出典：中学校・高等学校数学科教育課程開発に関する研究(9)
発行：筑波大学数学教育学研究室、pp.136-150、2002年3月

方程式の歴史原典解釈による文化的営みとしての数学学習

筑波大学大学院修士課程教育研究科
綾小路尚子

要約

本論文では，数学史を取り入れた数学学習に関して，授業実践することによって，その有効性について考察した。ここでは，方程式の発達について原典を用いて教材化し，生徒が原典解釈を通して，数学は文化的営みであることを理解することを目標として授業実践を行った。

その結果，生徒のアンケートや授業の感想などから，数学観の変容が見られた。このことによって，数学史を取り入れた学習の有効性が示されたといえる。

１．　はじめに

平成 10 年告示の学習指導要領解説 [1] の中学校数学科の目標には，「数学的活動の楽しさ」という文言が盛り込まれた。数学的活動は身の回りに起こる事象や出来事を数理的に考察する活動と幅広い意味で捉えられているが，根本(1999.ｐ42)[2] は数学的活動の一つの視点として「『数学的活動』という言い方をすると，何か特別なことをするかのように考えがちであるが,（中略）記数法を確立する歴史的過程がそうであったように，それは日々の人間の活動ととらえてよい。」と述べている。また，数学について片野(1992.p28)[3] は,「数学は数千年の歴史を持つ人間の文化であって，現在のような学問体系にまとめあげられるまでには多くの紆余曲折をへてきている。」と述べている。つまり，数学的活動は人間の活動であり，数学は人間の文化と考えられる。筆者は，この点に注目し, 生徒に数学は文化的営みであることを認識してほしいと考える。これは, 数学嫌いな生徒，数学は固定されたものなどと捉えている生徒に対して，何らかの刺激を与えられるのではないだろうか。その一つの方法として，数学史を取り入れた学習を提案する。数学史を取り入れた学習に関して，高等学校数学で「数学基礎」新設もあり，今日様々な研究がなされている。中学校では，教科書にトピック的に載せてある場合があるが，数学史を活用した実践例は少ないように思われる。

そこで，本研究では，中学校における数学史を活用した授業について考察していきたいと考える。数学的活動の指導を語るパースペクティブとして，数学が人の営みであることの自覚を伴う数学の文化的視野の覚醒を提案し，その方法として数学史を用いた指導が効果的であり(礒田・土田.2001,ｐ497) [4]，数学が人の営みであると意味での文化的視野の覚醒をさせる上で,自文化が通用しない体験を伴ったカルチャーショックと他者の立場やその世界において考えてみるという解釈学的営みが有効である(礒田.2001,ｐ39) [5]。そして，その解釈，吟味の対象にできるのは，真正の歴史資料である，一次文献，そしてその時代の道具(言語表現，用具など)である(礒田.2002,ｐ98) [6]。

筆者は，以上の考えに基づいて，数学を文化的営みであるという視点から捉えた数学史の指導の実践例として「方程式の発達」を教材として取り上げ，一次文献を用いてその当時の方程式の表記と解法を解釈し，追体験することによって，生徒の数学観の変容に貢献できるか考察していく。

２．研究目的・方法

本研究では，以下を研究目的とする。

研究目的：生徒の数学観の変容を促すために，原典解釈を取り入れた「方程式の発達」を教材とした数学史の学習が有効であるかを明らかにする。

上記の目的を達成するために、以下を下位課題とする。

下位課題１：生徒は，数学は文化的営みであることを理解し，数学を発展的に捉えられるかどうかを明らかにする。

下位課題２：先人達が幾何学を重要視していたことを体験することによって，生徒の数学観の変容がみられるかを考察する。

上記の目的に対する研究方法として,原典を取り上げたテキストを開発した。そして，その教材を用いた授業を実践し，授業の前後でのアンケートと授業毎の感想により，また授業の様子を撮影したビデオにより，生徒の数学観の変容を調べる。

３．授業概要

３．１　教材の開発

実際の授業で利用するための教材として，古代バビロニアの数学，古代ギリシアの数学，アラビアのアル＝フワーリズミー，イタリアのカルダノ，フランスのヴィエタについて，できるだけ原典を用いた。原典として,「ユークリッド原論 [7]」,「ジャブルとムカーバラ [8]」,「ARSMAGNA [9]」,「Francisci Vietae Opera Mathematica [10]」を取り上げた。それぞれについて，簡単な説明を以

出典：中学校・高等学校数学科教育課程開発に関する研究(9)
発行：筑波大学数学教育学研究室、pp.136-150、2002年3月

下に示す。

・ユークリッドの「原論」

紀元前４世紀頃のギリシアの数学者ユークリッドによって著された。これは，当時かかれた数学書の中で最も大きい影響力をもったもので，全部で 13 巻から構成され，467 もの命題が書かれている。本研究では，第 6 巻の命題 13 を利用した。

・「ジャブルとムカーバラ」

９世紀頃のアラビアの数学者アル=フワ―リズミーによって著された。現在の１次，２次方程式に当たるものを分類し，それぞれの解法を記した。また２次のものについてはその解法に幾何的説明を加えている。

