

# 複素数の歴史にみる虚数を実体化する学習

～ 歴史的原典を利用した解釈学的営み～

筑波大学大学院修士課程教育研究科  
小松 孝太郎

## 章構成

1. はじめに
2. 研究目的・研究方法
3. 虚数の実体化の教材化
4. 虚数の実体化の授業概要
5. 結果と議論
6. おわりに

## 要約

数学史を用いた解釈学的営みに基づく授業を行うことにより、「他者の立場の想定」や「自己理解」など生徒の数学観の変容が期待される。そこで本研究では、虚数、複素数平面について考察した数々の数学者の考えとその歴史的な過程に関して、教材開発と授業実践を行った。その結果、他者の立場の想定、現在学んでいる数学の創造的な側面の感得、歴史と現代の知識に関する生産的なつながりの理解などが実現された。

キーワード：解釈学的営み、他者の立場の想定、自己理解、虚数、複素数平面

## 1. はじめに

1996年7月発表の第15期中央教育審議会答申の中で、問題解決能力、豊かな人間性、健康と体力を三本柱とした「生きる力」の育成が提案され、新学習指導要領ではその育成が主たる目標となっている。三本柱の一つである豊かな人間性は、「自らを律しつつ、他人とともに協調し、他人を思いやる心や感動する心など」と定義され、そこでは他者との関わりが重要視されている。ところが日本社会の現状を見てみると、他者との協調性や思いやりの心が生徒の中で豊かになっているとは言いがたい状況である。

また、IEAによって行われたTIMSS（第3回国際数学・理科教育調査）によれば、日本の生徒の92%が「数学でよい成績を取るために必要なこと」として「教科書やノートを覚えること」を挙げている（国立教育研究所，1997）。つまり、ほとんどの生徒が数学を暗記科目としてとらえ、本来の数学の性格である創造性を感得するところまでは至っていない。

磯田（2002a）はこれら二つの問題を重要視し、「他者の立場の想定」、「自己理解」などの四つの基底から成る解釈学的営みを基に数学的活動を論じている。そして数学史を数学教育の中に取り入れる意義について、以下のように述べている。

「実際の歴史上の原典を開き、その原典を記した人の立場や考え方を想定し、その人の心情を重ねて解釈すると、今、自分たちの学ぶ数学が、異なる時代・文化に生きた人々によって、まるで異なる思考様式で研究され、表現されていたことが体験できる。それによって、自分たちが学ぶ数学も生き生きとした人間の営みとして改めて認めなおせるのである。」（磯田 2002b，pp.9-10）

また、学校数学を哲学的、多文化的、学際的観点から捉えた Grugnetti, Rogers(2000)も、「歴史的アプローチによって、数学を静的な結果としてではなく既存を伴った知的な過程として、また世の中から分離して考えられ完成された構造としてではなく個々人が進めていく活動として見なすことができるようになる」(p.45)と述べている。

そこで本研究では、新学習指導要領においては高校数学で学習する「複素数」、また旧学習指導要領においては高校数学 B で学習した「複素数と複素数平面」に関して、虚数、複素数平面について考察した数々の数学者の考えとその歴史的な過程を基に教材開発と授業実践を行った。これに関する先行研究として Hellmich(1989)、Jahnke(2000)、Bagni(2000)があるが、これらの研究は、数学史が数学教育の教材に成り得ることを示しているにとどまっている。それに対して本研究は、それらを教材化するだけでなく前述の解釈学的営みを狙った実践を行うことで、生徒が他者の立場になって考えること、数学の創造的側面の感得など生徒の数学観が変容することを目的とするものである。

## 2. 研究目的・研究方法

### (1) . 研究目的

虚数、複素数平面に関する数々の数学者の考え、またはその考えの過程について生徒が解釈学的営みを行うような授業実践により、他者の立場に立って物事を考える姿勢を生徒の中に育成し、さらに彼らの数学観の変容を図る。

### (2) . 研究方法

上記の目的の達成のために以下の下位課題を設定し、アンケートや授業の感想、また授業の様子を撮影したビデオ等により、下位課題が達成されたかどうかを調査する。

下位課題 : 生徒は虚数、複素数平面が考えられた時代特有の数学を体験し、当時の数学者の立場になって考えることができるか。

下位課題 : 生徒は虚数、複素数平面という数学の題材における多くの数学者の考えを体験することで、現在学んでいる数学を人の営みとしてとらえ、数学の創造的な側面を味わうことができるか。

## 3. 虚数の実体化の教材化

本研究では一次文献を利用してテキストを開発した。主に利用した文献は、Smith(1959)、Struik(1969)、Descartes(1974)である。

虚数は16世紀にカルダノ(1501~1576年)によって初めて考察された。以後、カルダノの弟子のボンベリ(1526~1572年)が計算法則を定義し、オイラー(1707~1783年)などによって虚数の研究は進められた。しかし、当時の数学はギリシャ数学の影響を強く受けており、図示されない数は認められることがなかった。従って、「負数の場合のように\*、

\* ヨーロッパにおいて負の数の図示に成功したのはジラール(1595~1632年)やデカルト(1596~1650年)による。彼らは現代で言う数直線や向き概念を用いることで、負数を視覚的に表現した。

$\sqrt{-1}$ もこれを目の前に図示できるまでは、その理論を十分に展開できることはなかった。それで、ニュートン（1642～1727年）、デカルト、オイラー時代には、「 $\sqrt{-1}$ はやはり代数的虚構とされていたのである」（Cajori 1970, p.357, 括弧内は筆者）

