

原典を利用した文化的営みとしての数学指導 - パスカル・ライプニッツの計算機を題材にして -

筑波大学大学院修士課程教育研究科
島竹 里枝

要約

1. はじめに
2. 研究目的・研究方法
3. 授業概要
 - 3-1 授業環境
 - 3-2 教材の開発
 - 3-3 授業展開
4. 結果・考察
5. おわりに

本研究は、数学指導に数学史を用いることによる生徒の数学観の変容について検証するものである。「計算機のはじまり」に焦点を当てた教材を開発し、その効果を検証した。そして、数学を人間の文化的営みと捉えることから、生徒が数学と社会生活とのかかわりを認識し、数学に対して興味・関心をもつかを検討した。その結果、生徒は数学を社会生活とのかかわりから捉え、同時に、数学の面白さを再確認し、興味・関心を持つようになったことが示された。このことは、2003年から導入される数学基礎での学習において数学史の学習が有効であることを示唆している。

1.はじめに

IEA(国際教育到達度評価学会)^[1]の調査から、我が国の児童・生徒は国際的に比較して数学は生活に必要であると感じていないと読み取ることができる。これに対して、筆者は数学を入学試験のためだけに必要で、日常では使わない学問であると思っている生徒が数多くいるからではないかと考える。

数学は人間の文化的営みや様々な活動と関わって発達してきた学問であるといえる。磯田(2001, p.98)^[2]が指摘するように、数学をその数学が使われた文化、時代の文脈において解釈することで、今生徒が学んでいる数学に対する見方や考え方に変化が生じ、数学を学ぶ必要性を見出せるようになるのではないかと筆者も考える。磯田(2002)^[3]は、人間活動、人間の営みを機軸にした数学的活動による生徒の数学観の変容に関する研究をおこなっている。その中で、数学史を教材として扱うことで、数学を人間の営みとして認められるようになるとしている。また、解釈学的視野から数学的活動の指導を語るパースペクティブとして、数学が人間の営みであることの自覚を伴う数学の文化的視野の覚醒を提案し、その方法として数学史を用いた指導

に関する研究も行っている(磯田・土田, 2001, p.497)^[4]。神長(1983)^[5]は、数学史を生かす指導について指導する内容と人間との関わりに意識をもつことであるとしている。これらの研究から、数学史を扱うことは数学教育において数学と人間の営みとのかかわりを認識する機会となりうるといえる。以上のことから、筆者は数学と社会生活とのかかわりを生徒が認識するのに数学史を用いることは有効ではないかと考える。そして、数学史を用いる際には、「真正の歴史資料である一次文献やその時代の道具(言語表現、用具など)を用いた教材(磯田, 2002, p.98)」^[2]が有効なのではないかと考える。

本研究では数学史を用いた教材による数学指導において、生徒が数学と人間の文化的営み・社会生活とのかかわりを認識し、数学に対して興味・関心を持つようになるかを明らかにしていく。

2. 研究目的・研究方法

研究目的：「計算機のはじまり」を題材として利用し、生徒自身の解釈や活動(観察・操作・実験)を中心とした授業で数学観を変容させることはできるか、数学に対する興味・関心を高め、数学を活用する態度を育成することができるかについて考察する。

上記の目的を達成するために、以下の課題を設定する。

下位課題1：生徒は、数学が人の営みの中に存在し、発展してきたと認識することができるか。

下位課題2：生徒は、数学と社会生活とのかかわりを認識し、数学が果たしている役割について理解することができるか。

下位課題3：生徒が、数学に対する興味・関心を高め、数学を活用する態度をもつことができるか。

研究方法：「計算機のはじまり」に関する原典を用いたテキストを開発する。そして、授業を実践し、授業前後のアンケート、授業や生徒の様子を撮影したビデオなどをもとに、生徒の数学観の変容を観察・分析する。

3. 授業概要

3-1 授業環境

1) 対象 : 私立M学園3年E組(数学 を履修中)

2) 時間数・実施月日 : 3時間(50分×3)・平成13年12月17日~
19日の3日間

- 3) 準備 : コンピュータ (Windows2000)、ビデオプロジェクター1台、実物投影機1台、Microsoft Power Point、事前・事後アンケート、ワークシート (授業の感想含む)、授業資料

