

透視図法を題材とした幾何の授業実践 - 原典を利用した教材開発 -

筑波大学大学院修士課程教育研究科
丸野 悟

要約

1. はじめに
 2. 研究目的・方法
 - (1). 目的
 - (2). 方法
 3. 授業概要
 - (1). 教材について
 - (2). 授業環境
 - (3). 授業展開
 4. 結果と考察
 5. おわりに
- 平成 15 年度からの高等学校における科目「数学基礎」の新設をうけ、情意面など生徒の数学観の形成に関わる指導方法は今後更に注目されると考えられる。
- そこで筆者は数学基礎にみられる「数学と人間の活動」と「身近な事象の数理的な考察」という2つのキーワードに焦点を当て、生徒の数学への興味・関心の向上を図るという目的でルネサンス期の画家による透視図法を扱った一次文献を利用したテキスト教材を開発した。そして、それを用いた授業実践を行った際の生徒の反応から数学に対する興味・関心の向上を見てとることができ、開発した教材の効果が確認された。

1. はじめに

“数学嫌い”の増加が問題となるなか、小・中学校を中心に算数・数学的活動の楽しさを味わわせることや算数・数学的な見方・考え方のよさを認識させることなど、数学学習における生徒の情意面を意識した指導方法が話題となっている。高等学校では平成 15 年度の学習指導要領改定から新設科目「数学基礎」が実施されるが、その目標には「数学と人間とのかかわりや、社会生活において数学が果たしている役割について理解させ、数学に対する興味関心を高めるとともに、数学的な見方や考え方のよさを認識し数学を活用する態度を育てる」という文言が掲げられている。

その内容項目の一つである「数学と人間の活動」という言葉からは、数学のもつ人の営みとしての側面を強調することで生徒の数学観の形

成に寄与しようと考えていることが伺える。具体的な方策のひとつとして「数学史」の利用が提案されているが、歴史的な原典（一次文献）の利用に関して磯田(2001)は「それぞれの数学を、その数学が使われた文化、時代の文脈において、解釈し、そのよさを相対的に吟味することを通じて、その時代の人の文化的営みを認める活動、そして、そのような解釈、吟味を通じて、現在我々の学ぶ数学が一つの文化であることを認める活動は、数学を人間の文化的営みとして体験する活動の典型である。その解釈、吟味の対象にできるのでは、真正の歴史資料である一次文献、そしてその時代の道具(言語表現、用具など)なのである。」と述べている。

また内容項目「社会生活における数理的な考察」においては「身近な事象の数理的な考察」などを挙げ、生徒が数学もしくは数学的な考え方の有用性を感じ得ることを強調している。数学の知識と事象との結びつきは、高校数学などその抽象度(抽象の階層)が増すにつれて弱くなると言われており(磯田,1992)、筆者も高校数学と身近な事象とのつながりを認識できるような機会を設けることの必要性を強く感じている。

そこで今回は、「数学と人間の活動」と「身近な事象の数理的な考察」の2つをキーワードに生徒の数学観の形成において一つの因子となるであろう“数学への興味・関心”の向上について焦点を当て、研究に取り組んだ。