そこで、18世紀末期の主要な問題は $\sqrt{-1}$ の幾何学的表示とその説明であった。一般的に今日の日本、またフランス以外の欧米の国において複素数平面がガウス平面と呼ばれているように、虚数の幾何学的表示に最初に成功したのはガウス（1777～1855年）であると思われる。確かに彼の虚数に対する貢献は非常に大きいものであり、彼が「この数に実数と並び数学における完全に同等な市民権を与えたのである」（Ebbinghaus 1991, p.67）と言われているほどである。

しかし、17世紀に虚数の幾何学的表示に最初に挑戦したウォリス（1616～1703年）の考えを見過ごすことはできない。彼の考えはとても複雑であり、また矛盾したものであったため当時の数学者には受け入れられなかった。しかし、彼の考えは現代の複素数平面に大きな示唆を与えているものとも考えることもできる。

また、実際に虚数の幾何学的表示を最初に発表したのはデンマークの測量家のヴェッセル（1745～1818年）である。1797年に出された彼の論文はデンマーク語で書かれており、当時この言語はほとんど読まれることがなかったため、彼の考えは100年後にフランス語の翻訳が出るまで注目されることがなかった。そのほかにもヴェッセルと同時期に虚数の幾何学的表示に成功した人物として、フランスのアルガン（1768～1822年）という数学者もいる（実際、フランスでは複素数平面はアルガン平面と呼ばれている）。

上述のように、虚数の幾何学的表示に関しては数多くの数学者が関わってきた。それぞれの数学者の考えの詳細は、「4 - (2) . 授業展開」において生徒の活動と並行しながら説明することにする。生徒が本授業においてそれぞれの数学者の「 $\sqrt{-1}$ を図示することでそれが真に認められるようにしよう」という立場に立ち、またその数学者たちの考えが歴史的に発展してきたことを学ぶことにより、本研究の目的・課題が達成されるのではないだろうか。

#### 4 . 虚数の実体化の授業概要

##### (1) . 授業環境

###### 対象

- ・埼玉県立高等学校（以下、便宜上U高校とする）

第二学年九名、第一学年二名、文系理系の区別なし、一年生は複素数平面が未習であった。

- ・筑波大学附属高等学校（以下、便宜上T高校とする）

第二学年六名。文系理系の区別なし、複素数平面は未習であった。

いずれも事前に授業参加を希望した生徒を対象とした。

日時

- ・U高校...2002年11月28、29日(60分×3回、放課後)
- ・T高校...2002年12月3、4、5日(60分×3回、放課後)

準備

コンピュータ(Windows)、作図ツール(Cabri Geometry、以下カブリ)、Microsoft Power Point、プロジェクター、授業記録用のデジタルビデオカメラ、授業テキスト、事前課題、事前・事後アンケート等。

## (2) . 授業展開

### < 事前課題 >

一時間目では虚数について最初に考察した数学者といわれるカルダノを挙げ、彼が実際に取り組んだ問題「 $x + y = 10$ 、 $x \cdot y = 40$ を満たす $x$ 、 $y$ を求めよ\*

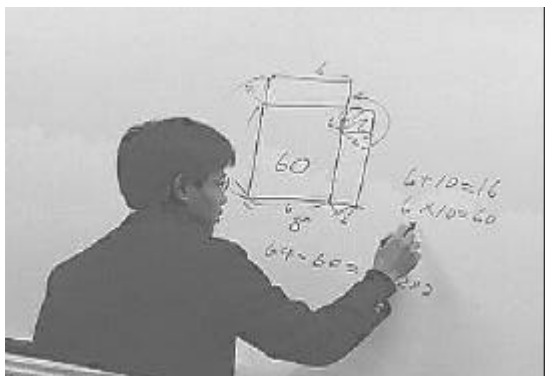
」について考察する。そのため事前課題として、この型の連立方程式で解が実数になる場合「 $x + y = 16$ 、 $x \cdot y = 60$ を満たす $x$ 、 $y$ を求めよ」を与えた。現在であれば、この連立方程式は代入法により一変数の二次方程式にすることで解かれるのが一般的であり、実際、すべての生徒がその方法で解いていた。

#### 解法手順

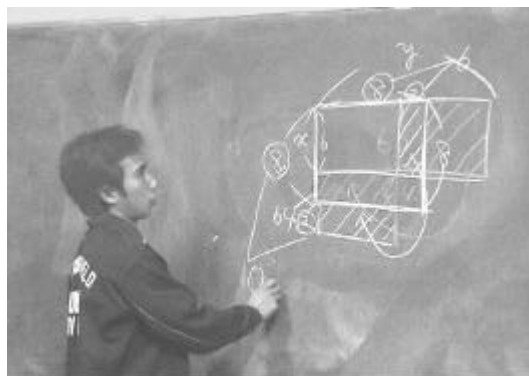
- 16の半分の8をとる。
- 8を平方して64を得る。
- $64 - 60 = 4$
- 4の平方根2をとる。
- $8 - 2$ 、 $8 + 2$ より6と10を得る。
- 答えは6と10である

その後、この形の連立方程式は当時、「縦と横の長さの和が16で面積が60である長方形の縦と横の長さをそれぞれ求めよ」という問題として考えられ、幾何的な操作を根拠とした解法手順が存在していたことを生徒に伝えた。そこで、さらにこの幾何的な操作を発見することも事前課題とした。またこの際、16世紀の数学は古代ギリシャの幾何学を中心とした数学の影響を強く受けており、幾何的に表現されない数学は認められることがなかったことも生徒に伝えた。

### < 一時間目 >



【写真1】 U高校の生徒



【写真2】 T高校の生徒

\* カルダノの時代の数学ではまだ文字が使われておらず、方程式も文章で表現されていた。しかし、授業では便宜上、文字を使って方程式等を表記した。

まず生徒一人を指名し、事前課題の解答を説明してもらった（写真 1、2）。机間指導の際に生徒の解答を見ていた限りでは、ほとんどの生徒が同じ解答をしていた。解法手順は以下の通りである。

