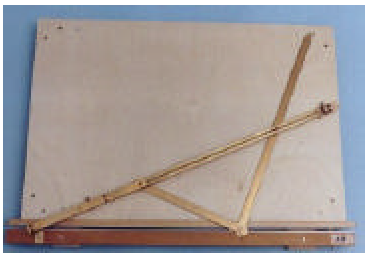
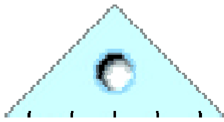
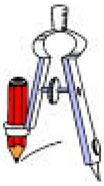
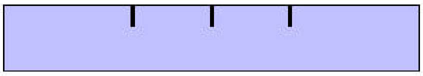
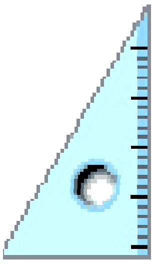
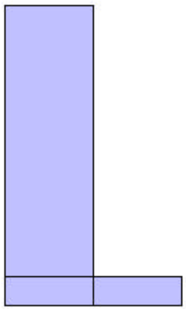
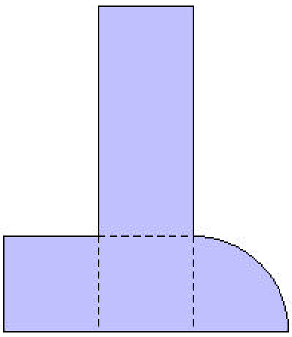
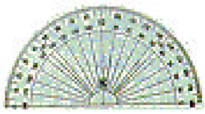
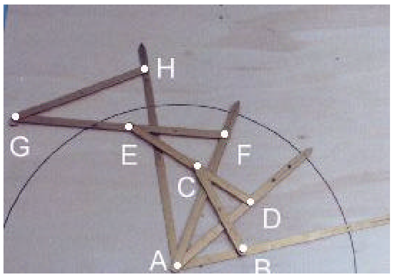




授業資料

3年　組　　番　氏名＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

ギリシア数学

「ギリシア人特有の数学への貢献とは，いったいどこにあるのか」—こう問うと，次のことが挙げられる。

あらゆる数学的帰結は「演繹的」論理展開によって論証されねばならないという主張である。論証は誰もが帰納する出発点から論理的なステップを踏んで進まねばならず，それによって誰もが結論を受け入れることが保証される。この過程は日常生活で通常起こっていることとはまったく対照的である。日常生活では特殊から一般へ「帰納的に」進む。失敗や誤りといった経験から学び，類推によって経験則に至るのである。

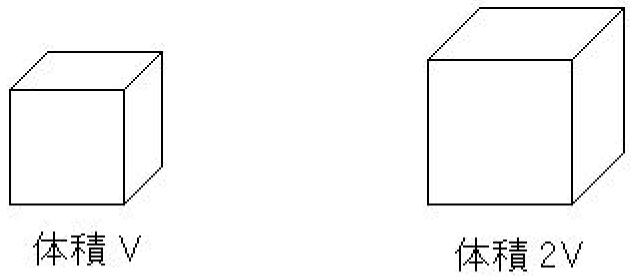
彼らが数学を重んじ奨励したのは，「世界が数学的法則にしたがって設計されている」(もしくは少なくとも機能している)と信じたからである。それゆえ数学を研究することは，自然世界を理解する鍵だった。しかし，一般庶民は別であり，彼らは神話や神秘や魔術と深く関わり，そこでは神々と悪魔たちが物事を支配し，自然は気まぐれで混沌とし，恐ろしいものだった。

（参考　「数学を築いた天才たち㊤」Stuart Hollingdale 著　岡部恒治 監訳）

三大問題

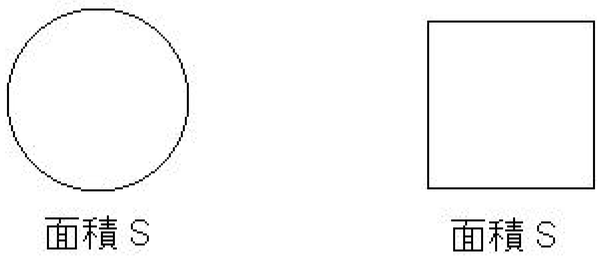
紀元前５～６世紀頃から，ギリシアの幾何学者たちによって研究され，その後，たくさんの幾何学者たちを悩ませ続けた三つの有名な問題がある。

