

# 古代ギリシャの代数記号の学習による 生徒の数学観の変容に関する一考察

筑波大学大学院修士課程教育研究科

関口 光弘

- |     |                 |                              |
|-----|-----------------|------------------------------|
| 1 . | はじめに            | 要約                           |
| 2 . | 研究の目的と方法        | 生徒の数学観の変容に関し、数学史上の原典を用いた高校生  |
| 3 . | 授業概要            | 生に対する授業実践は多くある。しかし、中学生となると   |
|     | ( 1 ). 教材開発について | その数学的知識の上で制約を受けることがある。       |
|     | ( 2 ). 授業環境     | そこで本研究では、古代ギリシャ時代における代数記号を   |
|     | ( 3 ). 授業展開     | 教材に、中学生に対しその一次文献を利用した授業を行い、  |
| 4 . | 結果と考察           | 生徒の数学観の変容を考察した。当時の数学、特に代数記号  |
| 5 . | おわりに            | について知ることで、生徒は自らの数学に対して新たな価値  |
|     |                 | 付けを行い、数学が人々の営みの上に立脚しているものである |
|     |                 | と理解した。そして、数学が発展・進化する学問であるとい  |
|     |                 | う結論が生徒自身によって導かれた。            |

## 1 . はじめに

IEA(国際教育到達度評価学会)の調査から、日本の児童・生徒の「数学嫌い」の増加を読み取ることができる。礪田(1994)は、「数学嫌い」について「数学に対する見方(信念)や数学へのし好(面白さや好き嫌い)態度」を数学観と呼び、「数学嫌いの問題は数学観の改善と切り離せない問題」としている<sup>1</sup>。その上で、数学における異文化体験すなわちカルチャーショックが、数学が人の営みであるという意味での文化的視野を覚醒させ、数学観の変容を促すとしている(礪田、2001)<sup>2</sup>。

一方、ほとんどの生徒は学校での授業で数学を学んでいる。そのため、生徒が

<sup>1</sup> 礪田正美(1994)、数学嫌いと学力観、教育科学数学教育 No.441、明治図書、pp.112-115

<sup>2</sup> 礪田正美(2001)、異文化体験から見た数学の文化的視野の覚醒に関する一考察 隠れた文化としての数学観の意識化と変容を求めて、筑波数学教育研究 Vol.20、pp. 39-48

数学に対し抱く見方や態度、数学的内容に対する解釈は、多くの場合教科書から得たものであると考えられる。しかし、その教科書に歴史的背景を記してあるものはあまり多く見られない。したがって、数学史を扱った授業、特に歴史上の一次文献を用いた授業は生徒にとって異文化となり得ると言えよう。

また、数学史を授業に取り入れることについての世界的なものとして History in Mathematics Education<sup>3</sup>が挙げられるがその中で特に一次文献を取り入れた授業に関して次のような記述がある。"There is common belief held by many, teachers and students alike, about the static nature of mathematical concepts: once a concept is defined, it remains unchanged. Even those who do not hold this belief may not have had opportunities to experience the evolving nature of ideas."<sup>4</sup>これは多くの生徒や教師が、一旦定義された概念は変わることがないという信念をもっており、たとえそういう信念がないとしても概念の発展する本質を経験することはないかもしれないということを述べている。つまり、一次文献を授業に用いることはこのような数学の発展する本質を理解できるようになるといえる。このような数学の発展する本質は生徒だけでなく、教師にとってもカルチャーショックを引き起こすと考えられる。

磯田が進める「代数・幾何・微積 ForAll プロジェクト」<sup>5</sup>では、古代ギリシャ時代の「パップスの円環問題」<sup>6</sup>、「立方体倍積問題」<sup>6</sup>、「角の3等分問題」<sup>6</sup>などを教材とした授業実践が報告されている。しかし、古代ギリシャ時代の方程式や記号について着目したものはなく、その時代に考案された代数記号についての授業実践は新たな教材としての示唆を与えられると思われる。そこで、本研究では、古代ギリシャ時代の代数記号を題材に一次文献を利用した授業を行い、そのような授業が生徒の数学観の変容に有効であるかどうかを考察する。

## 2 . 研究の目的と方法

目的：古代ギリシャ時代の数学者ディオファントスが用いた代数記号を教材に、それによる数学史の学習が生徒の数学観の変容に貢献できるかを考察する。  
この目的に答えるため以下の課題を設定する。

課題1：数学を歴史的に捉える視点を持ち、生徒自身の中の数学に新たな価値付

---

<sup>3</sup> J.Fauvel and J.V.Maanen(eds) (2000), *History in Mathematics Education*, An ICMI Study

<sup>4</sup> H.N.Jahnke(2000), *The use of original sources in the mathematics classroom*, In J.Fauvel and J.V.Maanen (eds), *History in Mathematics Education*, An ICMI Study

<sup>5</sup> 筑波大学数学教育学研究室(2001)、*中学校・高等学校数学科教育課程に関する研究(8) 世界の教育課程改革の動向と歴史文化思考の数学教育 代数・幾何・微積 ForAll プロジェクトの新展開*