・「ARSMAGNA」

16 世紀イタリアの数学者ジロラモ・カルダノによって著された。カルダノは３次方程式（特定の場合）だけでなく４次方程式を分類し，それぞれの解法を説明している。そして，それぞれの解法に対しての幾何的な説明を与えている。

・「Francisci　Vietae　Opera　Mathematica」

16 世紀フランスの数学者フランソワ・ヴィエタによって著された。ヴィエタの代数理論への最も重要な貢献として，未知量だけでなく，一般的係数としても文字を用いたことがあげられる。しかし，ヴィエタの代数学は確固とした幾何的基盤を持っており，量の次元は必要に応じて示されている。

原典解釈を取り入れた数学史の学習で，アル=フワ―リズミ―とカルダノの方程式の解法を教材とした実践例として，伊藤(2001.p174)[11]，熊田(2001.p185)[12]があげられる。伊藤，熊田は，授業実践を通して，数学史を活用した授業の有効性として，生徒が数学を文化として捉えることができることを示している。本研究では，生徒が現在学んできた数学が長い間かけてたくさんの人々によって発達してきたことを理解できるように，つまり数学を発展的に見られるように，紀元前 23 世紀頃のバビロニアから，紀元前 4 世紀頃のギリシア，9 世紀頃のアラビア，16 世紀頃のヨーロッパの数学についての方程式に関する記述を取り上げ教材化した。そして，方程式の解法だけでなく方程式の表記にも注目できるように教材を開発した。また，一次文献を通して「どのような数学がそこに記されているか？数学はどのような考え方を尊重する人々によって生み出されたのか？自分が学んできた数学との違いはあるか？(礒田.2002,序章)[13]」について生徒が解釈できるように，その当時使われているそのままの言語表現を使うこととした。

３．２　授業環境

（１）日時：平成 13 年 12 月 17 日，18 日，19 日

（２）対象：私立中学校３年生　２クラス（90 名）
２次方程式の解の公式は既習
（３）準備：コンピュータ（Windows），Microsoft Power Point，
ビデオプロジェクター，事前アンケート，事後アンケート，
授業終了時毎のアンケート，ワークシート，授業資料

３．３　授業展開

指導目標を以下のように定めた。

指導目標：原典解釈を取り入れた「方程式の発達」を教材とした授業を通して，方程式は先人達によって作り上げてきたものであること，そして先人達は方程式を幾何的に捉えていたということを理解できるようにする。

＜1，２時間目＞

目標：９世紀アラビアの数学者アル＝フワーリズミーの「ジャブルとムカーバラ」を読み，方程式の解法とその幾何的説明を解釈し追体験することによって，アラビアの数学はバビロニアとギリシアの数学が融合していることを理解する。そして、16 世紀イタリアの数学者カルダノの「ARSMAGNA」を見ることによりアラビアの数学がヨーロッパへ伝わっていることを理解する。

①紀元前 23 世紀頃のバビロニアの数学について知る。

紀元前 23 世紀頃のメソポタミアの出土の粘土板に刻まれていたバビロニアの数学について紹介した。バビロニアで行われていた現在の方程式の問題に相当するものを取り上げ，その解法を読み，その解法が言葉と数の操作によってかかれていることを示した。生徒の感想として,「方程式の起源の古さに驚いた」,「こんな昔から方程式の問題があったなんて。」など驚きを表しているものが挙げられていた。

②紀元前 3 世紀頃のギリシアの数学について知る。

紀元前 3 世紀頃のギリシアの数学は，幾何学（図形の性質などを研究する学問）を中心としたもので,「コンパス」と「定木」を用いて図をかくことが重要視されていたことを紹介した。生徒は「定木」という言葉について興味を示した。

生徒（複数）：(「定木」について）字が違う！

教師：違う？これでいいんだよ。「定木」と「定規」何が違うと思う

生徒1：「定木」は木で出来ている！

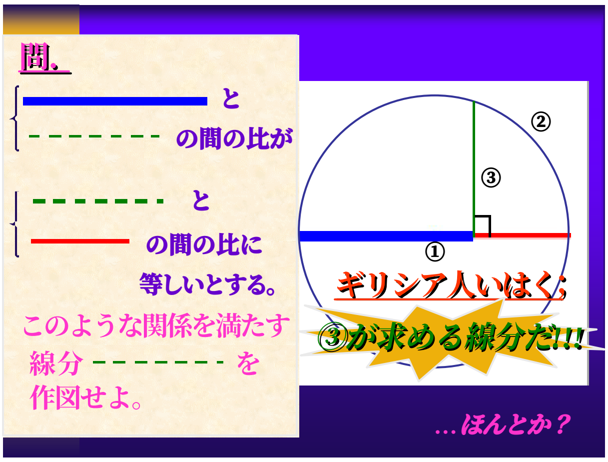
教師：そう。他に違うところがあるんだけど…

出典：中学校・高等学校数学科教育課程開発に関する研究(9)
発行：筑波大学数学教育学研究室、pp.136-150、2002年3月

生徒2：目盛がない。

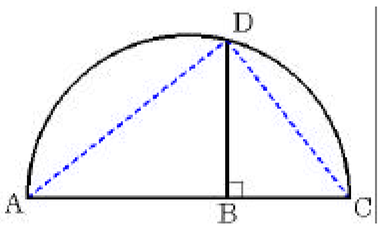
教師：そう。目盛が無いんだ。今の「定規」には目盛があるけど,「定木」には目盛がなかったんだ。では,次にギリシア人になって問題をといてみよう！つまり,コンパスと定木を使うんだよ。