①　与えられた立方体のちょうど２倍の体積を持つ立方体を作図せよ



（図１）

②　与えられた円と同じ面積を持つ正方形を作図せよ



（図２）

③　与えられた角の三等分線を作図せよ

（図３）

これらの本来の目的は「定規とコンパス」の作図によってそれらを解くことだった。しかし，時代が過ぎても誰も成功することができなかった。そこで，他の解法が探され，それがついに発見されたのである。これによって逆に，これらの問題は何世紀にもわたって数学の舞台の中心にあり続けたのである。

（参考　「数学を築いた天才たち㊤」Stuart Hollingdale 著　岡部恒治 監訳）

作図

作図問題の要求すること

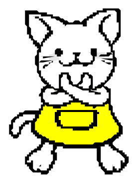
・・・「定木※とコンパスを有限回使用して，条件を満足するような図形を作図せよ」

※定木　：　目盛りのないもの　⇒　直線を描くのに用いる道具
定規　：　目盛りのあるもの　⇒　直線を描くことや長さをはかることなどに用いる道具

定木とコンパスのみを使うという約束

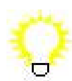
当時では「習慣」ないし「伝統」であった
（直線と円の世界で論ずることが，永年にわたる暗黙の前提）

実は・・・
この条件の下では，三大問題の作図は不可能であることが証明されている
①，②：**ワンツェル**(1837)，③：**リンデマン**(1882)
（19 **世紀**）