<sup>6</sup> 巻末の参考文献 1,2,3 を参照のこと

けをすることが出来るかどうかを明らかにする。

課題2：数学を人々の営みの中から生まれた学問として捉え、数学が発展するものであると生徒が理解できるかどうかを明らかにする。

この目的に答えるために以下の方法をとる。

方法：ディオファントス以前のギリシャ数学を一次文献の利用も含め学び、当時の文化的・数学的背景を理解した上でディオファントスが導入した代数記号についての一次文献を用いた授業を行う。授業はビデオに撮り、その活動の様子、生徒に与えた事前・事後アンケートの結果をそれぞれに着目して考察する。なお、事前アンケートは授業を行う4日前に宿題として課し、事後アンケートは授業終了直後に配布し、後日回収することとした。

### 3. 授業概要

#### (1). 教材開発について

数学史における方程式・代数に着目し、一次文献を用いた教材で行われた授業実践としては伊藤(2001)、熊田(2001)がある。これらはアラビア、中世ヨーロッパの数学史から2次・3次方程式の解の公式に焦点を当てた授業実践だが、その内容に「解の公式」を含んでおり被験者は「解の公式」が既習であった。筆者は、今回の被験者(中学2年生)の学習進度を踏まえると、「解の公式」が未習であり「解の公式」が生徒自らが有する数学でないとの判断から、古代ギリシャ時代の数学者ディオファントスについて、未知数に対し記号を導入したという点にのみ焦点を当て教材を開発した。生徒に2000年近くも前の数学に今の代数記号のようなものが見られることを生徒には理解して欲しいと言う願いが筆者にはあった。そこで、当時の生の数学を記述した一次文献を用いて、その一次文献として Greek Mathematics Works<sup>7</sup>、The Greek Anthology<sup>8</sup>を用い、前者からヘロン、ディオファントスの行った2次方程式の解を求める過程をギリシャ語・英語・日本語で、後者から「ディオファントスの墓の問題」<sup>9</sup>をギリシャ語・日本語でそれぞれ授業資料として掲載した。これに

---

<sup>7</sup> Ivor Thomas (ed.), *Greek Mathematics Works* (1941) Harvard University Press

<sup>8</sup> An English translation by W.R.Paton(1918), *The Greek Anthology vol. 1*, Harvard University Press

<sup>9</sup> 「彼は一生のうち、6分の1を少年として過ごし、その後12分の1以降はあごひげを生やしていた。さらに7分の1を経て、結婚式を挙げ、5年後に息子をもうけた。ところが、この息子はかわいそうに冷酷な女神に連れ去られた。その寿命は父の2分の1でしかなかった。彼は生涯の残りの4年間を、哀しみを癒しながら過ごした。」という問題である。

より当時の数学がどのようなものであったのか、生徒以外による解釈が入らないようにすることをねらった。

作成した授業資料はワークシートも含めて計 11 ページであり、これら全てを同時に配布するのではなく、授業の経過に伴って数ページずつ小分けにして配布した。これは授業の展開、ねらいを生徒に悟られないようにし、生徒の注目をその時の活動に注目させるためである。このことで、教師のねらいや解釈を、生徒自身の解釈に影響させないようにした。なお、教材開発に伴っては T.L.Heath による「ギリシャ数学史」<sup>10</sup>を参照した。

## (2). 授業環境

対象 国立大学附属中学校 2年生 2クラス (それぞれ共に 41 名)  
準備 コンピュータ(Windows)、テレビ、Microsoft Power Point 2000、事前アンケート、事後アンケート、ワークシートを含む授業資料、模造紙

## (3). 授業展開

< 1 時間目 >

### 【目標】

古代ギリシャの数学についてその特徴を理解し、その当時における方程式の解を求める手続きとしての作図による方法と数値的方法を理解する。

### 【授業概要】

幾何学の方程式への利用について

はじめに、古代ギリシャの数学者のうち数名について、授業資料とテレビへの投影をもとに紹介した。著書に着目したとき、図形についての著書が多く見られることを生徒に確認させた。そして、2 時間を通して扱う問題「ある 2 数について、それらの和が 20 でそれぞれの平方の和が 208 であるとき、それら 2 数の和を求める」<sup>11</sup>を、生徒に常に意識させるためあらかじめ模造紙に書いておき黒板に貼り付けた。