ここでは,ギリシアでは,「定木」と「コンパス」で図をかくことが重要視されていことをさらに強調するため,「ギリシア人になったつもりで次の問題を解いてみよう。」と問題を提示した（資料 1)。そして,ギリシア人が書いたと思われる方法を伝え,黒板で生徒と一緒に考えながら「コンパス」と「定木」を使って作図した（資料 2)。生徒の中には,自分で挑戦している生徒もみられた。ここで,「ギリシア人になったつもり」といったのは,その当時の数学を知る上で,その当時の人々の気持ちになって考えることが重要だと思ったからである。



資料１　問題とギリシア人の方法

資料２　生徒の作図



資料３　問題

次に,「ギリシア人の方法が本当に正しいのか」と疑問を授業者がなげかけ,「現代人になってギリシア人の方法を証明してみよう。」と指示し,AB：BD＝BD：BC になることを証明させ（資料 3),発表させた。理解しやすいように,A と D,C と D を点線で結んだ。その後,ギリシア人のユークリッドは,彼の著書『原論』で証明していることを伝えた。

③この授業で行ったバビロニアの数学とギリシアの数学について,方程式という視点から考える。

バビロニアでは,「ある関係をみたす線分の長さを求めた。」,一方,ギリシアでは,「ある関係をみたす線分を作図した。」ことを確認し,では,「『方程式を解く』ってどういうことだろうか？」ということについて生徒に考えさせ,「方程式を解く」というのは「ある関係をみたす数を求めること」であることを確認させた。

④9 世紀頃のアラビアの数学者アル＝フワ―リズミーが著した『ジャブルとムカーバラ』を読み，現在の方程式に当たるものの当時の解法，またその幾何的説明を解釈し追体験することによって，アラビアの数学について理解する。

まず，アル＝フワーリズミーについて紹介した。そして，これから彼の著書『ジャブルとムカーバラ』を読んでいくことを伝えた。「『ジャブルとムカーバラ』を解読しよう！」と始め，生徒に原典（資料 4）からマールとジズルの関係について，そしてこれらは何をしているのかについて考えさせた（資料 5）。（グループ活動）

・“数の 3 に等しい（1 個の）ジズル”

そのジズルは 3 であり，そこから生じるマールは 9 である。

・“10 個のジズルに等しい 5 個のマール”

その 1 個のマールは 2 個のジズルに等しい。

そのマールのジズル（根）は 2 であり，マールは 4 である。

資料 4　原典

資料 5　活動の様子

マールとジズルの関係について

生徒 3：マールとジズルってあるけど，マールは，ジズルの 2 倍なんじゃないの？

生徒 4：２乗じゃないの？

生徒 3：上は 2 乗でいいんだけど, 下はジズルは 2 分の 1 マール？問題によって違うのかな？

アル＝フワーリズミーは「マールはジズルの自乗である」といっていることを伝え，ある関係をみたす数（マールとジズル）を求めていることを確認した。次に,「39 ディルハムに等しい（1 個の）マールと 10 個のジズル」の解法，その解法（資料６）に対する幾何的説明（資料７）を追体験させた。（グループ活動）

まず，生徒に次の文章を解釈させた。

“39 ディルハムに等しい、(1 個の) マールとそのジズル（根）10 個”

その意味は“どんなマールに 10 個のジズルを加えたら、全体として 39 になるか？”ということである。すると、その解法は、ジズル（の個数）を半分にすることである。この問題では、それは 5 である。そして、それ自身にかける。すると 25 になる。それを 39 に加える。すると、64 になる。そこで、その根をとる。それは 8 である。そこからジズル（の個数）の半分すなわち 5 を引く。すると 3 が残る。それが求めるマールのジズル（根）であり、マールは 9 である。

資料 6　原典

この解法について，ジズルを x，マールを x^2 として，文字を用いて解釈しようとする生徒もいたが，生徒にとってこの解法の解釈は難しいようであった。次に

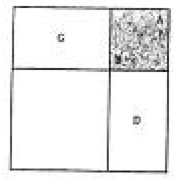
出典：中学校・高等学校数学科教育課程開発に関する研究(9)
発行：筑波大学数学教育学研究室、pp.136-150、2002年3月

アル＝フワーリズミーはこの解法だけでなく，図を用いて説明していることを伝えた。（資料 7）

この問題に対して図がある。それは面ABで、これがマールである。

さて、我々はそれに10個のジズルに相当するものを加えたい。そこで、その10を半分にする。それは５となる。それらを面ABの二方に接する２つの面とする。すなわち、面GとDである。それらの面の各々の長さは5、すなわち10個のジズル（の個数）の半分となり、その幅は面ABの辺に等しくなる。すると、面ABの一角に四角形が１つ残る。