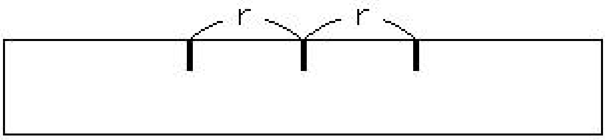
定木とコンパスのみを使った作図は不可能

それ以外の道具を使ったら作図できるのではないか？

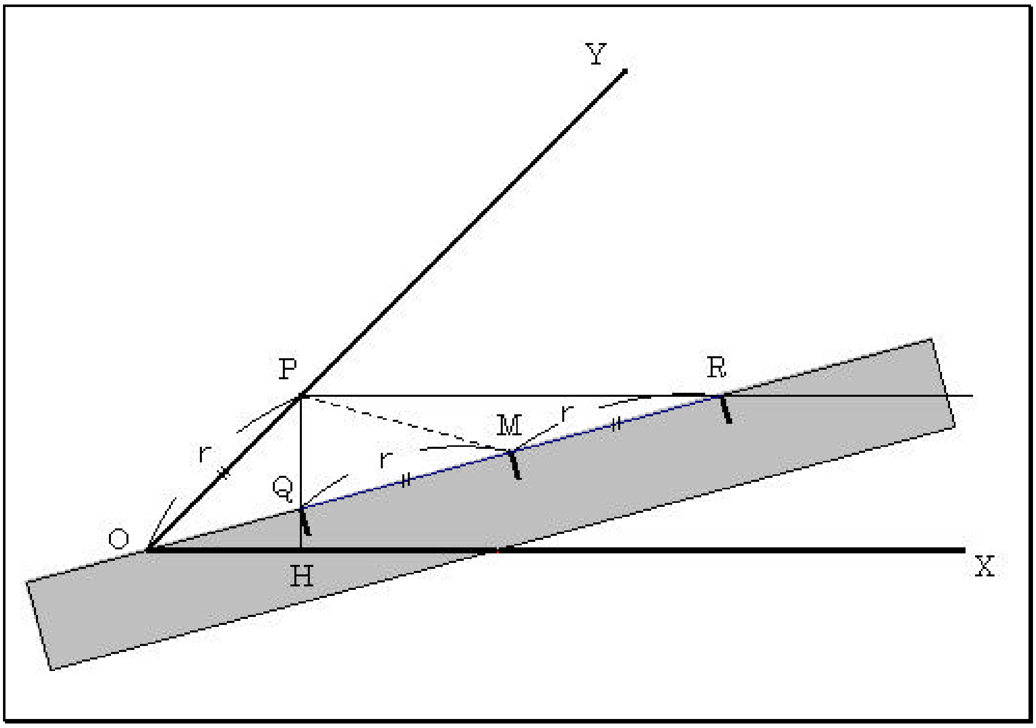


道具を用いた角の三等分

このような道具を使えば，角の三等分線を作図することができる。



（使い方）

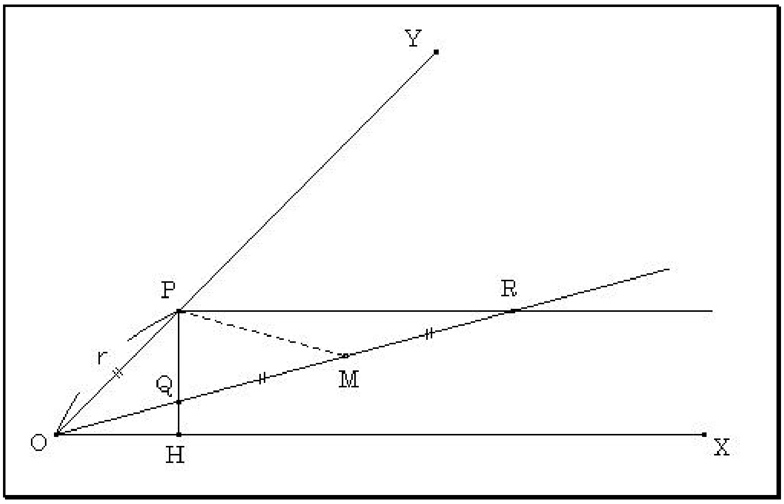


①　ＯＹ上に道具の目盛りを使ってＯＰ＝ｒとなるように，点Ｐを取る
②　点Ｐから線分ＯＸに垂線を引く
③　点Ｐを通り線分ＯＸに平行な線を引く
④　道具を図のように合わせる

⇨　**半直線ＯＲが∠ＸＯＹの三等分線**

（参考　GREEK MATHMATICAL WORKS　**Ⅰ）**

角の三等分器の構造



（条件　：　ＯＰ＝QM＝MR＝ｒ　，　ＰR//ＯＸ　，　 ＰH⊥ＯＸ）

（証明）QM＝MR＝ｒ ，　∠ＱＰＲ＝９０°であるから,円周角の定理より

点Ｐは点$\boxed{}$を中心として線分$\boxed{}$を直径とする円周上にある。

したがって

線分ＭＰ＝$\boxed{}$　．

∠ＱＯＨ＝θとすると

∠ＱＯＨ＝∠$\boxed{}$＝θ　　（平行線の錯角）

ＭＲ＝ＭＰ＝ｒより

∠$\boxed{}$＝∠ＭＰＲ＝θ

また

∠$\boxed{}$＝∠ＭＲＰ＋∠ＭＰＲ＝２θ　　（三角形の外角）

ＭＰ＝ＯＰ＝ｒより

∠$\boxed{}$＝∠ＰＯＭ＝２θ

したがって

∠ＹＯＸ＝∠ＱＯＨ＋∠ＰＯＭ＝θ＋２θ＝３θ

ゆえに

∠ＱＯＨは∠ＹＯＸの 1/3 である.

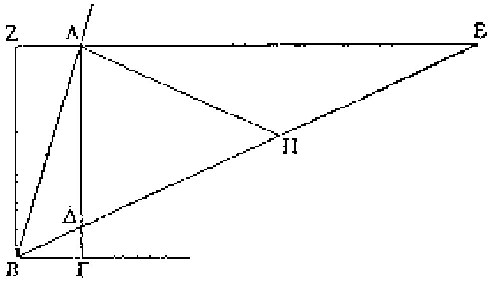
（参考　GREEK MATHMATICAL WORKS　Ⅰ）

GREEK MATHEMATICS

Ibid. iv. 38. 62, ed. Hultsch 274. 18–276. 14

λη'. Δεδειγμένου δὴ τούτου τρίχα τέμνεται ἡ δοθεῖσα γωνία εὐθύγραμμος οὕτως.

Ἔστω γὰρ ὀξεῖα πρότερον ἡ ὑπὸ ΑΒΓ, καὶ ἀπό τινος σημείου κάθετος ἡ ΑΓ, καὶ συμπληρωθέντος τοῦ ΓΖ παραλληλογράμμου ἡ ΖΑ ἐκβεβλήσθω ἐπὶ



τὸ Ε, καὶ παραλληλογράμμου ὄντος ὀρθογωνίου τοῦ ΓΖ κείσθω μεταξὺ τῶν ΕΑΓ εὐθεῖα ἡ ΕΔ νεύουσα ἐπὶ τὸ Β ἴση τῇ διπλασίᾳ τῆς ΑΒ (τοῦτο γὰρ ὡς δυνατὸν γενέσθαι προγέγραπται)· λέγω δὴ ὅτι τῆς δοθείσης γωνίας τῆς ὑπὸ ΑΒΓ τρίτον μέρος ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΕΒΓ.