2. 研究の目的・方法

(1). 目的

この研究の目的は、以下の課題に対する答えを得ることである。

課題1 . 透視図の描き方を示す原典の図を解釈する活動を行うことで、数学のもつ人の文化的営みとしての側面を認識し数学への興味・関心を高めることができるかどうか。

課題2 . 自分たちが学校で学ぶ数学が透視図法という絵画の技法の中に潜んでいるということを体験することで、数学への興味・関心を高めることができるかどうか。

(2). 方法

透視図法を題材に開発したテキストを用いて授業実践を行い、各授業時間後の生徒の感想、ビデオによる授業記録等に基づき考察を行う。

3. 授業概要

(1). 教材開発

開発したテキストは3冊(各時間1冊)から成り、課題1に対して1時間目のテキストを、課題2に対して2・3時間目のテキストを作成した。1時間目のテキストでは原典としてデューラー(Albrecht Durer, 1471 - 1528)の『**Unterweisung der Messung**(測定法教則)』とピエーロ(Piero della Francesca, 1420? - 1492)の『**De Prospectiva Pingendi**(画家の透視図法について)』を取り上げ、前者から透視図法で絵を描くための器具の挿絵を、後者から正方形、正八角形の透視図を描く方法を示した図を用いた。歴史的な原典を用いることでルネサンス期の画家達が行った透視図法の研究に生徒が思いをはせることが出来るよう配慮した。2時間目のテキストでは前時で扱った『**De Prospectiva Pingendi**』の図に示されている透視図の描き方をもとに、平行な直線群が透視図においては1点で交わる直線群として描かれるということを、そして3時間目のテキストでは放物線が透視図においては楕円として描かれるということを話題とした。透視図を、生徒にとって身近な概念である座標を用いて探究することで、こんな所にも私たちの学んでいる数学が潜んでいるのかという驚きをねらって問題の設定を行った。なお、3時間目では Cabri Geometry (以下カブリと呼ぶ)で作成したファイルも用いた。3時間目の内容で、楕円の標準形についての知識が必要であるため事前課題で扱い、そこで円錐の切断面に現れる円錐曲線についても簡単に触れた。

また、透視図法に関して先行する開発教材には、透視図とそのもとになる投影図の両者から3次元と2次元との間の幾何学的関係をよみとり、それらに基づく推論を進めてゆく活動を意図した画法幾何教材(引場, 2000)などがある。

(2). 授業環境

日時: 平成13年12月17日, 18日, 19日(50分×3)

事前(12月15日)に50分程度のカブリの講習会を実施

対象: 茨城県私立高校2学年(1クラス 19名)

準備: プロジェクター, コンピュータ(Windows), 小型カメラ(Quick Shot), 作図ツール(Cabri Geometry), 透視図を描くための器具(原典中の挿絵をもとに作成したもの), 授業テキスト, 事前課題, 授業記録用のデジタルビデオカメラ等。

(3). 授業展開

【1時間目】 透視図法の研究

目標：原典の挿絵や図を解釈する活動により当時の画家達が行っていた透視図法の研究を体験することを通して、数学の人の文化的な営みという側面を意識し興味関心を高めることができる。



導入：左の絵画作品(「理想都市」1475年、
ピエーロ・デッラ・フランチェスカ
<http://www.kfki.hu/~arthp/html/p/piero/francesco/idealcit.html>)の提示から、
ルネサンス期の絵画の特徴である
透視図法について導入を試みた。

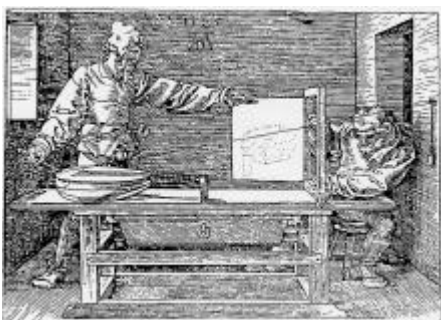
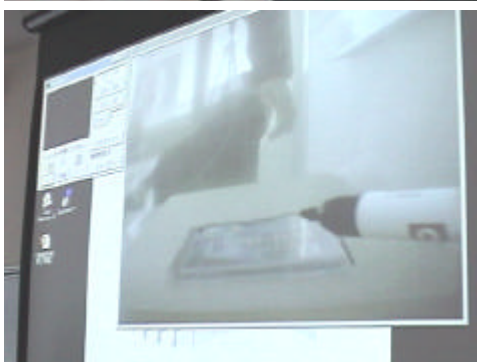
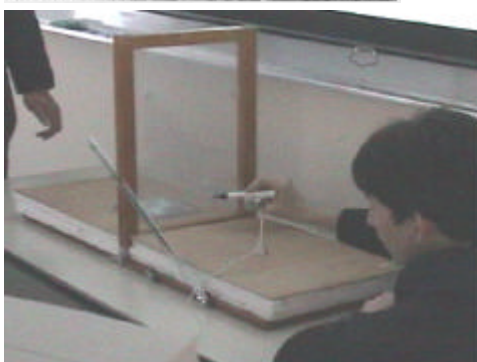


挿絵

§ 1 : 『Underweysung der Messung』

挿絵 中の二人が何をしているのかを問いかけた後、透視図を描くための器具を提示した。椅子に座っているモデルの代わりに CD のケースを、右の画家の目の代わりに小型カメラを置き、カメラから見えている映像をスクリーンに映し出した。そして器具の透明板の部分に OHP シートを重ね、CD ケースの輪郭が見えているところをマジックでなぞり、透視図が台形の形に描かれるということを演示した(左写真)。