その後、ギリシャ時代の数学における幾何学という大きな特徴を理解

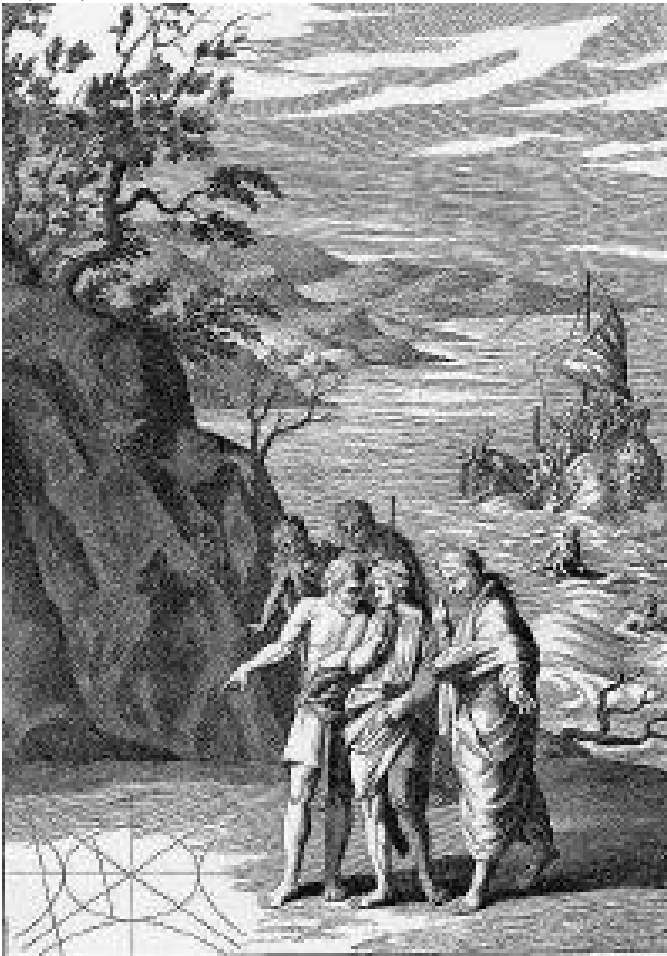
---

<sup>10</sup> T.L.Heath 著、平田寛・大沼正則・菊池俊彦訳(1959)、復刻版ギリシア数学史、共立出版、pp.338-353,380-419 T.L.Heath(1931), *A manual of Greek Mathematics*, Oxford

<sup>11</sup> Diophantus,*Arithmetica*, .28 ed. Tannaery .62.24-64.10 Ivor Thomas *Greek Mathematics Works* (1941) pp.536-537

するために T.L.Heath 編 Apollonius of Perga(1896)<sup>12</sup>にある挿絵(図 1)を利用し、この絵の解釈する活動を行った<sup>13</sup>。

(図 1)



・授業者と生徒のやりとり

授業者：「この絵は座礁した船と3人の哲学者の様子を描いているものです。彼らの一人は『我々は恐れる必要はない』と叫んだそうです。どうしてでしょうか？」

(数分後)

生徒 1：「ここにこの図形を描いた人間がいるので、食料や水があると思ったから。」

授業者：「なるほど。人がいるから助けてもらえると思ったわけですね。他にありますか？」

生徒 2：「哲学者たちはこういう図形を描いて、船を直す方法を考えた。」

授業者：「船を直すには、このような図形を描くことが必要だとあなたは思ったわけですね。他の意見はありますか？」

生徒 3：「この図形は方角を表わしていて、自分たちがどの方向に進めばいいかを哲学者たちが砂浜に書いた。」

解答例としては「砂の上にある幾何学の図形からギリシャ人の存在がわかり(当時、幾何学を扱っていたのはギリシャ人のみと考えられていた)、自分たちがギリシャの文化を有した土地にいることを確信したので」である。しかし、模範的な解答を導くことが目的ではなく、生徒が彼ら自身の言葉による意見をもつこと、自らが活動することを強調した。そして、ギリシャ人と幾何学が密接に関係していることを気付かせ、ギリシャ時代の状況下で(特に幾何学・作図を用いて)問題を解決する意識を持たせるようにした。

<sup>12</sup> Apollonius of Perga, *Treatise on conic sections* edited in modern notation, T.L.Heath(1896), Cambridge

<sup>13</sup> 磯田正美(2000) 道具が媒介する図形における「観察、操作、実験」型探求の楽しさ 教育科学数学教育 No.510、pp.11-12 明治図書

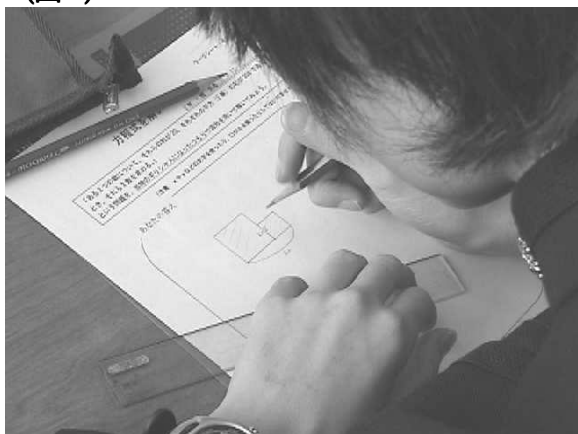
磯田は、エドモンド・ハレーのユークリッド原論ラテン語訳の扉絵を今日的に描き改めたものを用いた解釈についての説明を行っているが、この授業実践においては画像の鮮明さを得るため、砂浜に描いてある幾何学的図形が異なるだけと解釈できる脚注 12 の挿絵を利用した。

そこで、先の下線部で示した問いをこの状況下、すなわち、作図によって解くということワークシートを配布して生徒の活動として与えた。数分間の活動(図 2)ののち、生徒にどのように考えたのかを発表させた。

・生徒の発表

生徒：「まず、平方ということで正方形を考えたんですけど・・・、2つの数の和が20なのでこのような直線の長さを20として、この正方形(直線上の大きい

(図 2)