3 - 2 教材開発

磯田(2001, p p.223 228)^[6]が述べる解釈学的営みの視点から、原典や道具の解釈を通じて文化を読み取ることができ、また数学を人間の営みとみなすことのきっかけになるような教材を開発した。原典として、『LETTER DEDICATOIRE AMONSEIGNEUR LE CHANCELIER』^[7]と『Machina arithmetica in que non additio tantum et subtraction sed et multiplicatio nullo,divisio vero pane nullo amini labore paragantur』^[8]を用いた。前者により17世紀当時の計算方法やパスカルの計算機について、後者によりライプニッツの計算機をそれぞれ導入した。

3 - 3 授業展開

- 1) 指導目標 : 人の営みと数学との関わりを17世紀当時の計算方法を通して理解させる。

パスカルが計算機を発明した経緯と計算機の仕組みを理解させる。

ライプニッツが発明した計算機の仕組みを理解させ、その中に潜む数学を見つけさせる。

- 2) 授業の展開

事前アンケートは、アンケート項目を生徒が覚えていないように配慮するため、授業の10日前に行った。

【1時間目】17世紀当時の数学(計算の方法)を追体験する。

まず計算機とはどのようなものを定義することから始めた。そして、生徒に計算機とはどのようなものであるかを実感させるため、実際に電卓と筆算で隣同士競争をさせた。その結果、生徒からは「早い」「正確」「どんな大変な計算でもできる」という発言が得られた。そして、電



【写真1】電卓と筆算による計算

卓を「正しい数字さえ入力すれば、誰がやっても正しい答えが得られたもの」と定義した。



教師：そのような誰がやっても正しい答えが得られるようなものを誰が、いつ、どのような時代に発明したか知っていますか。

生徒に対して問いかけをおこない、学習の目標が計算機が発明された時代、つまり17世紀当時の数学を学習することであると認識させた。



【図1】(フランス語)

LETTER DEDICATOIRE AMONSEIGNEUR LE CHANCELIER^[8]



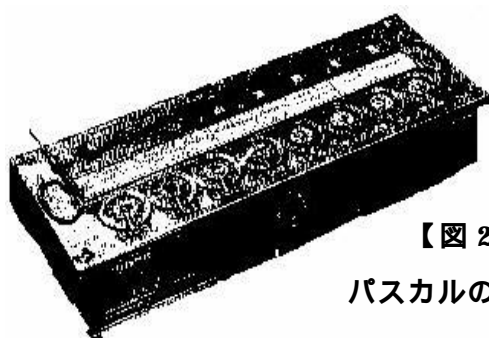
【写真3】かぞえ札による計算

原典として、パスカルが閣下ピエール・セイギへ宛てて書いた“LETTER DEDICATOIRE AMONSEIGNEUR LE CHANCELIER”の中の〔献辞〕を紹介し、その手紙の中に出てくる『通常の方法』、つまり、17世紀当時の計算の方法が『かぞえ札』と『筆算』を用いる方法であることを生徒に示した。そして、『通常の方法』のひとつである(数え札を用

いる方法)とはどのような計算の方法なのかを自分たちで考えさせた。その際、生徒が実際に操作し観察できるようにかぞえ札と計算板に見立てた画用紙を与えた。【写真3】

自分たちで考えたかぞえ札を用いた計算の方法を発表してもらい、その後、教師が実際にはどのように用いられていたかを示した。

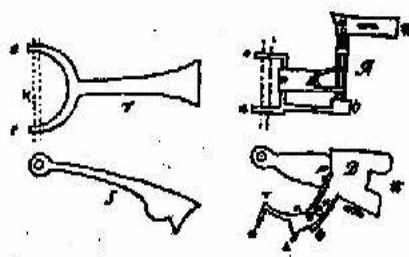
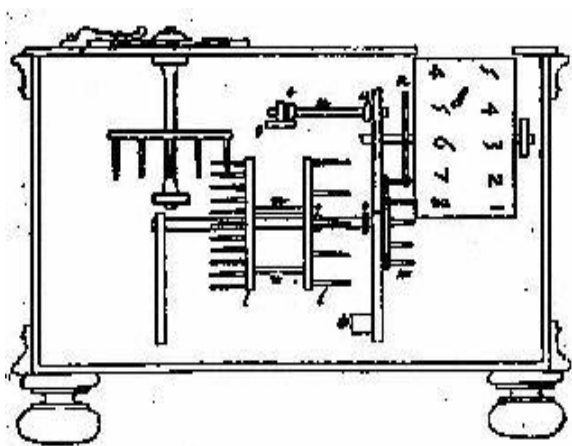
次に、なぜパスカルが計算機を発明しようとしたのかということの説明をした。そして、パスカルが計算機を発明しようとした動機でもある税の計算の大変さを生徒自身にも感じさせるため、かぞえ札を用いた税の計算を当時の通貨単位で追体験させた。