- (1) 一辺の長さが 8 である正方形をつくりその面積を求める（手順 1、2）。
- (2) その正方形の面積から余分な面積を正方形として切り抜く（手順 3、4）。
- (3) 図をうまく操作することで面積が 60 の長方形ができ、従って求める縦と横の長さもわかる（手順 5、6）。

その後、カルダノについて原典『Ars Magna』とその英訳を基に授業を行った。生徒は、カルダノが考察した問題「 $x + y = 10$ 、 $x \cdot y = 40$  を満たす  $x$ 、 $y$  を求めよ」を事前課題の解法手順に従っ



【写真 3】

て解き、事前課題の場合と同様にその手順を図示することに挑戦した（写真 3）。U、T 両校の生徒ともに図示することに精力的に挑戦したが、手順 5 で面積が負になってしまうところで行き詰ってしまった。

この問題について考えたカルダノもこの解法手順を図示することができず、ただ計算結果としてだけ  $5 \pm \sqrt{-15}$  を出した。その際、カルダノの示した戸惑い（「精神の苦痛を忘れて…」）を生徒に紹介した。



『Ars Magna』表紙

虚数について考察している箇所

また、三次方程式の解法を導いた数学者としても有名であるカルダノは、方程式  $x^3 = 15x + 4$  について自身が導いた解の公式を使うことにより、解  $x = \sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}}$  を得た。このように解の中に虚数が現れる場合を彼は casus irreducibilis（還元できない場合）として避けたが、 $x = 4$  がこの方程式の解であることもカルダノは知っていた。方程式に実数解があるにもかかわらず

ず「還元できない場合」として避けざるを得ないこの自己矛盾を、彼は越えることができなかった。

しかし、カルダノの弟子であるボンペリは以下のようにしてこの師匠の悩みを解決した。

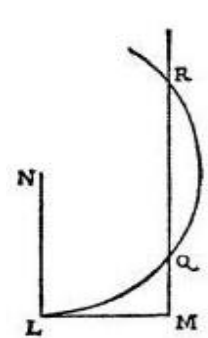
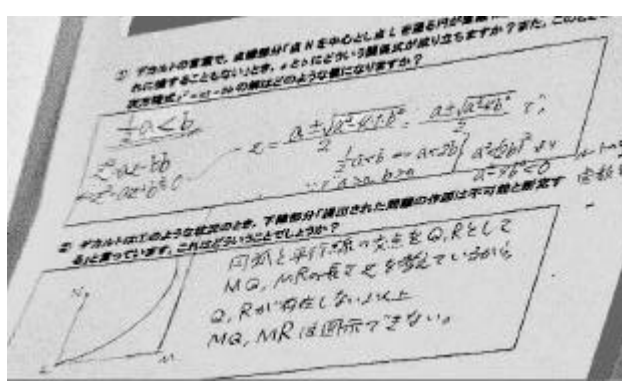
- (1) 虚数に関する 8 つの計算法則 (例 .  $\sqrt{-1} \times (-\sqrt{-1}) = 1$ ) を定義した。
- (2)  $2 + \sqrt{-121} = (2 + \sqrt{-1})^3$ 、 $2 - \sqrt{-121} = (2 - \sqrt{-1})^3$  を導いた。
- (3)  $x = \sqrt[3]{(2 + \sqrt{-1})^3} + \sqrt[3]{(2 - \sqrt{-1})^3} = (2 + \sqrt{-1}) + (2 - \sqrt{-1}) = 4$  になることを示した。

授業では、ボンペリの考えを学ぶ前に補足として「負の数も当時は視覚的に表すことができなかったため認められていなかった」ことを授業者が話した。その後、生徒はボンペリの (文で書かれている) 定義を式に直し、カルダノの解の公式によって導かれた値が 4 になることを確かめた。

一時間目の最後にデカルトについて考察した。デカルトについて考える前に、補足として「負の数は現代で言う数直線 (向き) の概念を用いることで図示に成功した」ことを授業者が話した。

デカルトは自著『幾何学』のなかで二次方程式の解の作図を三つの場合に分けて行っている。その中でも授業では  $z^2 = az - bb$  の形を取り上げた。生徒はデカルトの作図 (図 1) を証明し、その後、授業者が事前に作成したカブリのファイルにおいて方程式の  $a$ 、 $b$  の値を変えることでその作図について考察した。

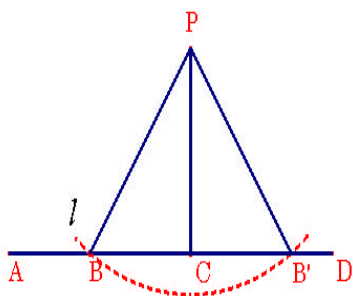
デカルトはこの形の二次方程式の解を作図したあと、「点  $N$  を中心とし点  $L$  を通る円が直線  $MQR$  を切ることも、これに接することもなければ、方程式にはまったく根がなく、提出された問題は不可能と断定することができる」と述べている。生徒はこの意見が何を示すのかについて考えた (写真 4)。

	<p><b>デカルトの作図</b></p> <p><math>NL = a/2</math>、<math>LM</math>、<math>NL</math> で <math>LM = b</math> となるように点 <math>M</math> をとり、点 <math>M</math> から <math>LN</math> に平行な線を引く。このとき、点 <math>N</math> を中心に半径 <math>NL</math> の円を描き、平行線との交点を <math>Q</math>、<math>R</math> とすれば、2 つの長さ <math>MQ</math>、<math>MR</math> は二次方程式 <math>z^2 = az - bb</math> の解を表す。</p>
	<p>【写真 4】</p>