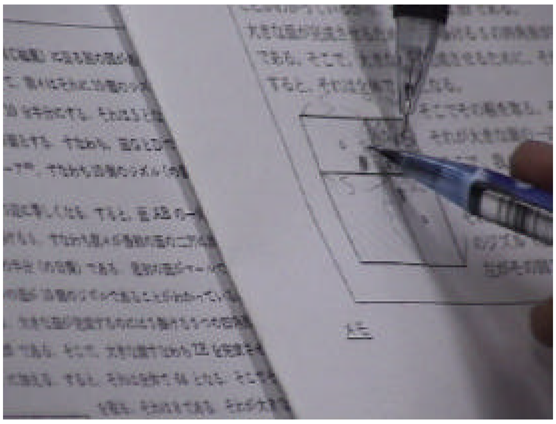
それは5掛ける５、すなわち我々が最初の面の二方に加えた10個のジズル（の個数）の半分（の自乗）である。最初の面がマールであることとその二方の2つの面が10個のジズルであることがわかっているから、その全体は39である。大きな面が完成するのには5掛ける5の四角形が残っており、それは25である。そこで、大きな面を完成させるために、それを39に加える。すると、それは全体で64となる。そこでその根を取る。それは8である。それが大きな面の一辺である。そこで、我々が付け加えたもの、すなわち5をそこから引くと、３が残る。



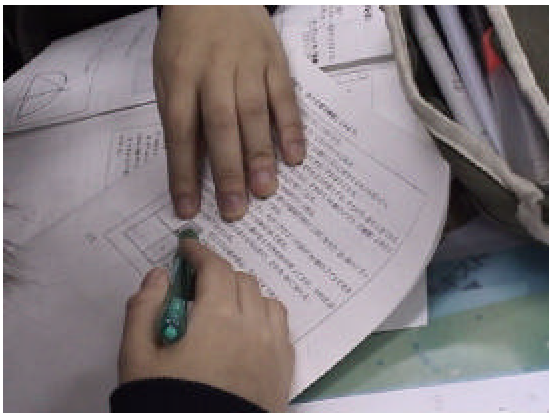
それが面AB、すなわちマールの辺であり、またそのジズル（根）である。そして、マールは9である。左がその図である。

資料７　原典

そして，どのようにアル＝フワーリズミーは図を用いて説明しているのか解釈させた。生徒は，マールとジズルという当時の言語を使って取り組んでいた（資料 8,9）。



資料８　生徒の活動の様子



資料９生徒の活動の様子

生徒に黒板で説明してもらった。生徒は，図をかきながら，その当時の言語表現(マールとジズル)を使って説明した。

⑤アル＝フワーリズミーが幾何的説明をかいた理由について考える。

教師：どうしてアル＝フワーリズミーは図を用いて説明しているのでしょうか？

生徒５：わかりやすいから

教師：そうだね。他になにか理由はあるかな？

生徒６：ギリシアでも図を使っていたから

教師：なぜ，そう思ったの？

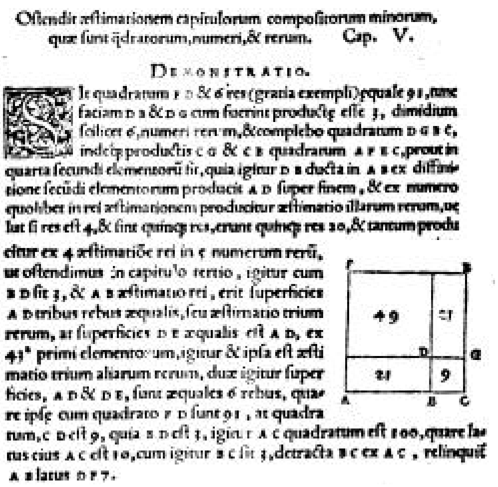
生徒６：ギリシアの影響を受けていたんじゃない？

教師：（生徒６）さんがいったようにアラビアは，ギリシアの影響を受けていたんだ。

そして（生徒７）がいったようにみんなにわかるようにするためで，図をかくことが正しいことの証明になったんだよ。

アラビアの数学は，図でかけることこそ正しいとされるギリシアの影響を受け，人々に解法を伝えることができるように，幾何的説明をしていることを伝えた。そして，アル＝フワーリズミーの解法とその幾何的説明から，アラビアの数学はバビロニアの数学とギリシアの数学が融合したと考えられることを説明した。

⑦カルダノの著書「ARSMAGNA」より，16 世紀頃のヨーロッパにもアラビアの数学が伝わっていることを知る。


Ostendit aestimationem capitulorum compositorum minorum, quae sunt qdratorum, numeri, & rerum. Cap. V.

DEMONSTRATIO.