【図2】
パスカルの計算機

【2時間目】パスカルの計算機

まず、パスカルの計算機について説明し、たし算とひき算を直接計算することができたこと、歯車を用いた仕組みであることを生徒に理解させた。



【図3】

パスカル計算機の仕組み

次に、かぞえ札によるかけ算の計算を生徒に考えさせ、ワークシートを用いて追体験させた。【写真4】

かけ算やわり算のできる計算機を発明した人としてライプニッツを紹介し、ライプニッツが発明した計算機の仕組みを自分たちで考える。(グループ活動)



【写真4】かぞえ札によるかけ算を考える



【写真 5】計算機の仕組みを考える

生徒の活動の進み具合に注意しながら、
【パスカルの計算機を改良することで作
った】

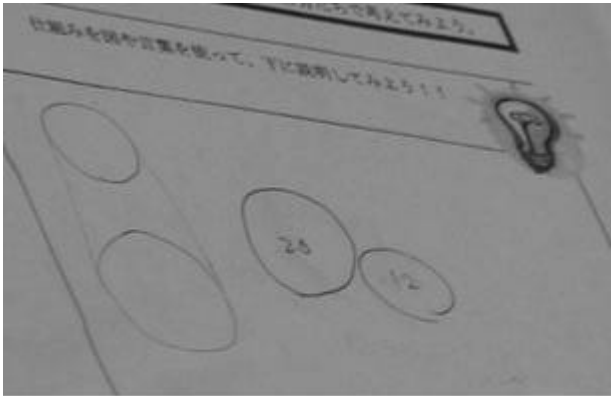
【歯車・ひも(鎖)・滑車を使った構造だっ
た】

【問題によって、使う歯車を変えた】

【ライプニッツが用いた仕組みをみんな
はよく知っている】

という順でヒントを与えていった。

時間を見て、生徒に自分たちの考えを発表させた。



【写真 6】生徒の記述

教師 :では、ここで出てきた考えを発表
してもらいます。

生徒 a :計算したい数の分の歯がついてい
る歯車を使う。

教師 :じゃ、他に何かない？

生徒 b :回していると答えになるような歯
車を使う。

生徒 c :計算した数の分の歯がついている
ってどういうこと？表したい数が
4 だったら、4 つ歯があるって
こと？

教師 :そういうこと？

生徒 a :そうだと思います。

教師 :では、他には？

- 沈黙 -

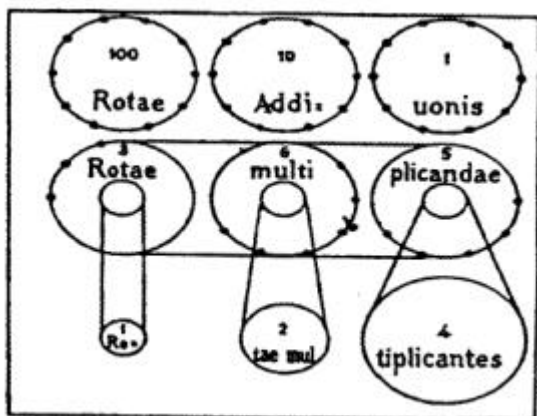
教師 :それでは、この 2 つをみんなの
考えとしましょう。

出てきた意見をクラスの意見としてまとめ、次の授業でライプ
ニッツが考えた仕組みと比べて見ることにした。

【3 時間目】ライプニッツが発明した四則計算のできる

る計算機の仕組みを理解し、その中に数学的な発想が潜んでいたことを見つける。

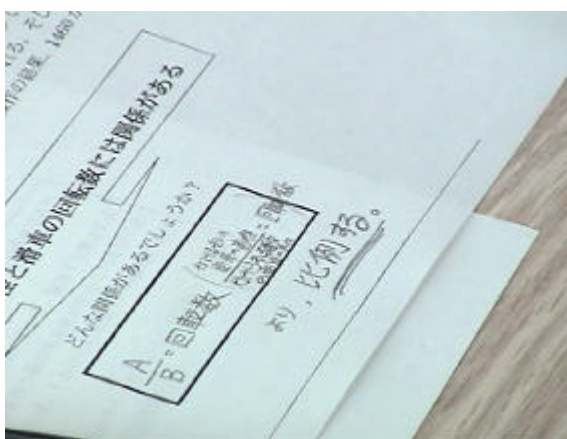