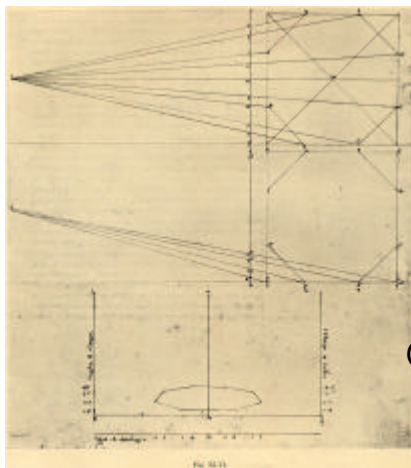
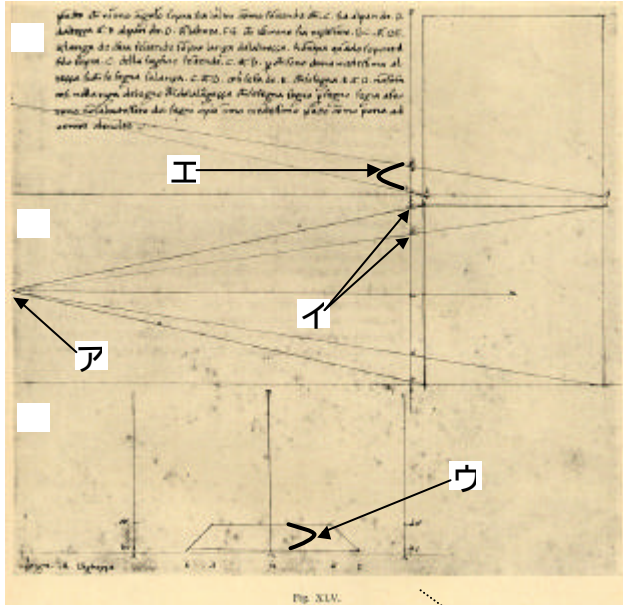
次に挿絵 についても同様の問いかけをした。この挿絵では、右側の壁上の一点から左の人物が楽器に当てている棒のようなものの先端へ伸びているまっすぐな糸が人間の視線に対応していることから、透視図を描く仕組みを生徒が理解する助けとなるであろうと考え提示をした。



挿絵

この § 1 は、本時の焦点である § 2 での活動の手がかりとなるように位置付けた。

(図)



(~ ,
 ア ~ エは
 後から加
 えたもの)

(図)

図 の仕組みを発表

「えーと、これ(部分)が、これ(部分)を上から見たところで、これ(部分)が横から、この高さ(ウ)が、この高さ(エ)になって、それで、実際こう見たときに...、本当は正方形なんだけど、見たらこう台形に見える。」



§ 2 : 『De Prospectiva Pingendi』

左の図 が何を示しているのかを解釈する活動が本時の焦点である。2, 3人のグループを作り生徒たちは考えを出し合いながら図の解釈を進めていった。

図 を解釈中

- A : ここ(ア)から見て、...
- B : そう、ここから見てっていう感じだね。
- A : (テキストを手に取り、図 をねかせて真横から見てみる。)
- B : そうだよ、そうだ。わーOOちゃん天才！



- B : (図 部分の台形を指差しながら,) こういうふうに見えた？
- A : (うなずく。)
- B : だよねきっと。あっ、そうだよねこの点(ア)から見て、これ(イ)をこうとって言って、でも...
- A : これ(部分)は何をしているんだろう？
- B : 謎ですよね...。こっち(図)にしよう、こっち。
- A : こっちは分かりやすい。

最後に、これら原典の図が示す内容である「視点と描く対象と画面に関しての“真横から見たところ”と“真上から見たところ”の2つの図面があれば、その対象の透視図を描くことができる」ということを確認して1時間目を終えた。

【2時間目】 私たちの数学で探究(1)

目標：平行な直線群が透視図においては一点で交わる直線群として描かれるということ、座標と透視図の考え方をを用いて明らかにすることを通して、数学への興味・関心を高めることができる。