Τετμήσθω γὰρ ἡ ΕΔ δίχα τῷ Η, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΑΗ· αἱ τρεῖς ἄρα αἱ ΔΗ, ΗΑ, ΗΕ ἴσαι εἰσίν· διπλῆ ἄρα ἡ ΔΕ τῆς ΑΗ. ἀλλὰ καὶ τῆς ΑΒ διπλῆ· ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ ΒΑ τῇ ΑΗ, καὶ ἡ ὑπὸ ΑΒΔ γωνία τῇ ὑπὸ ΑΗΔ. ἡ δὲ ὑπὸ ΑΗΔ διπλασία τῆς ὑπὸ ΑΕΔ, τουτέστιν τῆς ὑπὸ ΔΒΓ· καὶ ἡ ὑπὸ ΑΒΔ ἄρα διπλῆ ἐστιν τῆς ὑπὸ ΔΒΓ. καὶ ἐὰν τὴν ὑπὸ ΑΒΔ δίχα τέμωμεν, ἔσται ἡ ὑπὸ ΑΒΓ γωνία τρίχα τετμημένη.

SPECIAL PROBLEMS

Ibid. iv. 38. 62, ed. Hultsch. 274. 18–276. 14

38. With this proved, the given rectilineal angle is trisected in the following manner.

First let ΑΒΓ be an acute angle, and from any point [of the straight line ΑΒ] let the perpendicular ΑΓ be drawn, and let the parallelogram ΓΖ be completed, and let ΖΑ be produced to Ε, and inasmuch as ΓΖ is a right-angled parallelogram let the straight line ΕΔ be placed between ΕΑ, ΑΓ so as to verge towards Β and be equal to twice ΑΒ—that this is possible has been proved above ; I say that ΕΒΓ is a third part of the given angle ΑΒΓ.

For let ΕΔ be bisected at Η, and let ΑΗ be joined; the three straight lines ΔΗ, ΗΑ, ΗΕ are therefore equal ; therefore ΔΕ is double of ΑΗ. But it is also double of ΑΒ ; therefore ΒΑ is equal to ΑΗ, and the angle ΑΒΔ is equal to ΑΗΔ. Now ΑΗΔ is double of ΑΕΔ, that is, of ΔΒΓ ; and therefore ΑΒΔ is double of ΔΒΓ. And if we bisect ΑΒΔ, the angle ΑΒΓ will be trisected.[a]

Ibid. iv. 38. 62, ed. Hultsch. 274. 18-276. 14

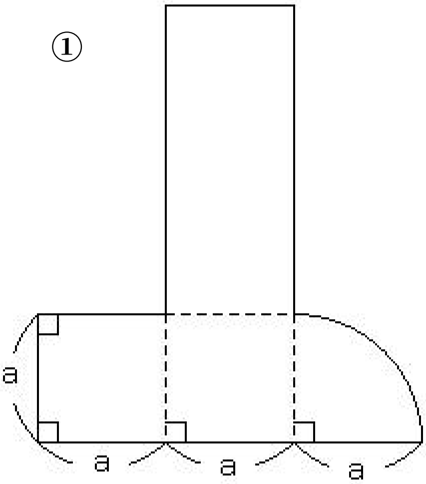
これが立証されている状態で，与えられた角度は以下の方法で３等分される。

まず，ABΓを鋭角とする。そして，直線 AB の任意点から垂線 AΓを描き，平行四辺形ΓZ(ΓＢＡＺ)を作る。ＺＡを延長してＥを取る。ΓZ(ΓＢＡＺ)が直角な平行四辺形(長方形)なので，直線ΔＥを，Ｂに接してＡＢの２倍になるようにＥＡとＡΓの間に置く(ＡΓと交わるように描く)。これが可能であることは上で立証された。ＥＢΓが与えられた角度ＡＢΓの３分の１である。

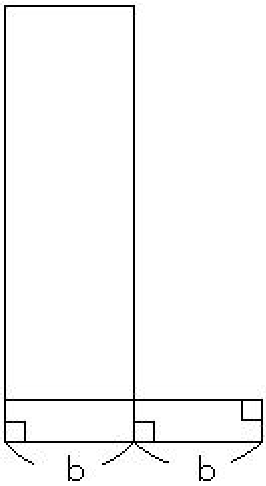
ＨでＥΔを２等分する。そしてＡＨを結ぶ。そうすれば，３つの直線ΔＨ，ＨＡ，ＨＥは等しい。従って，ΔＥはＡＨの２倍である。しかし，またΔＥはＡＢの２倍でもある。従って，ＢＡはＡＨに等しくて，∠ＡＢΔは∠ＡＨΔに等しい。今，∠ＡＨΔは∠ＡＥΔすなわち∠ΔＢΓの２倍である。従って，∠ＡＢΔは∠ΔＢΓの２倍である。そして，∠ＡＢΔを２等分すると，∠ＡＢΓは３等分されるだろう。