まず、ライプニッツが考えた四則計算のできる計算機の仕組みを理解することから始めた。そして、前時において自分たちで仕組みを考えるという活動のときに与えたヒントがどういうことであったかということと結びつけながら、解説した。そして、前時のクラスの意見と比較した。次に、 365×124 という具体的なかけ算を扱い、どのような仕組みになっているかを説明し、生徒に理解させた。



【図 4】

ライプニッツの計算機の仕組み

ライプニッツの計算機の仕組みの中に潜んでいる数学を生徒に考察させた。そして、その関係が身近なところにはないか生徒に考察させた。



【写真 7】生徒の記述

教師 : 歯車の半径と滑車の回転数にはどんな関係がある？

生徒 : 比例の関係があると思う。

教師 : 他には？

沈黙

教師 : そうだね。歯車の半径と滑車の回転数には比例の関係があるんだね。では、このような数学的な発想である比例の概念を使ったものが身近なものにないだろうかということを考えてほしいと思いますが・・・。

生徒 : 自転車！！

教師 : そう、みんながよく知っている自転車には数学的な発想である比例が潜んでいるんだね。

生徒たちは、自転車の中に数学があるということを認識し、驚いている様子だった。

3日間の授業で学習したコンピュータの発展と数学との関わりについて、昔のコンピュータの中に潜んでいる数学的な発想が別なものの中に今でも使われているということについてまとめた。生徒は、この2点を認識したことで驚いているようであった。

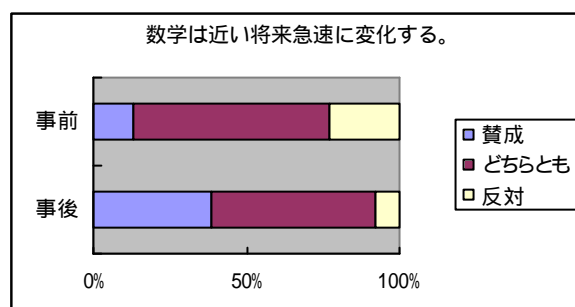
最後に、事前アンケートとの比較により生徒の数学観の変容を見るために、3日間の授業の感想と事後のアンケートを行った。

4. 結果・考察

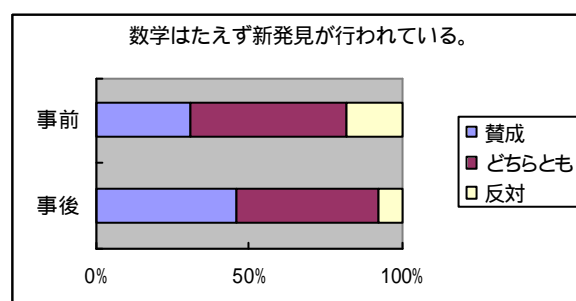
課題 1：生徒は、数学が人の営みの中に存在し、発展してきたと認識することができるか。

授業前、授業後アンケートより

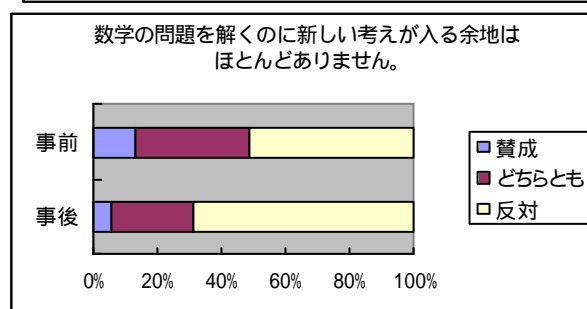
数学は近い将来急速に変化する。			
	賛成	どちらとも	反対
事前	5(12.8%)	25(64.1%)	9(23.1%)
事後	15(38.5%)	21(53.8%)	3(7.7%)