原典の図の3つの部分に座標軸を設定し、下図のように視点Aからxy平面上の点Q(s,t)を見た時の画面(xz平面)上の透視図が点P(x,z)であるとして考える。

< 部分 > AからQへの視線

< 部分 >

< 部分 >

関係式 $\begin{cases} x = \frac{s}{t+1} \\ z = \frac{2t}{t+1} \end{cases}$

§1：点の見え方

前時の図内に座標軸を設定して視点(これをAとおく)の座標を与え、平面上の点Qが透視図(これを点Pとおく)として画面上のどの位置に描かれるかを解析的に求めた。

§2：平行線は、交わる。

左下図の(問)のような状況のとき透視図法の考え方をを用いるとどのような図が描かれるだろうか、まずは生徒に予想をしてもらうことで問題意識を高めさせた。次に§1で求めた点Qの透視図(点P)の位置を表す関係式(左内)をもとにして、直線の透視図を、点Qが直線上を動くときの点Pの軌跡として位置付けた。そしてxy平面上の平行な3直線をL1~3として具体的な式を与え、点Qがそれらの直線に沿って視点Aから限りなく遠ざかる場合を極限を用いて計算し、最後に直線の方程式を“ $y = mx + n$ ”と一般化することで傾きが同じ直線群が透視図では一点(消失点)で交わる直線群として描かれるということを確認した。

[一般化] xy平面上の直線Lの方程式が“ $y = mx + n$ ”のとき“ $t = ms + n$ ”であるからL上の点Qのx座標もtの式で表される。点Qが視点Aから無限に遠ざかるときtであるから、その透視図の点P(x,z)は

$$\begin{cases} x = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{t-n}{m(t+1)} = \frac{1}{m} \\ z = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{2t}{t+1} = 2 \end{cases}$$

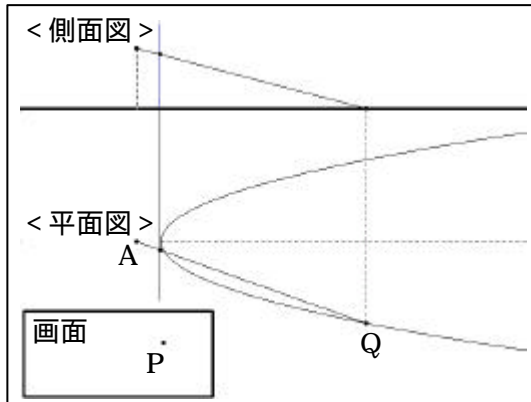
(問) 画面上にはどう見えている？

生徒の反応例



【3時間目】 私たちの数学で探究(2)

目標：開いた図形である放物線が透視図においては閉じた楕円として描かれるということ、座標と透視図の考え方をを用いて明らかにすることを通して、数学への興味・関心を高めることができる。



§ 1：放物線はどう見える？

前時の§ 2と同様にまず生徒に予想させて問題意識を高めさせた。そして1時間目で解読した原典の図 にならって授業者が作成したカブリのファイル（左図中で放物線上の点Qをドラッグすると、画面中の点Pが軌跡を描くというもの）を用いて実際にはどのような透視図が描かれるのかを実験した。

カブリで実験



生徒：「あっ、丸!？」

放物線が縦方向につぶれたような開いた曲線に見えると予想していた生徒が、カブリによる実験で閉じた図形(楕円の一部)が描かれたのを見て驚きの表情を見せた。

§ 2：計算で解を求めてみよう

透視図に描かれた図形が楕円（正しくは楕円の一部）であることを、計算の容易な $y = x^2$ の場合について確認させた(前時の“関係式”を s, t について解き $t = s^2$ に代入すると x と z による楕円の方程式が得られる)。

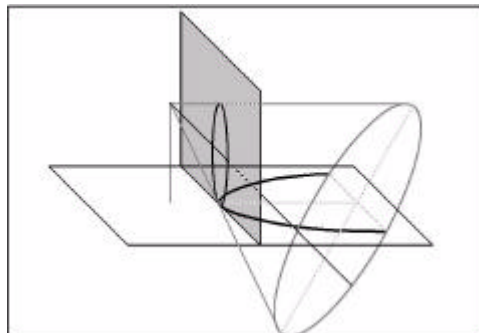
そして、他の放物線の場合はどうであるかをカブリで実験させた（先ほどのファイルに加えて、授業者が作成しておいた）。これは、放物線の軸の向きや見る視点の位置などを変えてもその透視図は楕円の形に描かれるということに関心をもたせ、その理由付けの推測を促すことを意図したものである。