<二時間目>

二時間目は虚数の図示に最初に挑戦したイギリスの数学者ウォリスについて考えた。

ウォリスはデカルトと同様に二次方程式の解を作図するところから始めた。生徒は一時間目と同様に、まずウォリスの作図 (図 2) を証明し、カブリで  $a$  と  $a$  の値を変えることでこの作図について考察した (写真 5)。



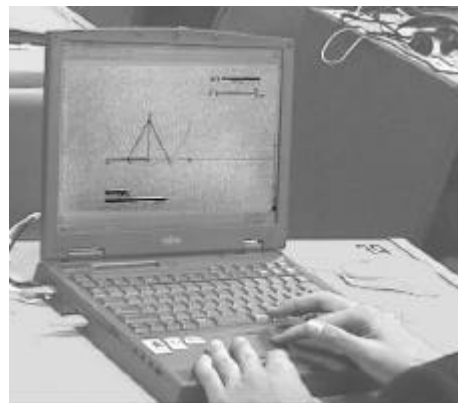
【図2】

### ウォリスの作図

直線  $AD$  上に  $AC=b/2$  となる点  $C$  をとり、 $PC$ 、 $AC$  で  $PC=\sqrt{a}$  となるように点  $P$  をとる。点  $P$  から半径  $AC$  の円弧  $l$  を描き、 $AD$  との交点を  $B$ 、 $B'$  とする。このとき2つの長さ  $AB$ 、 $AB'$  が  $a$  に関する二次方程式  $a^2 - ba + a = 0$  の解である。

### 証明

この二次方程式の解は  $a = b/2 \pm \sqrt{(b/2)^2 - a}$  である。 $CB'$  を求めるために円弧の半径  $PB'$  と  $PC$  の二辺が作る直角三角形に注目する。つまり  $CB' = \sqrt{(PB')^2 - (PC)^2} = \sqrt{(b/2)^2 - a}$  となる。 $CB$  が  $CB'$  と逆向きであることから  $CB = -CB'$  と考え、また  $AC=b/2$  である。よって解は  $a = AC + CB'$ 、 $AC + CB$ 、すなわち  $a = AB'$ 、 $AB$  である。



【写真5】カブリで  $a$  と  $a'$  の値を動かす。

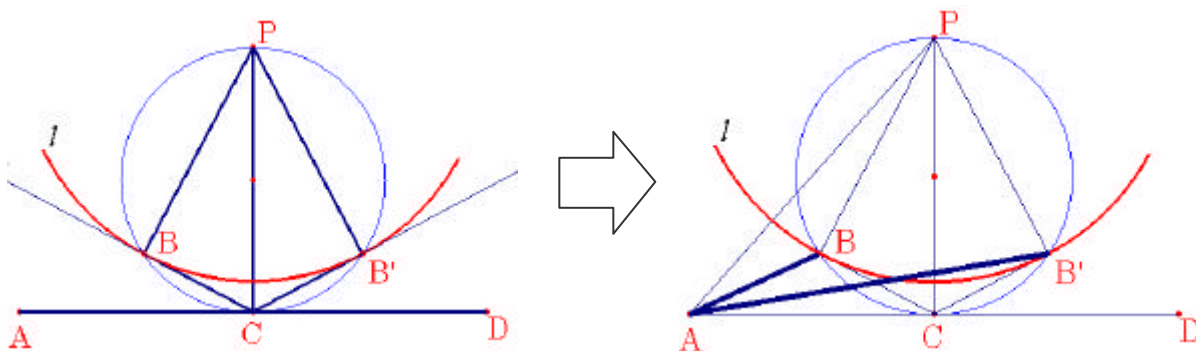
この二次方程式の解が虚数になるのは、 $b/2 < \sqrt{a}$  の場合である。このとき円弧  $l$  と直線  $AD$  は交点をもたず、従って解を表す重要な点  $B$ 、 $B'$  が出てこない。しかし、ウォリスはこのような場合も以下のように考えることで解が作図できるとした。

### ウォリスの考え

解が実数のとき、円弧  $l$  の半径と  $PC$  の二辺が作る直角三角形に注目した。 $b/2 < \sqrt{a}$  のとき、円弧  $l$  と直線  $AD$  上に交点はないが、この場合も円弧  $l$  の半径と  $PC$  の二辺が作る直角三角形を作ればよい。

点  $C$  から円弧  $l$  に接線を引き、接点を  $B$ 、 $B'$  とする。円弧  $l$  の半径と接線のなす角は  $90^\circ$  であることから、円弧  $l$  の半径  $PB'$  と  $PC$  を二辺とする直角三角形ができた。よって、 $CB' = \sqrt{(PB')^2 - (PC)^2} = \sqrt{(b/2)^2 - a}$  である。先ほどと同様にして、 $a = AC + CB'$ 、 $AC + CB$ 、すなわち  $a = AB'$ 、 $AB$  である。

従って、解が虚数の場合も下図における二つの長さ  $AB$ 、 $AB'$  によって表される。



授業ではまずこのウォリスの考えを授業者が生徒に示し、この考えに対して賛成か反対かを生徒に尋ねた。U高校では生徒全員が反対の意を示し、T高校で一人の生徒が賛成した以外は残り全員が反対した。そこで、U高校では授業者がウォリスの役を演じて生徒と議論し（写真6）T高校では賛成の生徒対反対の生徒という形をとって議論した（写真7）。議論の概略は以下に示す。

### U 高校での議論

授業者：私（ウォリス）の考え、正しいでしょう？

生徒 A： $CB' = \sqrt{(PB')^2 - (PC)^2}$  としているが、直角三角形の斜辺は  $PB'$  ではなく  $PC$  だ。だから、 $CB' = \sqrt{(PC)^2 - (PB')^2}$  ではないのか。