他の角の三等分器

①

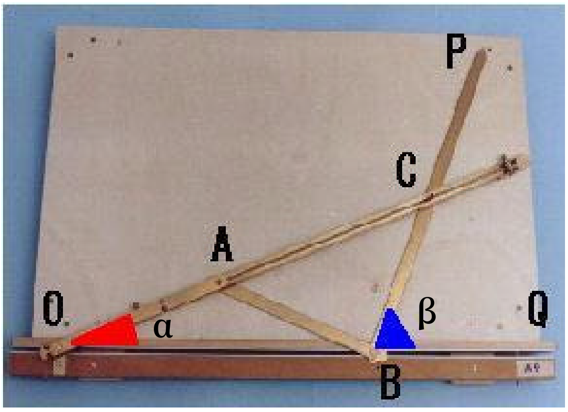


②



これらの道具を用いても角の三等分線を描くことができる。

もっと複雑な角の三等分器

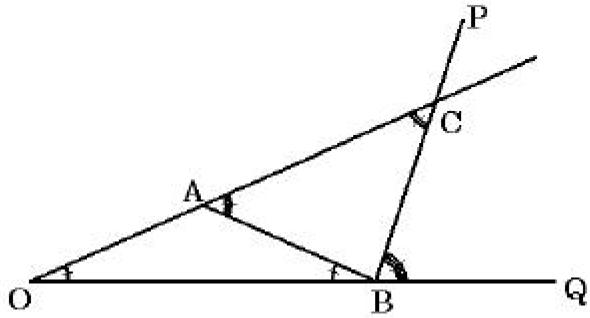


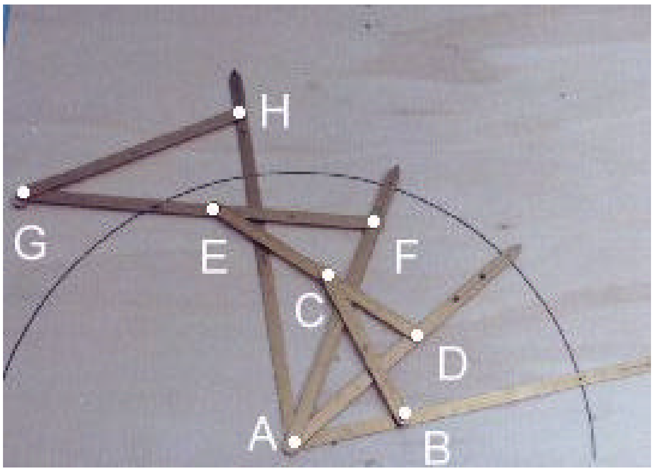
点Ｏと点Ａはピンで止められているが，自由に棒が開閉するようになっている。点Ｂ，点Ｃはスライドする。図でＯＡ，ＡＢ，ＢＣの長さは等しく作ってある。

図の角αはβの３分の１に必ずなるようにできている。

（証明）

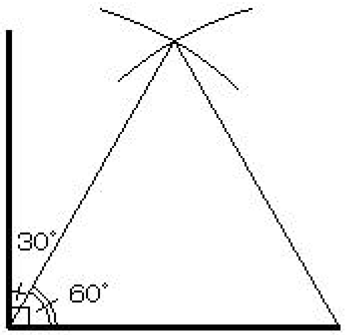
△ＯＡＢは二等辺三角形なので
　∠ＡＯＢ＝∠ＡＢＯ＝α.
∠ＢＡＣは△ＯＡＢの外角なので
　∠ＢＡＣ＝α＋α＝２α.
△ＡＢＣは二等辺三角形なので
　∠ＢＡＣ＝∠ＢＣＡ＝２α.
∠ＰＢＱは△ＯＣＢの外角なので
　β＝∠ＰＢＱ
　　＝∠ＣＯＢ＋∠ＢＣＯ
　　＝α＋２α
　　＝３α
したがって，αはβの 1/3 である