数学はたえず新発見が行われている。			
	賛成	どちらとも	反対
事前	12(30.8%)	20(51.3%)	7(17.9%)
事後	18(46.2%)	18(46.2%)	3(7.6%)



数学の問題を解くのに新しい考えが入る余地はほとんどありません。			
	賛成	どちらとも	反対
事前	5(12.8%)	14(35.9%)	20(51.3%)
事後	2(5.2%)	10(25.6%)	27(69.2%)



アンケートの結果から、生徒は今まで数学を断片的に捉えていたが、数学とは発展してきたものであり、これからも発展していくものであると捉えるようになったといえる。このような結果が得られたのは、授業において、コンピュータの発展とともに数学が発展してきたことを生徒が認識するよう

に指導を行ったからではないかといえる。

授業後の感想より

- ・ 昔の人は便利だと感じたことを学問に利用して解決できて素晴らしいと思いました。
- ・ 昔の人の苦勞が少しわかった。
- ・ 昔の計算機の仕組みなどを知って、昔の人は今よりも頭がいいと思った。
- ・ 数学が発展すると、いろいろな人が助かるので（例えば、パスカルのお父さんみたいな）とてもいいことだと思いました。
- ・ 数学にも発展がある。

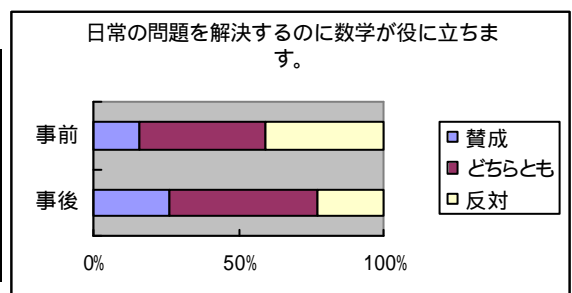
授業後の感想から、生徒は数学を人間の営みと結びつけて考えるようになったことがわかる。数学を単なる学問ではなく、人間の営みであると捉えるようになり、数学史を学ぶことによって今自分が学んでいる数学がどのような位置付けにあるのかを理解するようになった。そして、数学は今まで発展してきたものでこれからも発展していくものであると捉えているように変容している。

以上より、生徒は数学を人の営みと結びつけて考えられるようになり、また、過去の数学、現在の数学、未来の数学を結びつけて考えられるようになったといえるのではないだろうか。

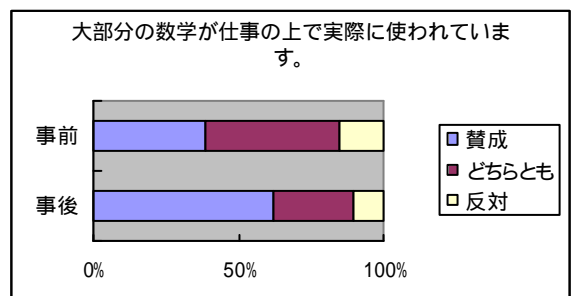
課題 2：生徒は、数学と社会生活との関わりを認識し、数学が果たしている役割について理解することができるか。

授業前、授業後アンケートより

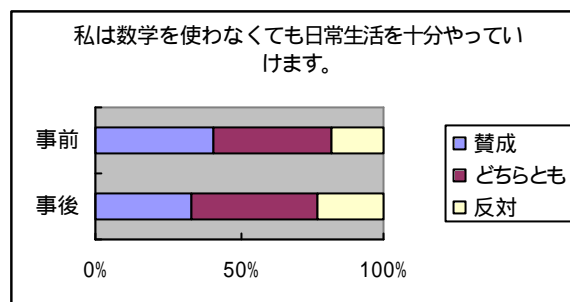
日常の問題を解決するのに数学が役立ちます。			
	賛成	どちらとも	反対
事前	6(15.4%)	17(43.6%)	16(41.0%)
事後	10(25.6%)	20(51.3%)	9(23.1%)



大部分の数学が仕事の上で実際に使われています。			
	賛成	どちらとも	反対
事前	15(38.5%)	18(46.2%)	6(15.4%)
事後	24(61.5%)	11(28.2%)	4(10.3%)