放物線と楕円の関係は何か、両者の“つながり”は？ という問いを投げかけてしばらく



生徒：「あ～あ。」

答えの円錐の図(右)を見て、納得の表情を浮かべる生徒。



考える時間を取った後、その答えをパワーポイントで提示して授業は終わった。

4 . 結果と考察

(1). 課題 1 に対する考察

課題 1 透視図の描き方を示す原典の図を解釈する活動を行うことで、
数学の持つ人の文化的営みとしての側面を認識し数学への興味・関心を高めることができるかどうか。

(以下に示す生徒の感想のうち、下線部 に注目のこと。)

1 時間目の感想から (下線, 括弧内は筆者)

挿絵や図を通じ、デューラーやピエーロの透視図法の研究を体験しての感想

- ・ たぶん絶対かんがえつかない。すごいと思う。どうしてひらめいたのか教えてほしい。
- ・ とにかくすごい。昔の人はいろんな事を考えているなと思った。
- ・ 面白かった。ああいう風にかけばほんとうに見たまんまかけるからすごいと思った。
- ・ 今まで、絵を描いていても、正方形が台形になってるなんて意識してなかったし、別に何でそーなるのかも考えたことなかったから、おもしろかった。
- ・ 透視を考えた人はすごいと思った。ありのままを書くという方法はいろいろあっておもしろかった。
- ・ 考え出した人すごいなあと思う。あの図をかくことで、正確な長さとか、形とかがはっきりわかるし。

1 時間目の感想 (どんなことでもよいので自由に書いてください。)

- ・ 透視図法のいろんなやり方を昔の人はよく考えついたもんだと思った。おもしろかったです。
- ・ 左の図(図 を指している)とか何を表しているのかとか考えて発想することがけっこうおもしろいと思った。
- ・ おもしろかった。いろいろと考えられたし、話合ったりできたから。

これらの感想から、原典内の図を解釈する活動を通じ、生徒はその原典の著された時代へ思いを馳せながら当時の人々の営みである数学を意識し、文化としての数学へ興味・関心を示していったことが伺える。

以上から、透視図の描き方を示す原典の図を解釈する活動を行うことで、数学の持つ人の文化的営みとしての側面を認識し数学への興味・関心を高めうるということが言える。

(2). 課題 2 に対する考察

課題 2 . 自分たちが学校で学ぶ数学が透視図法という絵画の技法の中に潜んでいるということを体験することで、数学への興味・関心を高めることができるかどうか。

(以下に示す生徒の感想のうち、下線部____に注目のこと。なお下線部____は課題1への考察にも関わる。)

2 時間目の感想から (下線は筆者)

ルネサンス期に研究されたこの透視図法の考え方をもとに、皆さんが学校で学んでいる“数学”を使って探究をしたことについての感想

- ・ 授業で習ったことをこんな所で使うと思わなかった。透視図法ってやっぱりすごい。
- ・ 数学でちゃんと説明がつくことにおどろいた。すごいなあすごいなあ。誰がはっけんしたのかわからないけどみつけた人はぜったい天才だなとおもった。
- ・ 普段見ている現象なのに、想像しにくかった。数学の歴史は奥が深い。当時の数学者たちも同じ様に考えたと思うと、その当時にタイムスリップした気分になった。この技法を、よく考えついた人がいるものだ。もっと簡単にわかるように完成されていたらよかったと思う。
- ・ 論理的に表したものが数学なのかなあって思いました。こんなに身近なところに C が出てくるなんて思いもしませんでした。すばらしいと思いました。感動的です。
- ・ 数学のグラフとかもこういうふうに授業が進むとおもしろいのにと思った。

2 時間目の感想 (どんなことでもよいので自由に書いてください。)

- ・ こんな所で極限が出てくるなんて全く考えつかずかったです。でも、楽しくできました。おもしろかったです。頭もカタクならず、やんわりとした感じでたのしかったです。もっとじっくりやってみたかったです。
- ・ 時間がまにあってなかったけど、数学でちゃんとこういうことがいえるんだな—とすごくおもしろかった。

普段の数学の授業で学習しているような内容が、透視図法という一見数学との関わりが薄いと思われるようなものの中にも潜んでいるということを知り、驚きの反応を示した生徒が見られる。また、透視図法の考え方がカメラで写真を撮影することの幾何学的なメカニズムや我々の日常の視覚的な経験を説明する理論などに通ずることからも、自分たちの数学で「身近な事象」を考察することができるのだということを改めて認識したときの驚きは、生徒にとって大きなものであったのではないかとと思われる。“難しかった”の声をあげる生徒も多数見られたことは確かだが、そのような生徒も含め、事象に潜む数理への興味・関心を示した生徒がいたことは確かである。