授業者：うーん、確かにそうだ。でも、そうすると解の部分の長さが表せなくなってしまうね？

生徒 A：はい。

授業者：ここをどうしてもその長さで表したいから、その間違いは見逃して、この考えを認めてくれ。

生徒全員：えー!? (笑い声)

授業者：これを認めてくれたらあとは成り立つよね？

生徒 B： $AC + CB = AB$ 、 $AC + CB' = AB'$  はベクトル的な考え方だからダメだ。

授業者：えっ、でもさっきはよかったよね？

生徒 B：解が実数のときは、点  $B$ 、 $B'$  が直線  $AD$  上にあったから数の和においてベクトル的な考え方は可能だった。でも今の場合は点  $B$ 、 $B'$  が  $AC$  上にないから、ベクトルの和の法則と数の和の法則は一致しない。だからこの式は成り立たないのでは。

授業者：そうかー。でもそうだとすると、また解は長さで表せなくなるな。じゃあ申し訳ないけどこれも認めてくれ。

生徒全員：えー!? (笑い声)



【写真 6】 ウォリスの誤りを指摘する

### T 高校での議論

(生徒 A：ウォリスに賛成、生徒 B：ウォリスに反対)

生徒 B：(U 高校で初めに生徒 A が発言した内容と同じ)

生徒 A：僕は  $CB' = \sqrt{(PB')^2 - (PC)^2}$  (式 とする) を基準に考えた。そうすると  $(CB')^2$  の値が負になり、そこから何とかできるのではないかと思った。

(授業者の介入：生徒 A と生徒 B の立場を明確にするために、「B 君は図から、A 君は式から出発している」と確認した。)

生徒 B：A 君の言っていることはもっともらしいが、式は  $C$  が  $90^\circ$  のときにでてきた。今は  $C$  が  $90^\circ$  でないからだめだと思う。

生徒 A：最初の場合は図において偶然  $C$  が  $90^\circ$  であって、そのあとの図は自分から  $B$  が  $90^\circ$  になるように作った。だから  $90^\circ$  がどこにあるうが関係ない。

生徒 B：それだったら  $P$  を  $90^\circ$  にして、点  $B$  をもっと違うところにとっても成り立つことになって、もう論理がめちゃくちゃになる。

生徒 A：ウォリスは自分の都合のいいようにつじつまを合わせた。だから点  $B$  も都合のいいようにとった。

(議論の收拾がつきそうになかったため、授業者がここで議論を打ち切りにした。二番目の誤りについては、その後他の生徒から指摘があった。)



【写真 7】 議論が白熱して苦笑い

ウォリスも生徒が指摘した二点に矛盾があることを知っていたが、「記述の新しさ」を理由にこの二つの長さ  $AB$ 、 $AB'$  が解であると主張し続けた。しかし、ウォリスのこの主張はその矛盾のために当時は完全に無視されていた。

ところで、ウォリスは「二次方程式の解が実数なら、解を表す重要な点  $B$ 、 $B'$  は直線  $AC$  上にある。しかし、解が負数の平方根を含むような場合、点  $B$ 、 $B'$  は直線  $AC$  上にあるのではなく、 $AC$  から離れて取るのである。」とも主張している。この主張は、実数軸と虚数軸を用いた現在の複素数平面と類似しているところがあると考えられる。



授業の最後に、ウォリスの主張は当時受け入れられなかったことを生徒に伝え、授業の感想とウォリスの主張について思ったことを書いてもらった。

### ウォリスの主張についての感想

- ・ 強引すぎるからやはり賛成できない。
- ・ ウォリスの気持ちも分からなくはないけれど、数学の基本的な法則や概念に反した主張であるので数学界には受け入れられてもらえないだろう。
- ・ 数学の定理、定義は万人に共通なものでないといけない。この「つじつま合わせ」は間違っていると思う。
- ・ 賛成である。ウォリスの考えは考えつかないようなもので興味深かった。直線上に虚数は表せないで、点  $B$ 、 $B'$  が  $AC$  から離れるのはおもしろい考えだと思う。
- ・ デカルトは既定のもとに検証して「不可能である」とした。これを見るとやはり新しい概念のもとでなければ道は開けない。ウォリスのそれはまさしくそれで、「よくやった」という感じである。ただ、あの二点の矛盾について、あってあるものとして認めてしまって不都合はないのかという点だけが問題だ。