Sit quadratum F D & 6 res (gratia exempli) equale 91, tunc faciam D B & D G cum fuerint producta esse 3, dimidium scilicet 6, numeri rerum, & complebo quadratum D G B C, indeque productis C G & C B quadratum A F E C, prout in quarta secundi elementorum fit, quia igitur D B ducta in A B ex diffinitione secundi elementorum producit A D super finem, & ex numero quolibet in rei aestimationem producitur aestimatio illarum rerum, ut lat si res est 4, & sint quinque res, erunt quinque res 20, & tantum producitur ex 4 aestimatione rei in 5 numerum rerum, ut ostendimus in capitulo tertio, igitur cum B D sit 3, & A B aestimatio rei, erit superficies A D tribus rebus aequalis, seu aestimatio trium rerum, at superficies D E aequalis est A D, ex 43ª primi elementorum, igitur & ipsa est aestimatio trium aliarum rerum, duae igitur superficies, A D & D E, sunt aequales 6 rebus, quare ipsae cum quadrato F D sunt 91, at quadratum C D est 9, quia B D est 3, igitur A C quadratum est 100, quare latus eius A C est 10, cum igitur B C sit 3, detracta B C ex A C, relinquitur A B latus D F 7.

資料１０　原典

まず，カルダノについて紹介した。この原典（資料 10）から，生徒に見て気付いたことを挙げてもらい，図などからアル＝フワーリズミーの影響を受けていることを予想させる。また，＆などがかかれるなどから方程式は，言葉から記号へ発達していったことについても説明した。カルダノ後，方程式はどのように発達していくのだろうと期待をもたせ，2 時間目を終わりにした。

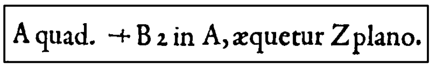
＜３時間目＞

目標：16～17 世紀フランスの数学者ヴィエタの未知数とともに既知数も記号化したことを理解し，ヴィエタの２次方程式の解法を追体験する。

①2 時間目の復習

②ヴィエタの方程式の表記について知る。

まずヴィエタについて紹介した。


A quad. + B 2 in A, æquetur Z plano.

資料 11

出典：中学校・高等学校数学科教育課程開発に関する研究(9)
発行：筑波大学数学教育学研究室、pp.136-150、2002年3月

次に，資料 11 は，ヴィエタの表した方程式であり，未知数だけでなく既知数にも文字をも用いたことを示した。次にヴィエタの方程式を解読するために，現代表記に直すよう指示した。このとき，未知数はxではなく，A を用いるようにさせた。そして現代表記に直した方程式を，生徒に現在の二次方程式の解の公式を利用して解かせた。xから A に文字が変わっただけであるが，生徒は A を B と Z を用いて表すことに戸惑っていた。次に，ヴィエタの方程式にかかれている quad，plano の言葉に注目し，方程式を幾何的に捉えていること図を用いて伝えた。

③ヴィエタの方法を追体験する。

ヴィエタは，方程式を解く際に図において正しいことのみを利用して方程式を解こうとしたことを伝えた。ここでは，「$(A+B)^2=A^2+2BA+B^2$」が図において成り立つことを示させ，これを利用して $A^2+2BA=Z^2$ を解かせた。具体的には，(A の入った式)^2＝A の入っていない式に変形することによって A を求めることを伝えた。そしてヴィエタは図で正しいことのみを利用しているので，答えは正であることを説明した。

④実際に，ヴィエタの方法を利用して，$A^2+10A=39$ を解く。

生徒が解いた後，この数字に注目し，アル＝フワーリズミーと同じであることを生徒に気付かせ，マールは A^2，ジズルは A にあたることを確認した。アル＝フワーリズミーの解法とヴィエタの解法を比較させ，ヴィエタの解法がアル＝フワーリズミーの幾何的説明に用いた図と対応していることを示した。

⑤今まで出てきた方程式をふり返り，まとめた。

方程式は言葉から記号へ変化して行ったことを確認し，長い間方程式は幾何的に捉えられていたことを確認した。また，初めて未知数を文字で表したのは，幾何学が重要視されていたギリシア時代のディオファントスであることを伝え，ルネサンス時代ヴィエタによって，既知数も文字で表せるようになったことを伝えた。

事前アンケート(12 月 7 日に実施)，授業終了時に行ったアンケート，事後アンケート(12 月 19 日授業終了時に実施)は，すべて生徒の数学観の変容を見るために行った。

4．結果・考察

以下，一つひとつ下位課題について考察していく。

下位課題１：生徒は，数学は文化的営みであることを理解し，数学を発展的に捉えられるかどうかを明らかにする。

以下アンケートの抜粋である。（生徒のそのままの記述）

① いろんな人が考えて今の数学が成り立っていると改めて思った。

② 数学はいろいろな地域から伝わってなりたってるんだなぁと思った。

③ 方程式の成り立ちがよく分かった。昔のいろいろな人たちのいろいろなやり方が変わってきた。それぞれのやり方がすじが通っていてすごいと思った。

④ 数学も文化といっしょにいろんなとこに伝わっていて、歴史があることがよくわかった。

⑤ 授業が進むにつれて数学が発展していったことから最初からプラスや２乗はあったと思ってたけど、実際にはそれを考えた人がいた。

⑥ 方程式がたくさんの人々によって考えられ､図や数を用いて解いていたのが今はただｘやｙをつかって、問題をといているだけだったので、こんな歴史があったとは知りませんでした。だから、この授業で今の数学となる原点を知って楽しかったです。