私は数学を使わなくても日常生活を十分や っていただけます。			
	賛成	どちらとも	反対
事前	16(41.0%)	16(41.0%)	7(18.0%)
事後	13(33.3%)	17(43.6%)	9(23.1%)



アンケートの結果から、生徒は、数学と社会生活との関わりを認識するようになったといえる。「日常の問題を解決するのに数学が役立ちます」の質問に「反対」と答えた生徒が授業前では 41.0%もいたのに対して、授業後では 23.1%と 2 割近くも減少している。また、「大部分の数学が、仕事の上で実際に使われています。」の質問に「賛成」と答えた生徒は、授業前 38.5%だったのが、授業後では 61.5%であり、2 割以上増加している。このことから、数学を社会（日常）生活と結びつけて考えていなかった生徒が数学と社会（日常）生活との関わりを認識しはじめたことがわかる。このような結果が得られたのは、3 日目の授業の中で意図的に数学的な発想が身近にあることを生徒に気づかせるような発問を行ったからであるといえる。

授業後の感想より

- ・ 計算機が昔、このように複雑に作られていたことにびっくりした。そして、その発想もスゴイと思った。数学は日常にも影響することを知った。
- ・ 計算機の起源とかはじめて知った。よく考えると機械は数学がなかったら動かないことを思った。
- ・ 自転車が数学だったのははじめて知った。
- ・ 自転車も数学の一部だとはびっくり。

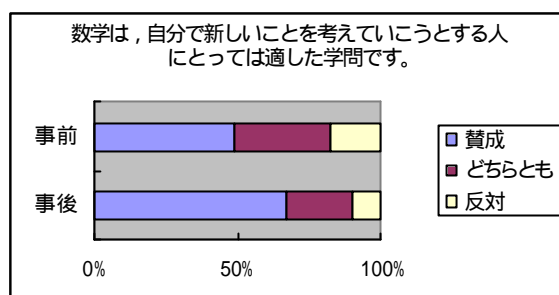
授業後の感想から、生徒は自分たちの身近なところに数学が関わっていたことに気が付き、驚きを感じている。そして、数学と社会生活が深く関わっていることを認識するようになっていくことがわかる。また、「よく考えると機械は数学がなかったら動かないことを思った。」という意見を書いている生徒もいる。数学が社会生活の中で果たしている役割を理解するようになっていくことがわかる。

以上のことから、生徒は、数学と社会生活との関わりを認識するようになり、数学が果たしている役割について理解できるようになったといえる。

課題 3：生徒は、数学に対する興味・関心を高め、数学を活用する態度をもつことができるか。

授業前、授業後アンケートより

数学は、自分で新しいことを考えていこうとする人にとって適した学問です。			
	賛成	どちらとも	反対
事前	19(48.7%)	13(33.3%)	7(18.0%)
事後	26(66.7%)	9(23.1%)	4(10.2%)



アンケートの結果から、生徒は、数学を新しいことを考える際に活用する学問であると捉えるようになったということがいえる。これは、計算機のはじまりを題材に取り上げ、計算機を発明し、さらに改良する際に数学が用いられていることを生徒に実感させるような指導を行うように心がけたからではないかといえる。

授業後の感想より

- ・ 頭を使ったけど、たまにはこういうのもいいかな。
- ・ 分かりやすかったし、今まで考えたことのないようなことについて考えることができてよかった。
- ・ けっこう計算機の仕組みとか難しいところもあったけど、分かるとおもしろいと思った。いつもの数学とは違って、公式とかそういうのではなくおもしろかった。
- ・ 公式を覚えるだけが数学じゃない。
- ・ 歯車、滑車という物理に近いものの性質を数学と結びつけて計算機のようなものができるということをはじめて知った。
- ・ 数学って実はおもしろいかも。

授業後の感想から、生徒は今まで自分たちが学んできた数学と比べて数学の楽しさについて再認識していることがうかがえる。この授業では、生徒の追体験を重視し、数学的活動を取り入れた。「頭を使ったけど、たまにはこういうのもいいかな」と感想を述べた生徒は、考えることの楽しさを再認識しているがわかる。また、「いつもの数学とは違って、公式とかそういうのではなくおもしろかった。」「公式を覚えるだけが数学じゃない。」「数学って実はおもしろいかも」と感想を述べた生徒は数学の面白さを再認識し、数学に対して興味や関心を持つようになったことがわかる。このよう