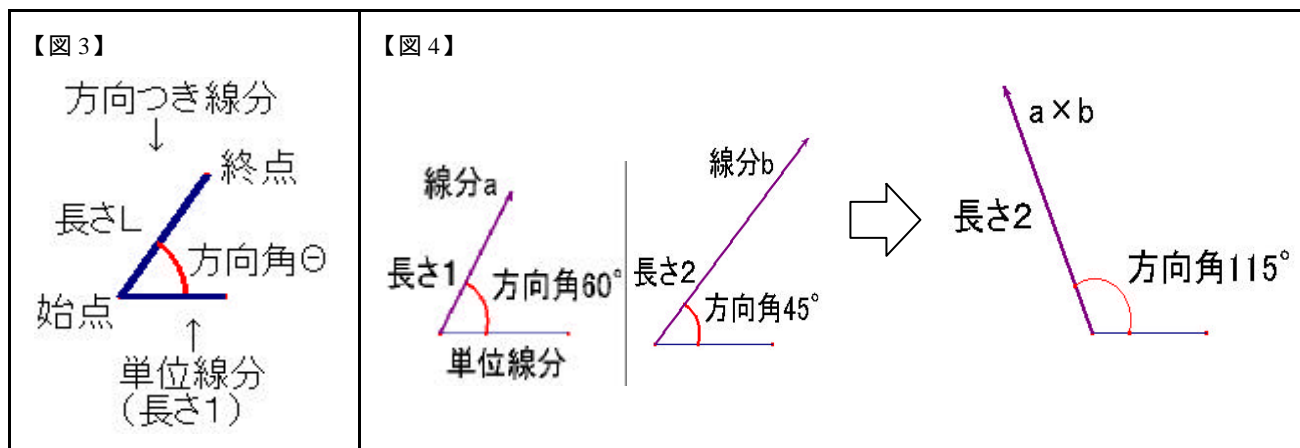
### <三時間目>

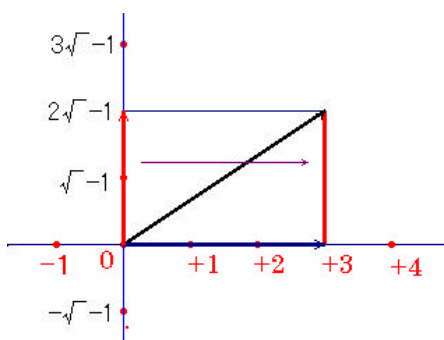
三時間目はデンマークの測量家であるヴェッセルについて考察した。彼は「方向つき線分」というものを導入した。それは長さや単位線分からの角度（方向角）をもち、始点と終点をもつ線分と定義される（図 3）。ヴェッセルはまずその計算について以下に示す三つの定義をし、その定義に基づく計算によって虚数の図示に成功した。

- (1) 方向つき線分  $a$  に対し方向つき線分  $-a$  は長さが同じで方向が逆向きの線分と定義した。
- (2) 方向つき線分の和については現代でいうベクトルの和と同じ定義をした。
- (3) 二つの方向つき線分の積によってできる方向つき線分を、長さが二つの線分の長さの積、方向角が二つの線分方向角の和として表される線分と定義した。

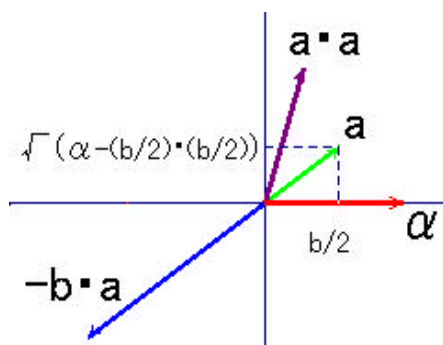
（授業においてこれ以降は便宜上、始点、終点を書くことはせずベクトル表記した。）

生徒は、この定義に基づいて図 4 で表されるような練習問題を解いた。また、積に関しては、掛ける線分と掛けられる線分の長さが両方とも 1 である場合の積の線分について、授業者が作成したカプリのファイルを操作して考察した。





【図5】



【図6】



【写真8】



【写真9】正17角形の作図で補助線の多さに驚く

ヴェッセルはその後、単位線分を+1、方向角が90°で長さが1の方向つき線分を+ $e$ とし、+ $e$ の自乗を考えた。+ $e$ の方向角が90°であることからこの自乗の方向つき線分は-1になり、従って+ $e = \sqrt{-1}$ となる。そして、例えば $3 + 2\sqrt{-1}$ は、方向つき線分の和の定義から、3を表す方向つき線分と $2\sqrt{-1}$ を表す方向つき線分の和で表されることになる(図5)。

ヴェッセルのこの考えによれば虚数も図示できたことになる。すなわち、デカルト、ウォリスが為しえなかった虚数解をもつ場合の二次方程式の解の図示もできたことになる。しかしヴェッセルの考えは本当に正しいのか。つまり、ヴェッセルの方法によって図示された二次方程式の虚数解を表す方向つき線分は、実際に方向つき線分に関するヴェッセルの演算の定義に基づいて計算されたならば、与えられた二次方程式を満たすのか。生徒はこの必要十分条件の関係が成り立つのかどうかを確かめた。(ただし、ヴェッセルはこの議論をしていない。)

その確認にあたり、ウォリスが考察した二次方程式 $a^2 - ba + a = 0$  ( $b/2 < \sqrt{a}$ )の場合を基にした。この二次方程式の解は $a = b/2 \pm \sqrt{a - (b/2)^2} \cdot \sqrt{-1}$ である。ここでは便宜上、一方の解 $a = b/2 + \sqrt{a - (b/2)^2} \cdot \sqrt{-1}$ のみを扱った。この解とヴェッセルの定義に基づいて計算された $a^2$ 、 $-ba$ 、 $a$ を図示すると図6のようになる。これら三つの方向つき線分を加えたら0になる、つまり原点に戻ることを、生徒は三角形の合同、相似を使うことで証明した(写真8)。

ヴェッセルについて考察したあと、他に虚数の幾何学的表示に成功した数学者としてガウス、アルガンを紹介して授業を終えた。とくにガウスは複素数理論の発達に大きく貢献し、19歳のときには古来2000年以上も謎であった正17角形の作図可能性について、方程式 $x^{17} - 1 = 0$ を複素数上で解くことを通して証明した。その理論は高校生にとって難解であると思われたので、授業では授業者がカブリで作図した正17角形を生徒に示すのみにとどめた(写真9)。