3 時間目の感想から (下線は筆者)

Cabri Geometry を使って探究したことについての感想

- ・ おもしろかった。軌跡が意外な形になった。ふだんノートをななめから見ると台形に見えるはずなのに、頭の中で長方形におきかえて考えてしまっていることに気がついた。

- ・いろいろな図形がみられておもしろかった。円錐になってとってもびっくりしました。OO錐を切った形というのがびっくりした。たのしかった。いろいろとやれて。

3 時間目の感想 (どんなことでもよいので自由に書いてください。)

- ・Lim x などが、こんなところで役に立った。放物線だけでなく、いろいろなグラフを透視図でみてみたくおもった。
- ・スライドを使った授業がわかりやすかった。でも、数学はやっぱりむずかしいです。考えることが多く、いろいろと話し合えてたのしかったです。なんだか驚きの連続でした。
- ・数学にもとづいて絵を書くなんておもわなかった。すごいなあと思った。最後の最後に円すいが出てきたときはものすごくうれしかった。
- ・最後の円すいが大感激でした。

放物線の透視図が意外にも楕円として描かれたということや、そのメカニズムが生徒のごく身近な空間図形である円錐によって解明できるということへの驚きからも、思考活動としての数学の面白さや、数学と事象との結びつきを再認識し、数学への興味・関心を向上させていったことが伺える。

以上から、自分たちが学校で学ぶ数学が透視図法という絵画の技法の中に潜んでいるということを体験することで、数学への興味・関心を高めうるということが言える。

5 . おわりに

今回扱った内容は数学 A, B, C も関連するが、領域に関わらず、数学基礎における「数学と人間の活動」や「身近な事象の数理的な考察」などのキーワードから生徒の数学への興味・関心の向上という観点で数学指導のあり方を検討することは今後も注目されてゆくのではないかとと思われる。

また、今回は考察の対象としなかったが、数学の学習過程において作図ツール Cabri Geometry が担いうる役割についてもさらに検討してゆく必要がある。カブリを操作することに十分慣れていないと、生徒は数学的活動におけるカブリの寄与に対してではなく、軌跡やトレースといった「カブリの機能」そのものに対する感想や評価を持つにとどまる傾向が強い。生徒の数学への興味・関心の向上をねらった学習におけるカブリの“効果的な”生かし方の検討と、その実践検証が今後の課題ではないだろうか。

謝辞

今回の研究授業を行うにあたり、私立茗溪学園の尾島義之先生、黒澤紀久先生をはじめ、数学科の先生方に貴重なお時間と、教材についてのご指導をいただきました。厚く御礼申し上げます。

註1) 本研究は、筑波大学学内プロジェクト研究(助成研究B:研究代表者 礒田正美)「インターネット上の数学博物館の開発・評価研究」の一貫として行われた。

註2) 授業の詳細、並びに資料は次に掲示している。

<http://www.mathedu-jp.org>

【引用・参考文献】

- ・ 文部省(1999)．高等学校指導要領解説
- ・ 礒田正美(2001)．文化的営みとしての数学教育～その方法としての数学史上の一次文献の利用～，教育科学数学教育 No524，p 106 p 109 明治図書
- ・ 礒田正美(1992)．数学の活用力育成への知識論的接近 数学的モデル化と思考水準，知識転移をめぐって，教科教育学の創造 創る視点と探る視点，p 62 - p 77 東京書籍
- ・ Durer, The painter's manual. (Translated by W.L.Strauss, 1977). Abaris Books
- ・ Piero della Francesca (1942, Nicco-Fasola). De prospectiva pingendi, G.C.Sansoni
- ・ 引場道太(2000)．テクノロジーを用いた空間図形指導に関する一考察～画法幾何教材の再考～，筑波大学大学院修士論文

【上記以外に授業に際して参考にした文献】

- ・ 礒田正美(2001)．異文化体験からみた数学の文化的視野の覚醒に関する一考察 隠れた文化としての数学観の意識化と変容を求めて，筑波数学教育研究第20号，p39 p48
- ・ ガスパール・モンジュ(1990, 山内一次 訳)．図法幾何学，山内一次遺稿刊行会