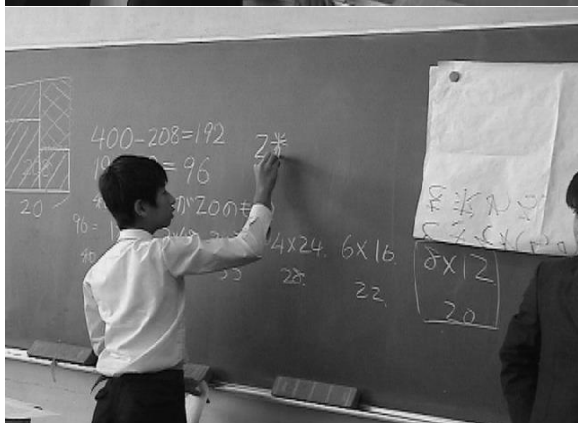
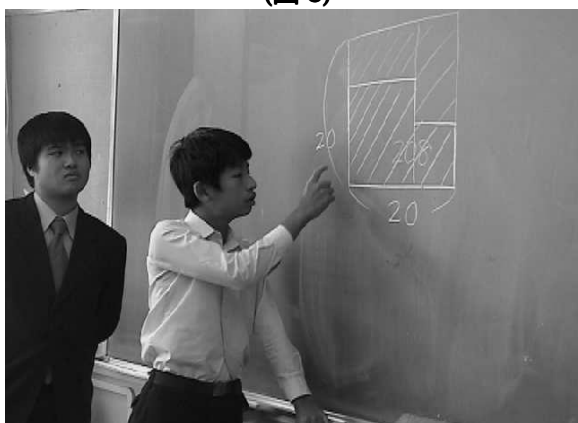
正方形を指して)の面積とこの正方形(もう一方の小さい正方形を指して)の面積の和が208になります。」  
他の生徒：「そこまでは分かったあ。」

生徒：「ここにこうやって正方形を描くと、一辺が20の正方形になります。だから、この大きな正方形の面積は400です。」(図 3)

他の生徒：「ああ、そうかあ。分かった。」

生徒：「400から208を引くと192になりますが、それはこの部分になります。これは、2つの長方形に分けられるんですけど、それぞれの辺の長さを見てみると、ここここ(2つの長方形の短い一辺)が同じ長さになって、ここここ(その長方形の他の一辺)が同じ長さになるので、同じ長方形だと言えます。つまり、この長方形一つの面積は192を2で割って、96になります。だから、かけて96、和が20になる数を求めることになるんですけど(と言って、 $96 \times 1$ から整数の積について順次書いていく)。で、かけて96、足して20になるのは、12と8なのでこれが答えになります。」(図 4)

(図 3)



(図 4)

この生徒の解法は、いわゆる面積図を用いた説明であり、確かに図を用いて説明はできているけれども、作図で求めているとは言えないものである。また、整数の組み合わせを取り尽くすことで解を求めているので厳密性に欠けている。そこで、授業者が作図によって求める方法を説明した。その際に、ユークリッド原論第2巻命題14<sup>14</sup>の日本語訳を配布し、その命題とピタ

<sup>14</sup> Euclid, *Elementa*, ed. I.L.Heiberg, 中村幸四郎・寺阪英孝・伊藤俊太郎・池田美恵訳・解説, (1996)

ゴラスの定理を用いた作図の方法(図5)をPower Point上で生徒に見せた。  
数値的方法で解を求めることについて

まず、ギリシャ時代における解を求める方法の一つとして、手続きのみを表現した記述によるものを提示した。これは、係数に着目して係数に四則演算を適当に施すことで解を求める手続きである。この授業ではヘロンの著書「幾何学」を原典として資料に載せ<sup>15</sup>生徒に内容を追わせ、下線部の問いについてこれと類似する仕方での解の記述を模造紙、テレビ、資料で行った。

この記述が何を言っているのかはついて、生徒だけの活動では何を言わんとしているのかわからない様子であったが、中には、先の面積図に少々の工夫をすることで、この問いに対するヘロンのような記述の仕方を説明する生徒も若干名いた。

しかし、大半の生徒は分からない様子であり、そのままでは今後の学習に支障をきたすと筆者は考えたため、このヘロンの記述について、それが今の代数記号<sup>16</sup>を用いると平方完成<sup>17</sup>していることを説明した。

その後宿題として次の3つを生徒に与えた。

- ・平方完成の計算を行ったワークシートを順に追い計算の正しさを確認すること。
- ・ヘロンの仕方による記述で求めた解と、現代の代数記号を用いた解とを照らし合わせること。
- ・ディオファントスについて調べてくること。

<2 時間目>

**【目標】**

ディオファントスの用いた代数記号、解法をそれぞれに解釈させる。

**【授業概要】**

ディオファントスの人物紹介

---

ユークリッド原論(縮刷版), pp.42 - 43、47 - 48, 共立出版

この命題は「与えられた直線図形に等しい正方形を作ること」であり、言い換えると任意の四辺形の面積に等しい正方形の作図である。資料の中には、証明には直接用いないがアイデアとして第2巻命題9も掲載した。

