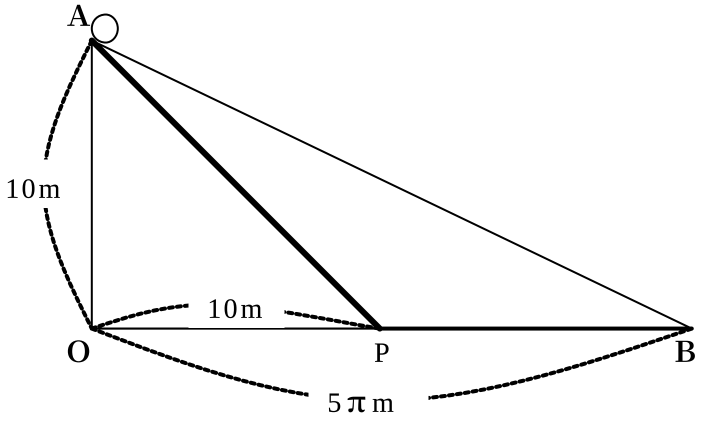
ワークシート① (H13.10.31)



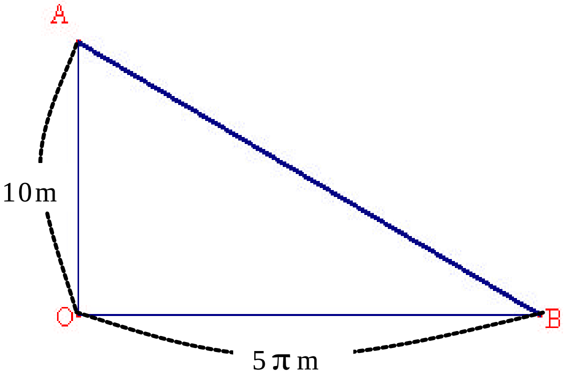
地上から１０mはなれた地点Aから斜面にそって質量５ｋｇのボールを転がすとき，ボールがルートABとルートAPBのどちらのルートを転がると先に地点Bに到着するか，考えなさい。

条件

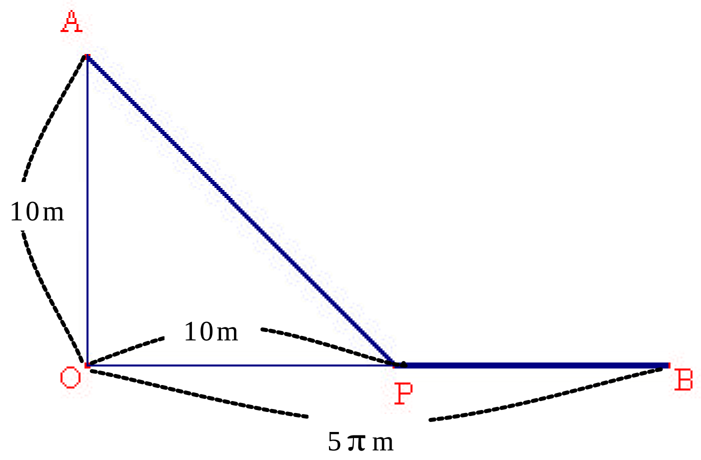
・落下の加速度を g (＝１０m/s^2)とする。

・ボールの初速度は０とする。

・面とボールとの間に摩擦は生じないものとする。



学籍番号：



ワークシート②（H13.11.14)