⑦ 今まで教科書で普通に使っている方程式も開発まではこんなにたくさんの過程をふんで現在にいたるんだなぁと思った。

⑧ 数学もたくさんの人が考えて今はやりやすくなっていると思った。

⑨ 今の方程式は昔、いろいろあってこんなに簡単になったのだなぁと思うようになりました。

⑩ 数学にもちゃんと歴史があって、だから今、使いやすい解法があるんだなと思った。ありがたいと思う。

⑪ 数学とは、今までただ計算して、証明（図形の）をするものだけかと思っていたけど、この授業を通して、数学にも歴史があり、いろいろな考えがあつまった末、今の計算で解法ができるのだと思いました。

⑫ 数学が少し好きになったかも。理由としては数学がここまで発展してきたのにはいろんな人の努力があったことを知れたから。ともかく、ただの公式じゃないって事が分かったことから、少し（自分の考えが）かわった。公式を１つだすのにもたくさんの考えが使われているのはすごいと思った。

⑬ 数学の方程式はこんな考え方でできたんだというのがわかった。数学がおもしろいと思った。

（１）数学は人の営みであることを理解するのかについて考察する。

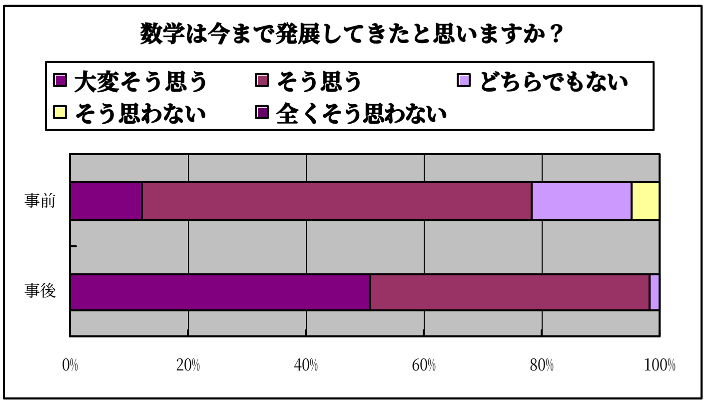
上記の事後アンケートの結果から，①③の「いろいろな人」，⑥⑧の「たくさんの人」，②「いろんな地域」，④の「いろんなとこ」などから，現在自分達が学んでいる数学が人々によって作り上げられてきたものであること，つまり数学は文化的営みであることを理解したと考えられる。また，⑦～⑫から，数学は文化的営みであることを理解していることに加え，⑧の「今はやりやすくなっている」，⑩の「今使いやすい解法があるんだ。ありがたい」など，現在自分達が学んでいる数学は，先人達のおかげで成り立っているということ自覚し，過去の数学そして現在自分達が学んでいる数学に対しての存在価値を見出している生徒がいると捉えられる。また，⑫⑬のように，数学は文化的営みであることを理解した上で，⑫「数学が好きになったかも。」⑬「数学が面白いと思った」など数学に対して興味・関心をもつ生徒も見られた。ここでは，一部の生徒の抜粋しかあげられなかったがほとんどの生徒が

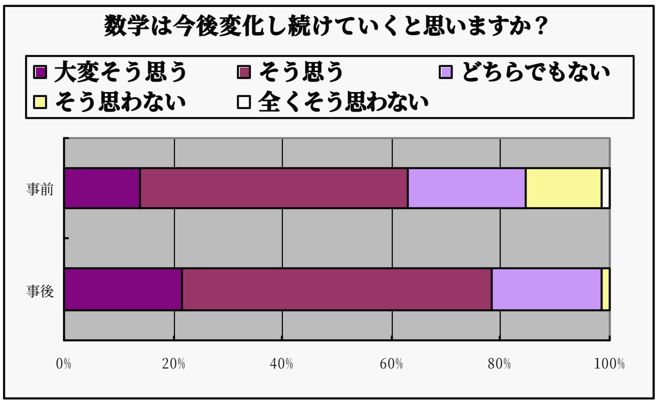
出典：中学校・高等学校数学科教育課程開発に関する研究(9)
発行：筑波大学数学教育学研究室、pp.136-150、2002年3月

数学は文化的営みであることを理解できたと捉えることができた。これは，教材として「方程式の発達」を取り上げ，歴史に沿って見ていったこと，そして，その方法として，原典解釈と取り入れたことによると思われる。原典解釈を取り入れたことによって,「当時の数学はどのように記されているか。」「数学はどのような考え方を尊重する人々によって生み出されたのか」生徒自身が理解し，それによって生徒自身が「自分が学んできた数学との違いはあるか」ということについて考える機会を持つことができたからではないかと思われる。この生徒一人ひとりが自らの解釈を通じて，数学は文化的営みであることを理解できたのではないかと考える。

（２）数学を発展的に捉えられるかについて考察する。

　ここでは，全体のデータに着目して考察する。①「数学は今まで発展してきたと思いますか？」，②「数学は今後変化し続けていくと思いますか？」という質問に対して選択型のアンケートを事前と事後で行い，項目ごとに生徒全体の平均値を算出し，数値の変化をみた。以下の通りである。