<sup>15</sup> Heron, *Geometrica* 21.9-10, ed. Heiberg Ivor Thomas *Greek Mathematics Works* (1941) pp. 502-503

<sup>16</sup> 当初はギリシャ人になったつもりで考えることを強調したが、ここでは、ヘロン自身の説明が「幾何学」内がないので、説明のため現代の代数記号を用いた。

<sup>17</sup> 因数分解は未習であるため、深入りせずに説明した。

まず宿題の確認をしながら前時の復習をしたのち、導入としてディオファントスの人物紹介を生徒の宿題の発表を交えながら行った。生徒からは古代ギリシャ時代の数学者であること、そして、「The Greek Anthology」より、ディオファントスの墓の問題をギリシャ語の原文<sup>18</sup>(図5)と筆者による日本語訳を資料として配布し、生徒に昨年ディオファントスについて教科書で学習していたことを思い出させた。生徒はすぐに思い出し、授業者は数分の時間を与えディオファントスが何年生きたのかを求めさせた。

### ディオファントスの記号の読解と解法の理解

次に先の下線部の問題が記されたディオファントスの“Arithmetica”の部分(図6)を Greek Mathematics Works<sup>19</sup>より抜き出し資料として配布した。その部分を The Greek Anthology の墓の問題<sup>20</sup>(図6)と比較することで、何か異なる部分はないかと生徒に対し発問した。これは、代数記号があることを生徒自身の力でギリシャ語から読み取る意図を含んでいる。

126.—ΑΛΛΟ

Οὗτός τοι Διόφαντον ἔχει τάφος· ἃ μέγα θαῦμα·  
καὶ τάφος ἐκ τέχνης μέτρα βίοιο λέγει.  
ἕκτην κουρίζειν βιότου θεὸς ὥπασε μοίρην·  
δωδεκάτην δ' ἐπιθείς, μήλα πόρεν χυοάειν·  
τῇ δ' ἄρ' ἐφ' ἑβδομάτῃ τὸ γαμήλιον ἤψατο φέγγος,  
ἐκ δὲ γάμων πέμπτῳ παιδ' ἐπένευσεν ἔτει.  
αἰαί, τηλύγετον δειλὸν τέκος, ἥμισυ πατρὸς  
† τοῦδε καὶ ἡ κρυερὸς μέτρον ἔλων βιότου.  
πενθος δ' αὖ πρὸς πρῶτον παρηγορέων ἐνιαυτοῖς  
τῆδε πόσου σοφίῃ τέρω' ἐπέρησε βίου.

(図5)

Εὐρεῖν δύο ἀριθμοὺς ὅπως καὶ ἡ σύνθεσις αὐτῶν  
καὶ ἡ σύνθεσις τῶν ἀπ' αὐτῶν τετραγώνων ποιῆ  
δοθέντας ἀριθμοὺς.  
Δεῖ δὴ τοὺς δις ἀπ' αὐτῶν τετραγώνων τοῦ ἀπὸ  
συναμφοτέρου αὐτῶν τετραγώνου ὑπερέχειν τετρα-  
γώνῳ. ἔστι δὲ καὶ τοῦτο πλασματικόν.  
Ἐπιτετάχθω δὴ τὴν μὲν σύνθεσιν αὐτῶν ποιεῖν  
Μκ, τὴν δὲ σύνθεσιν τῶν ἀπ' αὐτῶν τετραγώνων  
ποιεῖν Μσῆ.  
Τετάχθω δὴ ἡ ὑπεροχὴ αὐτῶν εἰς β. καὶ ἔστω  
ὁ μείζων εἰς α καὶ Μι, τῶν ἡμίσεων πάλιν τοῦ  
συνθέματος, ὁ δὲ ἐλάσσων ΜιΛεἰς α. καὶ μένει  
πάλιν τὸ μὲν σύνθεμα αὐτῶν Μκ, ἡ δὲ ὑπεροχὴ  
εἰς β.  
Λοιπὸν ἔστι καὶ τὸ σύνθεμα τῶν ἀπ' αὐτῶν  
τετραγώνων ποιεῖν Μσῆ· ἀλλὰ τὸ σύνθεμα τῶν  
ἀπ' αὐτῶν τετραγώνων ποιεῖ Δ'βΜσ. ταῦτα  
ἴσα Μσῆ, καὶ γίνεται ὁ εἰς Μβ.  
Ἐπὶ τὰς ὑποστάσεις. ἔσται ὁ μὲν μείζων Μιβ,  
ὁ δὲ ἐλάσσων Μη. καὶ ποιούσι τὰ τῆς προτάσεως.