な結果が得られたのは、実際に生徒が操作し、観察するような活動を授業の中に取り入れたり、生徒が自由に考えるような問題を与えたりしたからだといえる。

以上より、この授業を通して、生徒は、「自分で考える」ことの楽しさを再認識し、数学に対する興味や関心を持つようになったということが出来る。また、生徒は、新しいことを考える際に数学を活用しようとする意識をもつようになったといつてよいだろう。

5 . おわりに

2003 年度より学習指導要領(1999 , pp.1 ~ 39)^[9]の改訂に伴い高等学校で「数学基礎」が新設される。その目標は、「数学と人間のかかわりや、社会生活において数学が果たしている役割を理解させ、数学に対する興味・関心を高めるとともに、数学的な見方や考え方のよさを認識し数学を活用する態度を育てる。」である。このような目標に対して本研究で取り上げた数学史を用いた授業が数学と人間の文化的営み・社会生活とのかかわりを認識させ、数学に対する興味・関心を高めることに効果的であることから、本研究は数学基礎において一つの示唆を与えることができると考える。

謝辞

研究授業の実施に際して、茗溪学園の黒澤紀久先生、内窪洋子先生、尾島義之先生をはじめ、数学科の先生方に貴重なご意見・ご協力をいただき、また茗溪学園の諸先生方にもご協力をいただきました。厚く御礼申し上げます。

注 1) 本研究は、筑波大学学内プロジェクト研究(助成研究 B : 研究代表者 磯田正美)「インターネット上の数学博物館の開発・評価研究」の一貫として行われた。

注 2) 授業の詳細、並びに資料は次に掲示している。

[http : //www.mathedu-jp.org](http://www.mathedu-jp.org)

(引用・参考文献)

【1】国立教育研究所紀要 第 129 集「NIER < 学力を考える > (1999 ~ 2000)」国立教育研究所 pp.43 - 77

【2】磯田正美(2001)、「世界の教育課程改革の動向と歴史文化志向の数学教

育 代数・幾何・微積 For All プロジェクトの新展開」筑波大学数学
教育学研究室 pp.95 - 98

- 【3】磯田正美(2002)、「課題学習・選択学習・総合学習の教材開発～数学する心を育てる～」明治図書，序章
- 【4】磯田正美・土田知之(2001)、「異文化体験を通じての数学の文化的視野の覚醒；数学的活動の新たなパースペクティブ」第25回日本科学教育学会年会論文集、pp.497 - 498
- 【5】神長幾子(1985)、「高等学校における微積分に関する一考察～微積分学形成の歴史をふまえて～」昭和59年度波大学大学院教育研究科修士論文
- 【6】磯田正美(2001)、「数学的活動論，その解釈学的展開」第34回日本数学教育学会論文発表会論文集 pp.223 - 228
- 【7】Pascal .Texte etabli,presente et annote par Jacques Chevalier (1954)、
OEuvres completes , Gallimard
- 【8】D.J.Struik(1969)、「A source book in mathematics」Harvard
University Press pp.173 - 181
- 【9】文部省(1999)、「高等学校学習指導要領解説 数学編 理数編」
pp.1 - 39

(上記以外の授業資料作成における参考文献)

- ・パスカル著；伊吹武彦・中村雄三郎・松浪信三郎(他)訳(1978)、「パスカル全集第 1～第 7 巻」人文書院
- ・田辺保全訳・編著(1980～1984)、「パスカル著作集 1～7・別巻 1～2，教文館
- ・スチュアート・ホリングデール著；岡部恒治監訳(1993)、「数学を築いた天才たち(上)(下)」講談社
- ・J.M プラン著；塩浦政男訳(1974)、「ソロバンの歴史：計算法の変遷」みすず書房
- ・B.コーエン編集；村上陽一郎(1993)、「世界科学史百科図鑑 2」，原書房
- ・内山昭著(1983)、「計算機歴史物語」岩波書店
- ・P.フィンスター・G.フィンデンホイフェル；沢田茂監修(1996)、「その思想と生涯より ライプニッツ」シュプリンガー・フェアラク東京