①の質問に対して,「数学は今まで発展してきたと思う」と答えた生徒は，事前では生徒全体の 78%であったことに対して，事後では 98%に上昇した。また，②の質問に対して,「数学は今後も発展しつづけると思う」と答えている生徒は，事前では全体の 63%であったことに対して，事後では 79%に上昇した。このように事前から肯定的に捉えている生徒は多く，あまり変わっていないように考えられるが，詳しくみていくと，大きな変化として，①については,「大変そう思う」が 12%から 51%上昇したことがわかる。このことから，生徒はこの授業を通して，より数学を発展的に捉えることができたといえるのではないだろうか。そして，この理由としては歴史に沿って授業を行ったからであると考えられる。

（１）（２）より下位課題１は果たせたといえるのではないだろうか。

下位課題２：先人達が幾何学を重要視していたことを体験することによって，

生徒の数学観の変容がみられるかを考察する。

以下アンケートの抜粋である。（生徒のそのままの記述）

① 図で表すことは感動だった。
② 図でも説明することにより、よりわかりやすく方程式をしることができるんだと思った。
③ 今のやり方だけおぼえていればいいと思っていたけれど、昔のことも勉強するとより理解を深めることができたなと思います。
④ とても興味深く、おもしろかった。今まで形式的にしか分かっていなかったものが、ちゃんと意味を知ることによりより深く理解ができた。
⑤ 式と図形で解いてみたから数学はいろいろな面から解ける。
⑥ 数学はいろいろな解法があることが分かった。一定の解き方だけでなく、様々な解き方をつかってみたいと思った。
⑦ 方程式というものは、数字だけで解くのではなく、図などを用いても解くことができるという一つの点だけでなく、いろいろな点から物事を見るという大切さを知った
⑧ 数学全ていろいろな解き方があるのだともっと思うようになった。昔からこのようないろんな考えがあったのなら現在ではもっと他に見つけだすことができるのではないのかと思った。
⑨ 新しく習う公式がそうなる理由をできれば図にして考えていきたいと思う。
⑩ なにげなくいるも方程式を解いていたが、実は奥が深いことが分かった。これからは、身近な式などをどうやってこういう式になったか考えたいと思った。

①のように，ほとんどの生徒が方程式の解法が幾何的に説明できることに驚きを感じていた。また，②③④のように，幾何的説明を知ったことにより「理解が深まった」という生徒もいた。これは，今まで方程式は機械的な操作と考えていて，図で表すことによって視覚的に捉えられるので，生徒にとってわかりやすかったのだと思われる。⑤～⑧から，数学における解法の多様性を見出した生徒もいたことが伺える。その中でも，⑦のように，「いろいろな点から物事を見るという大切さを知った」など視野を広げて，いろいろな視点から見ることの重要性を感じた生徒もいた。また，⑧のように，「現在ではもっと他に見つけだすことができるのではないか」と，数学における発見の可能性を見出した生徒もいた。⑨⑩のように，他の公式についても，図で成り立っていることがいえるのかについて興味・関心が高まり，これからは公式の成立理由を考えていこうとする意欲が伺える。このことから，数学を学ぶ意欲が生まれたととらえることができるのではないだろうか。このように，生徒は幾何的説明を知ることを通して，過去の数学の価値を見出し，方程式に関する理解を深め，多面的にものを見たり，また，数学的な見方や考え方のよさを知り，活用しようとする態度がみられた。そして，数学に対しての興味･関心，そして学ぶ意欲がみられた生徒もみられた。以上のこと

出典：中学校・高等学校数学科教育課程開発に関する研究(9)
発行：筑波大学数学教育学研究室、pp.136-150、2002年3月

から様々な数学観の変容が見られたといえるだろう。

このように，原典解釈を用いた数学史を学習したことにより生徒は各自で当時の数学を探求し，今まで捉えていた数学に対する考えの再構成を行ったといえる。生徒の数学に対する興味・関心，そしてこれからの数学学習への意欲も高まり「方程式の発達」を教材とした授業は，生徒の数学観を変容させることにおいて非常に有効であると考えられる。

5．おわりに

本研究では，原典解釈を取り入れた数学史の学習が，生徒の数学観の変容に貢献できるかについて考察してきた。「方程式の発達」について教材化し，原典解釈を取り入れた授業実践を通して，生徒は，数学は文化的営みであることを理解し，数学を発展的に捉えることができたと考えられる。これは，方程式の発達について古代バビロニアから，16 世紀ヴィエタまでを取り上げ，方程式の解法の発達とともに，方程式の表記法の発達についても考えたからであると思われる。また，現在学んでいる数学の位置付けを理解し，過去と現在の数学の両方の存在価値を見出し，数学に対して興味･関心をもつ生徒も見られた。これは，原典を解釈し，生徒自身が当時どのような数学が行われていたかを考え，当時の数学と現在の数学を比較したからであると思われる。また，方程式の解法の幾何的説明を知ることによって，図で表すことの大切さを理解し，公式などの成立理由を図を用いて考えようと数学学習に意欲的に取り組もうとする生徒も見られた。

このように，生徒の数学観を変容を促す方法の一つとして，数学史を活用した授業が有効であることが示された。そして，その方法として原典解釈を用いることが数学は文化的営みであるということを理解する上で有効であると考えられる。