(图6)

### ・生徒の発言

生徒：「読めねえよ、こんなの。」

生徒：「これが読める人は天才だね。」

生徒はこれら2つのギリシャ語の文章における違いが分からないようだったので、ディオファントスの代数記号についてどのような記号が用いられているのかどのように用いているのかを記した資料を配布し、その

<sup>18</sup> an English translation by W.R.Paton(1918), *The Greek Anthology vol.* , Harvard University Press, pp.92-95

<sup>19</sup> 前出、脚注11

<sup>20</sup> 前出、脚注12



資料で説明しているような記号が先の問題の原文に含まれていることを解説した。同時に、ディオファントスの導入した記号の使い方についても説明した。そして、例題として、“Arithmetica”に出てくる他の式を挙げ、それを現代の代数表記に直す作業をまずやらせた。

その後、同じ部分でギリシャ語の部分日本語に訳し、数式の部分だけ原文のままになったワークシート(図7)を配布し、数式を現代表記に直  
ワークシート・その2

## (図7) 君はディオファントスだ

2年 組 番 氏名 \_\_\_\_\_

2 数について、その和とそれぞれの平方の和が与えられているとき、それぞれを求めること。

それぞれの平方の和を2倍したものは、それぞれの和の平方よりもある平方分だけ大きいというのは必要な条件である。

今その和が  $\overset{\circ}{M} \bar{\kappa}_{\text{①}}$  で、それぞれの平方の和が  $\overset{\circ}{M} \overline{\sigma\eta}_{\text{②}}$  であるとしよう。

それらの差が  $s \bar{\beta}_{\text{③}}$  であるとし、大きいほうを  $\varepsilon \bar{\alpha} \overset{\circ}{M} \bar{\iota}_{\text{④}}$  を、小さいほうを  $\overset{\circ}{M} \bar{\iota} \wedge s \bar{\alpha}_{\text{⑤}}$  とする。

すると、その和は再び  $\overset{\circ}{M} \bar{\kappa}_{\text{①}}$  になり、差は  $s \bar{\beta}_{\text{③}}$  になっている。

平方の和を  $\overset{\circ}{M} \overline{\sigma\eta}_{\text{②}}$  にするということが残っている。しかし、それぞれの平方の和が  $\Delta^{\vee} \bar{\beta} \overset{\circ}{M} \bar{\sigma}_{\text{⑥}}$  になっている。

それゆえ、 $\Delta^{\vee} \bar{\beta} \overset{\circ}{M} \bar{\sigma}_{\text{⑥}}$  は、 $\overset{\circ}{M} \overline{\sigma\eta}_{\text{②}}$  に等しくなり、

そして、 $s \bar{\beta}_{\text{③}}$  は  $\overset{\circ}{M} \bar{\beta}_{\text{⑧}}$  に等しくなる。

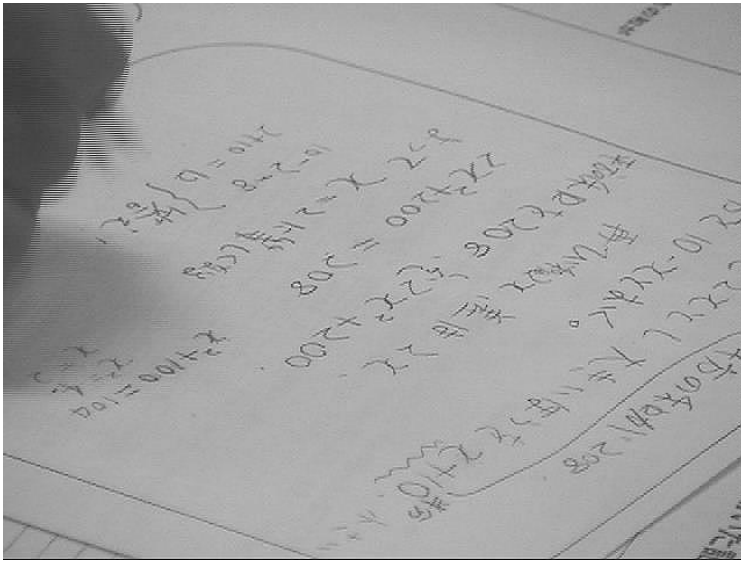
仮定に帰ると、大きいほうは  $\overset{\circ}{M} \bar{\iota} \bar{\beta}_{\text{⑨}}$  で、小さいほうは  $\overset{\circ}{M} \bar{\eta}_{\text{⑩}}$  になる。これは条件を満たす。

《ディオファントスの記号を現代の記号に翻訳してみよう！》

①	$\overset{\circ}{M} \bar{\kappa}$		⑥	$\Delta^{\vee} \bar{\beta} \overset{\circ}{M} \bar{\sigma}$	
②	$\overset{\circ}{M} \overline{\sigma\eta}$		⑦	$s$	
③	$s \bar{\beta}$		⑧	$\overset{\circ}{M} \bar{\beta}$	
④	$\varepsilon \bar{\alpha} \overset{\circ}{M} \bar{\iota}$		⑨	$\overset{\circ}{M} \bar{\iota} \bar{\beta}$	
⑤	$\overset{\circ}{M} \bar{\iota} \wedge s \bar{\alpha}$		⑩	$\overset{\circ}{M} \bar{\eta}$	

し、ディオファントスがどのようにその問題を解いているのかを調べさせ(図 8)、発表させた。以下は生徒の活動中の発言である。

(図 8)



生徒 A : 「なんでいきなり  $x+10$  とか  $10-x$  っておくんだらう? 普通に  $x$  とか  $y$  じゃだめなのかな? 」

生徒 B : 「だってさ、ディオファントスの文字ってさ一つしかないじゃん。」

生徒 A : 「ああ、そうか……。あれっ、でもさ、和が 20 なんだから  $x$  と  $20-x$  でもいいじゃん。」

生徒 B : 「ああ、そうだよな……。」

(両生徒ともにしばし考える。)

