(1800－1834)によって1822年に出された本の中で発表されたものである。

FEUERBACH

ON THE THEOREM WHICH BEARS HIS NAME

(Professor Roger A. Johnson, Hunter College New York City によるドイツ語からの翻訳)

Karl Wilhelm Feuerbach(フォイエルバッハ)(1800－1834)はドイツの Erlangen にある Gymnasium の数学の教授であった。彼は主にこの記事にも再掲載されている彼の名前のついた定理によって知られている。前の記事はこの定理とBrianchonとPonceletによる研究の初期の仕事について注意を促している。この翻訳は、1822年(第2版、1908)にFeuerbachによって公刊された、Eigenscbaften einiger merkwurdigen Punkte des geradlingen Dreiecks, urd mebrerer durch Sie bestimmten Linien und Figuren からなされた。この本は定理の一節を含んでいるが、証明に使われない部分を省略している。前の記事にもあることだが、ここでは、三角形の現代の幾何学に関するいくつかの興味深い仕事の出典を提供する。

出典 Smith A source book in mathematics

イオタ
ι　9点円発見の歴史

9点円を発見したのはオイラーであるとされているが、オイラー1人による発見ではなく、幾人かの人々が独立に発見した。イギリスでは、ベンジャミン・ヘヴァンが1804年に、トマス・レイブアルンの雑誌『数学の宝庫』I，18で、証明を要求する1定理として提出したものであるが、その定理は実際には9点円を与えるものであった。その証明は『数学の宝庫』第1巻第1部143ページで、ジョンバッターウォースによって与えられた。バッターウォースはまた、1つの問題を提出し、これはかれ自身とジョン・ホイットレーによって解答されたが、だいたいの調子を察するのに、彼らはその円が九つの点全部を通ることを知っていたらしい。

これらの9点は、1821年のジェルゴンヌの雑誌『数学年報』の中で、ブリアンションとポンスレーによって明らかに述べられた。1822年にドイツのエルランゲンの高等学校教授カール・ヴィルヘルム・フォイエルバッハは、パンフレットを発表し、その中で9点円に到着し、この9点円は三角形の内接円と傍接円のおのおのに接することを証明した。それで、この9点円を「フォイエルバッハの円」と呼ぶ。この円の特性についての多くの証明は、フォイエルバッハの論文の中で明らかにされている。その数年後にはシュタイナーによって証明なしに発表されている。しかしシュタイナーは1833年になって、この定理はフォイエルバッハによって発見されていると訂正した。最後の独立した発見は、知られている限りでは、1827年の『フィロソフィカル・マガジン』2，29～31にあるイギリス人エフ・エス・デイヴィスの論文である。

フォイエルバッハの1822年の証明、テルケムの1842年の証明は解析的であったが、1850年にマンションが初めて幾何学的証明を与えた。その後たくさんの人々によってフォイエルバッハの各種の証明が発見された。我が国では沢山勇三郎氏がこの定理の研究者として有名で、東京物理学校雑誌などに、数多くの初等的な証明が発表されている。

出典　カジョリ初等数学史下近代、小倉金之助補訳、共立全書
数学100の定理、数学セミナー編集部編、日本評論社