## 5 . 結果と議論

2 で挙げた研究目的・下位課題についてここで議論する。

下位課題 : 生徒は虚数、複素数平面が考えられた時代特有の数学を体験し、当時の数学者の立場になって考えることができるか。

授業では昔の数学者として、カルダノ、ボンベリ、デカルト、ウォリス、ヴェッセル、そしてガウスについて考察した。この中でも特にカルダノ、ウォリスについて考察している際に、生徒はこの時代特有の数学（古代ギリシャの幾何学を中心とした数学の影響を強く受けており幾何的に表現されない数学は認められることがなかった）を体験し、二人の数学者の立場になって考えることができていたのではないかと。前者においては、正方形の面積が負になる手順 からその一辺を表そうとする手順 において、誰もが「何とか図示して $\sqrt{-1}$ が広く認められるようにしよう」という気持ちになり、解法手順の図示に取り組んでいた。また後者においては、U 高校では生徒はウォリスの矛盾した説明を聞いた後、当時これに関するウォリスの考えを認めなかった数学者になり、ウォリスの誤りを指摘した。T 高校ではウォリスの考えを認めた生徒はウォリスの立場にたち、それ以外の生徒はウォリスの考えを否定する当時の数学者の立場に自ら立って、白熱した議論を展開した。

筆者が実際に授業で感じ、また、授業風景を撮影したビデオでも確認した以上のことを考慮すると、下位課題 は達成されたと思われる。

下位課題 : 生徒は虚数、複素数平面という数学の題材における多くの数学者の考えを体験することで、現在学んでいる数学を人の営みとしてとらえ、数学の創造的な側面を味わうことができるか。

これについて考察するにあたり、授業後に行った生徒へのアンケート（歴史的題材を扱うことについてどう思うか、授業の感想等）の内容の一部を以下に記す。

### アンケートに対する生徒の答え

生徒 : 複素数平面はいきなり現れたものではなく、それなりのプロセスがあったということを知ることができたのが面白かった。

生徒 : 複素数を平面で表示することは知っていたが、歴史を学ぶことでその表示の本当の意味がわかるような気がした。このことを知らなかったら、ただ計算の仕方などを習うだけで、何も理解できていなかったと思う。 $\sqrt{-1}$ がどういった数なのか興味がわいてきた。

生徒 : なんで複素数平面ができたのだらうというものがあってから、歴史的な題材を扱うことはかなりいいと思う。何人もの人が $\sqrt{-1}$ の図示に挑戦したことを知って、今、私たちが学んでいる数学の歴史の深さや意味をもっと知りたいと思った。

生徒 : 数学は古くからの知識の積み重ねで成り立っている学問があるので、昔の数学者の考えは現代の考えとつながる部分がある。そういうものを扱うことは必ず新しい知識を現代の僕たちに与えてくれるのだと思う。まさに「温故知新」である。

生徒：とりあえず一番の驚きはそのような二次方程式の解法（デカルトやウォリスの方法）ができるということだった。それと複素数平面というのは、誰かがパッとひらめいて縦軸に $\sqrt{-1}$ をとただけではなくて、相当な時間と苦勞をかけてようやく表せるようにしたのだということを知った。このおかげで複素数平面のありがたさがよく分かり、その過程をたどるのもとても面白かった。

上記の感想より、生徒～のいずれも数学の創造的な側面を感得していることがわかる。例えば、生徒は複素数平面が生まれるまでのプロセスを、生徒は複素数平面が生まれるまでの相当な時間と数学者の苦勞をそれぞれ本授業で見出しており、その過程を楽しみながら学習していたようである。紙面上の都合で掲載することができなかった他の生徒の感想を含めて考慮しても、本研究の下位課題は明らかに達成されたと言える。

ここで、生徒～が数学の創造的な側面の感得以外に数学史を学ぶことの意義を更に見出していることに着目する。以下、個別に議論していく。

生徒は虚数の単なる計算技能の習熟に終わりがちな自分を振り返り、虚数に対して興味を抱くようになった。つまり、彼は数学史を学んだことで数学に対する今までの自分の学習姿勢を反省するようになり、その反省が虚数に対する興味につながったのである。

生徒は数学史を学ぶことの意義を現代に結び付けて考え、歴史を学ぶことで必ず新しい知識が現代の自分たちの中に生まれると感じている。ここからは筆者の推測になるが、生徒の記述を見る限り、彼は数学史を学ぶことの意義を数学の範囲を超えて考えているのではないだろうか。つまり、彼は本授業を通して歴史というものについて再考し、他のどの分野においても、今まで学んできた歴史と現代の自分たちとの間には知識の生産的なつながりがあると感じ、「温故知新」という言葉でその思いを表現したのである。

さらに、生徒の中では解釈学的営みに基づく数学史の学習に関してメタ認知が生じ、それにより数学史に対する更なる学習意欲が生じていると思われる。具体的に言えば、生徒は数学史を題材にした授業によさを感じている自分を認知し、それによって、他の単元に関する数学史についても学び、数学の歴史の深さや意味をより知りたいと感じている。

筆者は、解釈学的営みにおける「自己理解」について本研究においては、課題で設定したように数学の創造的側面の感得に限定して考えた。しかし、以上で議論してきたように、本授業においては生徒～に対してその限定の枠を越えた様々な「自己理解」が促進され、特に生徒の中ではその「自己理解」に対するメタ認知も生じており、それが更なる学習意欲につながっているのである。

ところで、「1. はじめに」で述べたように虚数、複素数平面において数学史を教材にすることの先行研究は主に三つが挙げられる。その中でも Hellmich と Jahnke の研究は、カルダノやヴェッセルなど諸々の数学者が虚数、複素数平面について考えてきた過程の教材可能性を提案しているにとどまっている。また、Bagni の研究は、数学史を利用することで虚