生徒 B : 「ちょっとまってよ。あのさ、 $x$  と

$20-x$  で考えると、それぞれの平方の和ってやつがさあ、 $2x^2 - 40x + 400$  になるでしょ。でも、ディオファントスはもっと簡単な式だよ。」

生徒 A : 「うーん、でも、ディオファントスは  $-40x$  を書けるんだからさあ、別にこれがあってもなくても関係ないよね。」

生徒 B : 「いや、違うんだって。ディオファントスだと  $2x^2$  が 8 に等しいって出てくるじゃない。っていうことは、ヘロンみたいになんかわけわかんないこと考えなくてもいいしさ、図形とか考えなくてもいいじゃん。」

生徒 A : 「えっ? 」

生徒 B : 「だから、面倒なこと考えなくてもいいじゃんってこと。だってさ、何か同じモノかけてそれを 2 倍したら 8 になるんだよ。そんなの 2 しかないじゃん。ディオファントスは頭いいんだよ。」

生徒 A : 「そっか、頭いい、ディオファントスは。」

この生徒 A・B のやりとりを受けて、生徒 B にこのやりとりについて発表させた。

#### 4 . 結果と考察

##### < 課題 1 について >

「数学を歴史的に捉える視点を持ち、生徒自身の中の数学に新たな価値付けをすることが出来るかどうか。」

生徒に課した事後アンケートから以下のような回答を得た。なお、下線部は歴史的に捉える視点、波線部は新たな価値付けについて着目して筆者がつけ加えたもの

である。

問) 2回の授業の感想を書いてください。

- 2回目のが面白かった。昔も記号を使っていたなんてびっくりです。昔から数学は進化して今にいたっているんですね...
- そんなに昔から数学があったことに驚いた。昔の人もいろんなことを考えていたのだと思った。
- 普段当然のように使っているものも、初めからあったわけではなく必ず誰かが考え出し、作り上げたものであることがわかりました。
- ディオファントスの数などを記号に置き換えるという発想はすごいと思います。しかし、ややこしい。ややこしいというのは数字や普段使う文字に慣れているからで、ディオファントスにとっては非常に分かりやすいものだったのかもしれない。

問) この授業を通してあなた自身の中で変わったなあと思うことを書いてください。

- 本当に今、 $x$ 、 $y$ が使われていて良かったと実感しました。これからはもっと感謝の気持ちをこめて文字式を立てましょう。
- 「数学の歴史」という新しい観点を知り、数学に対する気持ちが変わったような気がします。

(生徒の回答そのままの記述を抜粋)

下線部に注目すると、生徒は数学の歴史という今までにない視点で数学を捉え、古代ギリシャ時代の数学、ディオファントスの用いた代数記号に驚きを隠せない様子が伺える。しかも、それら古代ギリシャの人々の営みを数学として解釈していることも伺うことができよう。そして、それらの古代ギリシャの数学と生徒自身の数学を比較し、波線部にあるような感想を生徒は抱いた。ディオファントスの代数記号の存在を知ることで、生徒の中にある数学での文字という考え方が当たり前のものではなく、こうした人の創造所産によるものであるという価値を見出したことが分かる。生徒によっては「感謝の気持ち」、「数学に対する気持ち」という言葉を用いた感想を書いており、情意的側面に変容を及ぼしたことも伺える。

以上から、現在の数学が過去の人々の営みにおける創造所産であるという価値を見出し、加えて数学に対する気持ちに変化が起きたと結論づけることができる。

< 課題2について >

「数学を人々の営みの中から生まれた学問として捉え、数学が発展するものであると生徒が理解できるかどうか」

生徒に課した事後アンケートから以下のような回答を得た。なお、下線部は数学の発展について、波線部は人の営みとしての数学に着目し、筆者がつけ加えた。

問) 数学はどのような学問だと思いますか。

- これからも進歩し続ける。
- 新しい発見によりどんどん発展していくことのできる学問。

問) 2回の授業の感想を書いてください。

- 2回目の面白かった。昔も記号を使っていたなんてびっくりです。昔から数学は進化して今にいたっているんですね...
- そんなに昔から数学があったことに驚いた。昔の人もいろんなことを考えていたのだと思った。
- 普段当然のように使っているものも、初めからあったわけではなく必ず誰かが考え出し、作り上げたものであることがわかりました。
- 数学にはいろんな考え方があるなぁと思った。人々の苦勞によって数学の基礎ができたんだと思った。
- ギリシャ時代から、数学がこんなに発達していたなんて、数学の歴史は長い。

(生徒の回答そのままの記述を抜粋)

波線部から、生徒は古代ギリシャの数学に対し、当時の人々が様々なことを考えていたのではないかという彼らの数学に対する考えや苦勞に生徒自身が思いを馳せていることが伺える。そうした人々の数学に対する営みを生徒自身が認めながら、現在の数学の形成にそういった当時の人達が深く関係しているのではないかという感想を生徒は抱いている。そして、課題1での議論のように現在の数学と当時の数学の比較から、現在の数学のよさを改めて認識し数学が発展、進化したという結論を生徒は得、これからも数学が同様に発展、進化すると考えるようになったのではないかと考えられる。