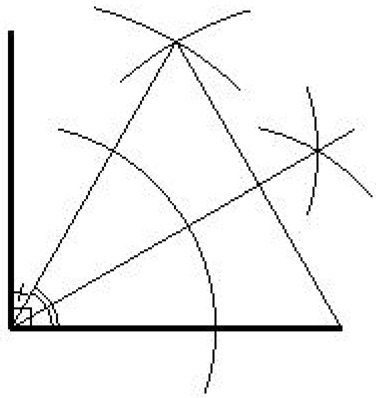


この三等分器は，３つの相似な図形 ABCD，ADEF，AFGH から構成されている。そしてそれらにおいて，点Aは不動点である。（３つの図形の辺は比例しており，対応する角は等しい。）：すなわち、どの位置においてもそれらの角度は等しく，辺ＤＡと辺ＦＡは角ＢＡＨを三等分する。

(参考）９０°の三等分



９０°を作る線分を一辺として，正三角形を描く



正三角形の一つの角(６０°)を二等分する

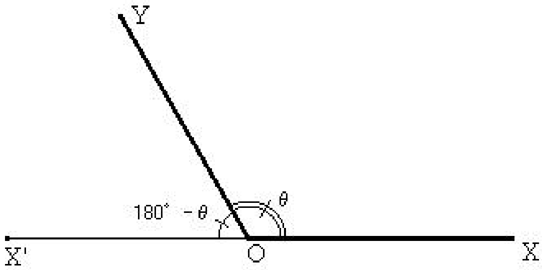
★　９０°の倍数の角は三等分できることを考えてみよう♪

（参考）鋭角の三等分 ⇒ 鈍角の三等分

「鋭角の三等分ができれば，鈍角の三等分もできる」ということで，角の三等分問題を考えるときは，ふつう，鋭角のみで考える。

なぜ鋭角が三等分できると鈍角が三等分できるのだろう？

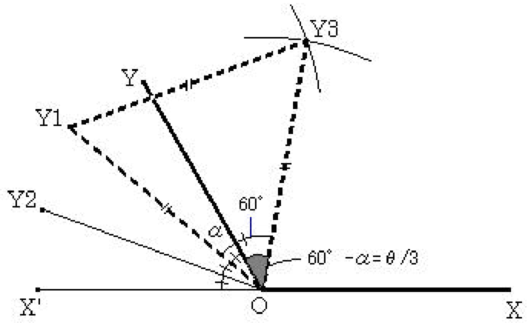
$\boxed{90^\circ < \theta < 180^\circ \text{ のとき}}$



与えられた鈍角を θ とする。

$\dfrac{\theta}{3}$ を作図によって求めたい。

今，鋭角の三等分は求められるので



$\dfrac{180^\circ - \theta}{3}$ が求められることになる。

$\dfrac{180^\circ - \theta}{3} = \alpha$ とすると

$60^\circ - \dfrac{\theta}{3} = \alpha$

$\therefore \dfrac{\theta}{3} = 60^\circ - \alpha$

したがって $\dfrac{\theta}{3}$ を作図するには，$\angle Y_1OY_3 = 60^\circ$ となるように作図すればよい。

★　$180^\circ < \theta < 360^\circ$ のときを考えてみよう♪

（参考）角の三等分をしたかった理由

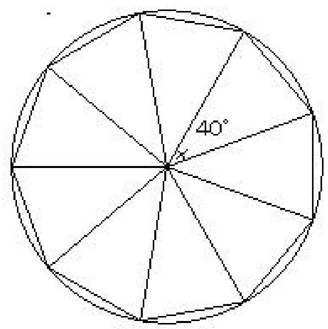
ギリシア人が直角以外の角を３等分する問題に出くわしたのは，疑いもなく，辺が<９>または９の倍数の正多角形を円に内接させようと企てたときであった。