問　題

垂直な平面に２点Ａ，Ｂが与えられたとき，質点ＭがＡを出発して，自重だけの影響下で降下し，最短時間でＢに到達するような曲線ＡＭＢを決定しなさい。

求める曲線AMBに対して，

ＡＣ＝x，ＣＨ＝t（t は希薄度及び速度を表す変数)，ＣＭ＝y とする。

また，微分量(微小量)Ｃｃを dx，微分量ｎｍを dy，微分量Mmを dz とする。このとき，入射角の正弦または屈折角の正弦は希薄度に比例するので，

$$\frac{dy}{dz} = kt$$

つまり，

$$(\qquad):(\qquad)= dz : \frac{1}{k} \cdots ①$$

となる(k は比例定数)。$\dfrac{1}{k}=a$ (a は任意定数)とおけば，①は次のようになる。

$$(\qquad):(\qquad)= dz : a$$

$$\Leftrightarrow a\times(\qquad)=(\qquad)\times dz \cdots ②$$

②の両辺を２乗すると，

$$a^2\times(\qquad)^2=(\qquad)^2\times(dz)^2$$

$$=(\qquad)^2\times\{(\qquad)^2+(\qquad)^2\}$$

$$(\because\ (dz)^2=(\qquad)^2+(\qquad)^2)$$

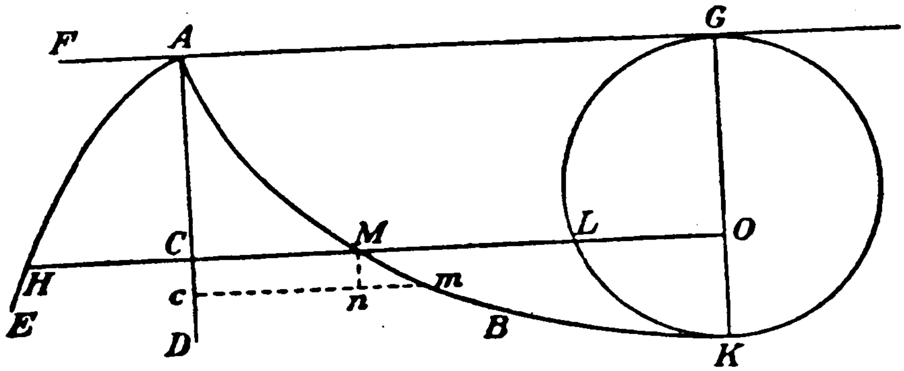
上の式を dy について整理すると

$$(\qquad=)\ \frac{t}{\sqrt{a^2-t^2}}dx \qquad \cdots ③$$

学籍番号：

ここで，重さのある落体の速度は落下距離の二乗根に比例するので，曲線ＡＨＥは放物線になる。円の直径を a とすれば， $t^2 = ax \Longleftrightarrow t = (\qquad\qquad)$・・・④　となる。

これを③に代入すると，



(続き)

ここで,

$$dy=\sqrt{\frac{x}{a-x}}dx=\frac{x}{\sqrt{ax-x^2}}dx$$

$$=\frac{a}{2\sqrt{ax-x^2}}dx-\frac{a-2x}{2\sqrt{ax-x^2}}dx$$

それぞれの項を積分すると,

$$\int dy=\int\frac{a}{2\sqrt{ax-x^2}}dx-\int\frac{a-2x}{2\sqrt{ax-x^2}}dx\Lambda \qquad ⑤$$

右辺の第 1 項は積分すると弧ＧＬとなる(各自確かめなさい。)。また, 第 2 項は

$\sqrt{ax-x^2}=p,\left(ax-x^2=p\right.$としてもよい$\left.\right)$

とおいて置換積分を行うことにより, (　　　　　　　　)を得る。ここで図において,

△ＧＬＯ∽△(　　　　)

より, ＬＯ：(　　　　)＝ＧＯ：(　　　　)となるので, ＬＯ＝

(　　　　　　　　)となる。つまり第 2 項は(　　　　)の長さとなる。

以上より⑤は, y＝弧ＧＬ－(　　　　)。y＝ＣＭより, ＣＭ＝弧ＧＬ－(　　　　)･･･

⑥

ＭＯ＝ＣＯ－ＣＭ＝(　　　　　　　　　　　　　　)　(Θ⑥)･･･⑦

ＣＯ＝弧ＧＬＫ＝弧ＧＬ＋弧ＬＫ　を⑦に代入すると,

ＭＯ＝(　　　　　　　　　　　　　　)

∴(　　　　　　　　　　　　　　)→これは【　　　　　　　】を示す。

$dy=\sqrt{\dfrac{x}{a-x}}dx$ …(※)　**を現代的に解く。**

$\sqrt{\dfrac{x}{a-x}}=\tan f$　**とおけば，** $x=a\sin^2 f$ **。この両辺を微分すると，**

$$dx=2a\sin f\cos f df$$

となるので，これを(※)に代入する。

$$dy=\tan f dx=2a\sin f\cos f\tan f df$$
$$=2a\sin^2 f df$$
$$=a(1-2\cos 2f)df$$

この両辺を積分すると，

$$y=\frac{a}{2}(2f-\sin 2f)+c$$

$f=0$ **のとき，** $x=0$ **なので，** $c=0$ **となり，**

$$y=\frac{a}{2}(2f-\sin 2f.).$$①

となる。一方， $x=a\sin^2 f=\dfrac{a}{2}(1-\cos 2f)$ …② **であるから，** $2f=q$ **とおくことにより，①，②は・・・**