以上から、生徒は過去の数学、現在の数学、未来の数学を通して捉えることができるようになったといえる。

## 5. おわりに

この研究では数学史を教材に用い、古代ギリシャ時代の代数記号を理解することから生徒自身の中で数学が新たに価値付けられるか、数学を発展するものとして捉えることができるかを考察した。その結果、数学に対する固定的な観点から開放され、数学が人々の営みとして昔から考えられてきたものであり、新たな発見の上に今の数学があることを理解し、そのような観点を今の数学にも当てはめ

て考えることが出来るようになった。そして、未来の数学に対して同じように発展することができると考えられるようになった。

先に述べた伊藤(2001)、熊田(2001)の授業実践は、この授業実践と同様に数学観の変容を求めたものであったが、そこで用いられた一次文献は今回のこの実践よりもやや高度な数学的知識を仮定している。新しい学習指導要領に沿うならば高等学校で学ぶ知識を仮定することとなる。また、「代数・幾何・微積 ForAll プロジェクト」にて報告されている授業実践の多くは高校生ないしはそれに順ずる学力を持った生徒を対象に行われており、中学生を視野に入れた実践は少ない。そのような点においてこの授業実践は有用であると考えられる。

しかし、生徒の中には「難しい」と感じる者も少なからずいた。それは、当時の数学を理解するために必要な数学的知識が学校で未習であったり、慣れていなかったりする場合があることに起因すると思われる。特に中学生に対しては、このような事態が顕著に表れると思われる。この問題をどのように乗り越えるかが今後の課題となるであろう。

#### 註 1

本研究は、筑波大学学内プロジェクト研究(助成研究B:研究代表者 磯田正美)「インターネット上の数学博物館の開発・評価研究」の一貫として行われた。

#### 註 2

授業の詳細、並びに資料は次に掲示している。 <http://www.mathedu-jp.org>

#### 謝辞

研究授業の実施に際し、国立筑波大学附属中学校の鈴木彬先生、大根田裕先生、水谷尚人先生には多大なご協力を頂きました。また、現在筑波大学教育研究科に長期研修中の坂本正彦先生には準備の際に多くのご指導を頂き、研究科における先輩である青木弘さんにはアンケートの回収などでご協力いただきました。この場を借りて厚く御礼申し上げます。

#### <参考文献>

1. 保坂高志・磯田正美(2001)、*円環問題の探求による数学観の変容に関する一考察～パップスや算学原典を利用して～*、日本数学教育学会誌第 83 巻臨時増刊第 83 回総会特集号、p.444 日本数学教育学会
2. 松本晃一(2001)、*ギリシャ時代の原典を活かした授業に関する一考察 立方体倍積問題にまつわるギリシャ人の営み*、第 34 回数学教育論文発表会論文集、

pp.599-600、日本数学教育学会

3. 野口敬子・磯田正美(2001)、*数学史学習による生徒の数学観の変容に関する一考察 角の三等分器を題材に*、日本数学教育学会誌第 83 巻臨時増刊 第 83 回総会特集号、p.336 日本数学教育学会
4. 伊藤賢二郎・磯田正美(2001)、*中世数学史の解釈による生徒の数学観の変容について～数学を文化として捉えることをねらって～*、日本数学教育学会誌第 83 巻臨時増刊 第 83 回総会特集号、p.445 日本数学教育学会
5. 熊田真一(2001)、*文化としての数学学習に関する一考察～方程式の解の公式の歴史解釈を通して～*、第 34 回数学教育論文発表会論文集、pp.595-596、日本数学教育学会
6. 磯田正美(2001)、*異文化体験から見た数学の文化的視野の覚醒に関する一考察 隠れた文化としての数学観の意識化と変容を求めて*、筑波数学教育研究 Vol.20、pp . 39-48
7. H.N.Jahnke(2000), *The use of original sources in the mathematics classroom*, In J.Fauvel and J.V.Maanen (eds), *History in Mathematics Education, An ICMI Study*

< 授業資料作成において参考にした文献 >

- 【1】 Ivor Thomas(1941), *Greek Mathematics Works* ,Harvard University Press, pp.466-561
- 【2】 Stuart Hollingdale(1989), *MAKERS OF MATHEMATICS*, Pelican Books  
岡部恒治監訳(1993) *数学を築いた天才たち*Ⓔ 講談社
- 【3】 Euclid,*Elementa*, ed. I.L.Heiberg 中村幸四郎・寺阪英孝・伊藤俊太郎・池田美恵訳・解説(1996) *ユークリッド原論(縮刷版)* 共立出版
- 【4】 筑波大学数学教育学研究室(2001)、*中学校・高等学校数学科教育課程に関する研究(8) 世界の教育課程改革の動向と歴史文化思考の数学教育 代数・幾何・微積 ForAll プロジェクトの新展開*
- 【5】 片野善一郎(1995)、*数学史の利用*、共立出版
- 【6】 高崎昇(1977)、*方程式の歴史*、総合科学出版