（「ギリシア数学史」T.L.ヒース著 ）

このように，ギリシア人は数学を発展させていく上で，正九角形を作図したかった。そのためには角を三等分することが必要だった。

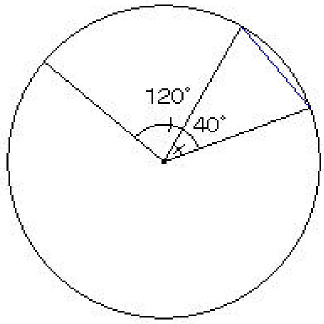
正九角形の作図

正九角形のそれぞれの頂点と中心を結んだ線分に挟まれた角は 40°

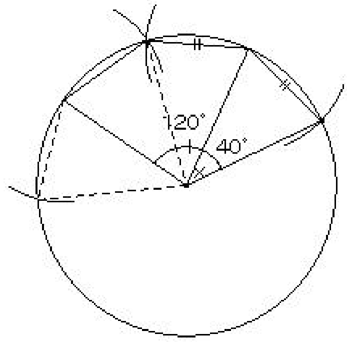


40°の角を描くために，120°(作図できる)を三等分したい

120°を作図し，三等分する



コンパスを使って，合同な三角形を作図していく

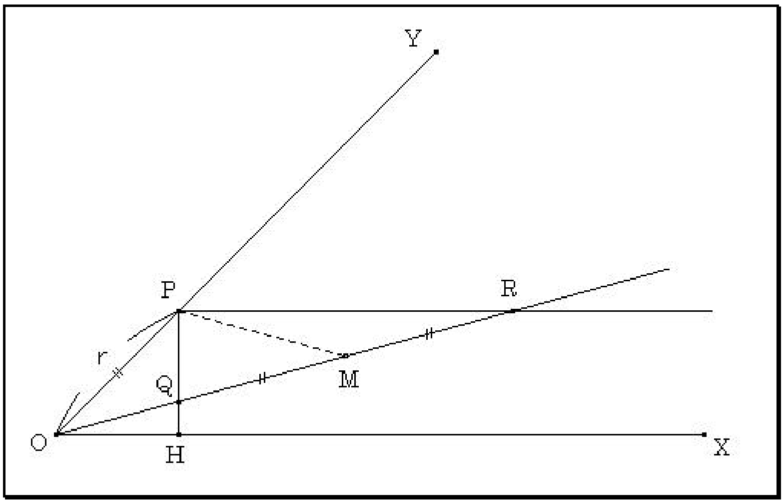


ワークシート No.1

3年　組　　番　氏名＿＿＿＿＿＿＿＿

角の三等分器の構造　①

角の三等分器の構造を数学的に証明してみよう。



（条件　：　ＯＰ＝QM＝MR＝ｒ　，　ＰＲ//ＯＸ　，　ＰＨ⊥ＯＸ）

（証明）QM＝MR＝ｒ　，　∠ＱＰＲ＝９０°であるから,円周角の定理より

点Ｐは点$\boxed{\quad}$を中心として線分$\boxed{\qquad}$を直径とする円周上にある。

したがって

線分MＰ＝$\boxed{\quad}$.

∠ＱＯＨ＝θとすると

∠ＱＯＨ＝∠$\boxed{\qquad\quad}$＝θ　　（平行線の錯角）

MR＝MＰ＝ｒより

∠$\boxed{\qquad\quad}$＝∠MＰＲ＝θ

また

∠$\boxed{\qquad\quad}$＝∠MRＰ＋∠MＰＲ＝２θ　　（三角形の外角）

MＰ＝ＯＰ＝ｒより

∠$\boxed{\qquad\quad}$＝∠ＰOM＝２θ

したがって

∠ＹＯＸ＝∠ＱＯＨ＋∠ＰOM＝θ＋２θ＝３θ

ゆえに

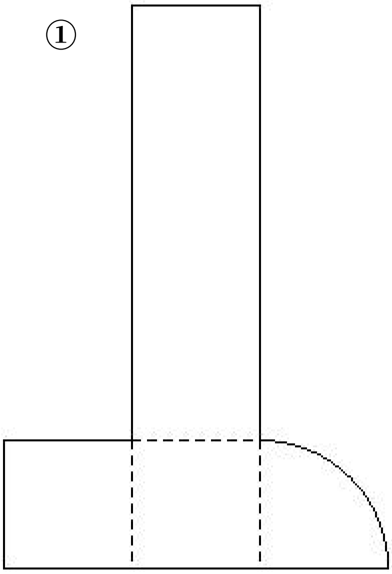
∠ＱＯＨは∠ＹＯＸの 1/3 である.