数、複素数平面の学習に対して生徒がもつ負のイメージを払拭することのみを目的とした研究である。

それらの先行研究とは異なり、本研究の目的は「虚数、複素数平面に関する数々の数学者の考え、またはその考えの過程について生徒が解釈学的営みを行うような授業実践により、他者の立場に立って物事を考える姿勢を生徒の中に育成し、さらに彼らの数学観の変容を図る」ことであり、この目的の達成のために「他者の立場の想定」と「数学の創造的側面の感得」という二つの下位課題を設定した。そして、以上で考察してきたようにその課題は概ね達成できたように思える。つまり、生徒は虚数、複素数平面が生み出された過程を学んだことで、当時の数学者の立場になって数学を考えると同時に、現在自分たちが学んでいる数学は生き生きとした人の営みであると認めるようになったのである。更には、数学の創造的側面の感得という筆者が設定した枠を超えた様々な「自己理解」と、そのメタ認知による更なる学習意欲がそれぞれの生徒の中で生じたのである。

## 6. おわりに

本研究では「 $\sqrt{-1}$ は描けるか？」という題目で生徒に授業の参加希望を募り、授業の導入の段階においても「1cmの棒に対し $\sqrt{-1}$ cmの棒は存在するか？」などと問いかけた。従って、複素数平面既習の生徒は複素数平面以外の図示を期待していた模様で、何人かの生徒は「期待していた実数平面に図示するということは無理だったので少しガッカリ、やはり実生活上では正と負の数しか表現できない」という感想を書いていた。これより複素数平面未習の生徒に実施するのが望ましいと思われるが、その判断は今後の課題としたい。また、筆者の現場経験の不足から授業時間が60分を越えることがあった。内容の精選、スムーズな授業展開等も今後の課題とする必要がある。

今後は以上の課題の解決を目標としていき、また、他の内容における数学史の積極的な取扱いにも取り組んでいきたい。

## 謝辞

研究授業の実施に際し、埼玉県立浦和高等学校の鈴木雅道先生、宇田昌司先生、葺塚哲夫先生、中村英夫先生をはじめとする数学科の先生方、筑波大学に内地留学されている埼玉県立川口高等学校の田端毅先生、筑波大学附属高等学校の川崎宣昭先生から、貴重なご意見とご協力をいただきました。厚く御礼申し上げます。

注) 本研究は平成14年度科学研究費「数学の文化的視野覚醒と新文化創出のための教材・指導法開発研究」(基礎研究B、研究代表者磯田正美 No.14380055)の一環として行われた。

## 参考文献・引用文献

- (1) 第 15 期中央教育審議会第一次答申 (1996). *21 世紀を展望した我が国の教育の在り方について*.
- (2) 国立教育研究所 (1997). *中学校の数学教育・理科教育の国際比較*. 東洋館
- (3) 礪田正美 (2002a). 解釈学からみた数学的活動論の展開. *筑波数学教育研究*, 21, 1-10.
- (4) 礪田正美 (2002b). 数学的活動を楽しむ心を育てる. 礪田正美編. *課題学習・選択学習・総合学習の教材開発*. 明治図書.
- (5) Grugnetti, L. and Rogers, L. (2000). Philosophical, multicultural, and interdisciplinary issues, In Fauvel, J. and Maanen, J.(eds.), *History in Mathematics Education* (pp39-62). Kluwer Academic Publishers.
- (6) Jahnke, H. (2000). The use of original sources in the mathematics classroom, In Fauvel, J. and Maanen, J. (eds.), *History in Mathematics Education* (pp291-328). Kluwer Academic Publishers.
- (7) Bagni, G. (2000). Introducing complex numbers: an experiment, In Fauvel, J. and Maanen, J.(eds.), *History in Mathematics Education* (pp264-265). Kluwer Academic Publishers.
- (8) Hellmich, E. (1989). Complex Numbers, In National Council of Teachers of Mathematics, *Historical topics for the mathematics classroom* (pp290-294).
- (9) Smith, D. (1959). *A source book in mathematics*. Dover.
- (10) Struik, D. (1969). *A source book in mathematics, 1200-1800*. Harvard University Press.
- (11) Descartes, R. (1974). 幾何学 (原亨吉訳). *デカルト著作集 1*. 白水社. (原著出版 1637)
- (12) Cajori, F. (1970). 初等数学史 (小倉金之助補訳). 共立出版. (原著出版 1955)
- (13) Ebbinghaus, H. (1991). 数 (成木勇夫訳). シュプリンガー・フェアラーク東京. (原著出版 1983)
- (14) Cardano, G. (1545). *Ars Magna*.

上記以外に教材開発で参考にした文献

- (15) 大野栄一 (1993). *定木とコンパスで挑む数学*. 講談社.
- (16) Argand, J. (1874). *Essai sur une maniere de représenter les quantités imaginaires dans les constructions géométriques* (Translated by Houel, J.). Gauthier-Villars. (原著出版 1806 年)
- (17) Branner, B. and Lutzen, J (eds.) (1999). *Caspar Wessel: On the Analytical Representation of Direction*. C. A. Reitzel.
- (18) Crowe, M. (1994). *A History of Vector Analysis*. Dover.
- (19) Gauss, C. (1973). *Werke 2*. Georg Olms.
- (20) Gauss, C. (1995). *ガウス整数論* (高瀬正仁訳). 朝倉書店. (原著出版 1801)
- (21) Hollingdale, S. (1993). *数学を築いた天才たち* (上・下) (岡部恒治監訳). 講談社. (原著出版 1989)
- (22) Nahin, P. (2000). *虚数の話* (好田順治訳). 青土社. (原著出版 1998)
- (23) Wallis, J. (1972). *Opera Mathematica*. Georg Olms.
- (24) Wessel, C. (1897). *Essai sur la représentation analytique de la direction* (Translated by Zeuthen, H.). Bianco Luno. (原著出版 1797 年)
- (25) <http://nsm1.nsm.iup.edu/gsstoudt/history/bombelli/bombelli.pdf>