ところで，平成 10 年告示の学習指導要領解説において，数学科の内容について，改善を図るために具体的な指導内容の厳選が行われ，本研究で取り上げた「二次方程式の解の公式」については，中学校 3 学年から高等学校（数学Ⅰ）に統合されることになった。しかし，教えてはいけないというものではない。「選択教科としての数学」の「発展的学習」について，「さらに学習を進めたいと考えている生徒に対してより進んだ学習内容も積極的に取り上げて扱うことができる」と示され，例として「二次方程式の一般的解法」が挙げられている。筆者は，「選択教科としての数学」の「発展的な学習」の教材の一つとしてこのような授業を取り上げることも可能ではないだろうかと考える。このようなこ

とを可能にするためにも，数学史について理解を深め，数学史の活用について考察し，生徒や指導目標に応じた教材開発および授業実践を行いたいと考えている。

謝辞

研究授業の実施に際して，私立茗溪学園の黒澤紀久先生，内窪洋子先生，尾島義之先生には，貴重なご意見，ご協力をいただきました。厚く御礼申し上げます。

註１） 本研究は、筑波大学学内プロジェクト研究（助成研究Ｂ：研究代表者　礒田正美）「インターネット上の数学博物館の開発・評価研究」の一貫として行われた。

註２） 授業の詳細、並びに資料は次に掲示している。
http://www.mathedu-jp.org

引用・参考文献

【1】文部省(1999).*中学校学習指導要領(平成 10 年 12 月)解説—数学編—*.大阪書籍. p12

【2】根本博(1999).*中学校数学科数学的活動と反省的経験—数学を学ぶことの楽しさを実現する*.東洋館.p42

【3】片野善一郎(1992).*数学史を活用した教材研究.シリーズ・課題学習の教材開発*.明治図書.p28

【4】礒田正美・土田知之(2001).*異文化体験を通じての数学の文化的視野の覚醒；数学的活動の新たなパースペクティブ*.日本科学教育学会論文集. pp497‐498

【5】礒田正美(2001).*異文化体験を通じての数学の文化的視野の覚醒に関する一考察—隠れた文化としての数学観の意識化と変容を求めて—*. 筑波数学教育研究第 20 号. pp39‐48

【6】礒田正美(2001).*文化的営みとしての数学教育；その方法としての数学史上の一次文献の利用. 中学校・高等学校数学科教育課程開発に関する研究(８)世界の教育課程改革の動向と歴史文化志向の数学教育—代数・幾何・微積 For All プロジェクトの新展開—*.筑波大学数学教育学研究室. pp95‐98

【7】中村幸四郎(1996).*ユークリッド原論縮刷版*.共立出版.P128

【8】伊藤俊太郎編著(1987).*数学の歴史　現代数学はどのようにつくられたか　中世の数学*.共立出版.pp322‐375

【9】Cardano.*ARSMAGNA*

【10】Joseph　E．Hofmann(1970).*Francis　Vieta　Opera　Mathematica*. GEORG OLMS VERLAG HILDESHEIM・NEWYORK.p129

出典：中学校・高等学校数学科教育課程開発に関する研究(9)
発行：筑波大学数学教育学研究室、pp.136-150、2002年3月

【11】伊藤賢二郎(2001).*数学観を変容させる数学史の効果～中世の代数史を用い,数学を文化として捉えることをねらって～.　中学校・高等学校数学科教育課程開発に関する研究(８)世界の教育課程改革の動向と歴史文化志向の数学教育―代数・幾何・微積 For All プロジェクトの新展開―*.筑波大学数学教育学研究室.pp174‐184
【12】熊田真一(2001).*文化としての数学学習に関する一考察～方程式の解の公式の歴史解釈を通して～.中学校・高等学校数学科教育課程開発に関する研究(８)世界の教育課程改革の動向と歴史文化志向の数学教育―代数・幾何・微積 For All プロジェクトの新展開―*.筑波大学数学教育学研究室.　pp185‐194
【13】礒田正美編(2002).*課題学習・選択数学・総合学習の教材開発～数学する心を育てる～*.明治図書.　序章

上記以外の授業資料作成における参考文献

・礒田正美(2001).*数学的活動論,その解釈学的展開*.第 34 回日本数学教育学会論文発表会論文集,　pp223‐228
・小倉金之助補訳(1960).*カジョリ初等数学史上*,共立出版
・D.J.Struik(1969) .*A source book in mathematics*.
1200‐1800 Cambridge.Mass:Harvard University Press pp63‐80
・スチュアート・ホリングデール著.岡部恒治監訳(1993).*数学を築いた天才たち㊤*.講談社
・片野善一郎(1995).*数学史の利用.教職数学シリーズ実践編７*.共立出版
・中村幸四郎(1981).*数学史―形成の立場から―*.共立出版
・大矢真一,片野善一郎(1978).*数字と数学記号の歴史*.裳華房.基礎数学選書.
・Constantinos Tzanakis and Abraham Arcavi(2000).*Integrating history of mathematics in the classroom:an analytic survey.John Fauvel and Jan van Maanen.History in Mathematics Education*. The ICMI Study.Kluwer Academic Publisher.pp201‐239