ワークシート No.2

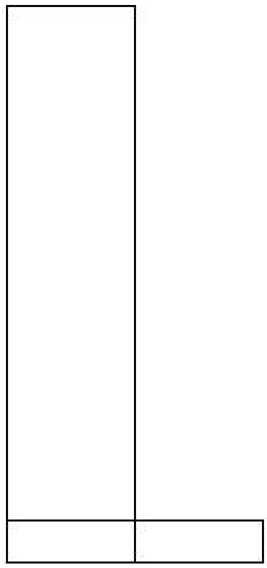
角の三等分器

角の三等分器を切り取って使ってみよう。

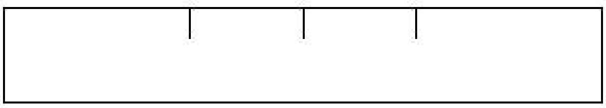
①



②



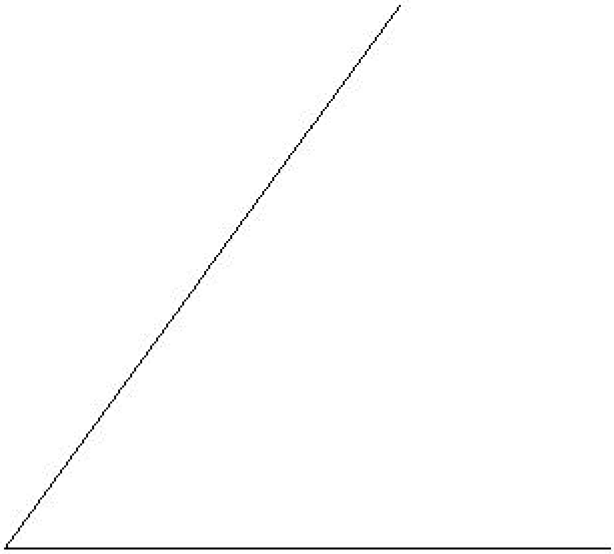
③

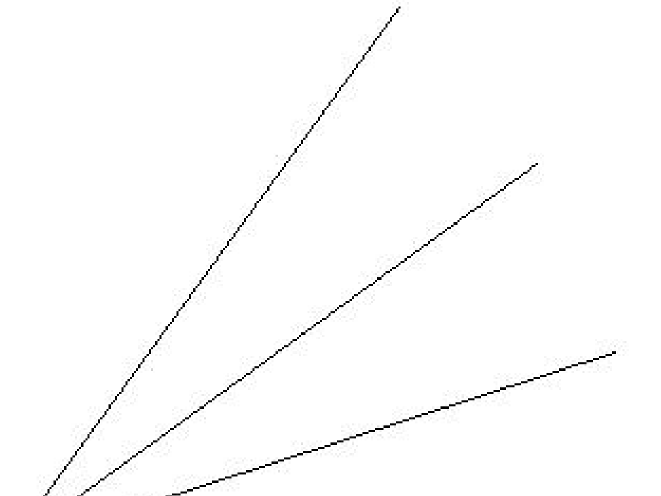


ワークシート No.3
角の三等分器の使い方を考えよう。

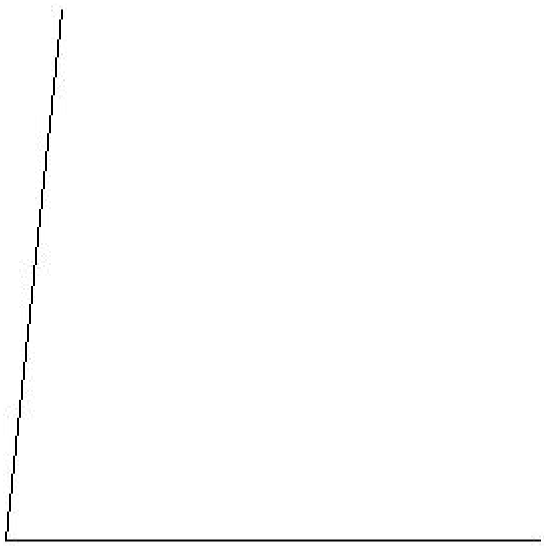
3年　組　　番 氏名＿＿＿＿＿＿＿＿

①　５４°





②　８４°

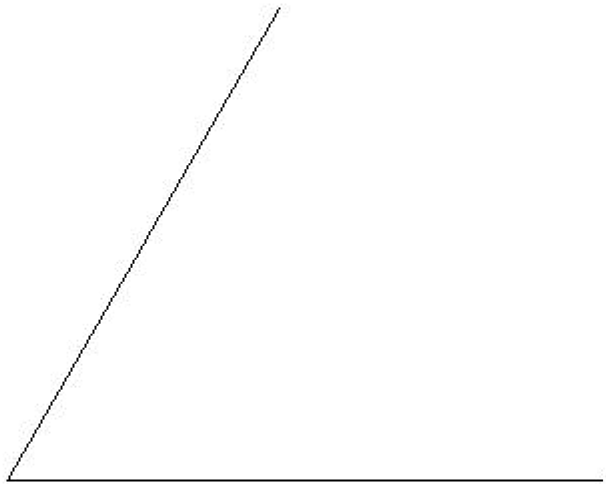


ワークシート No.4

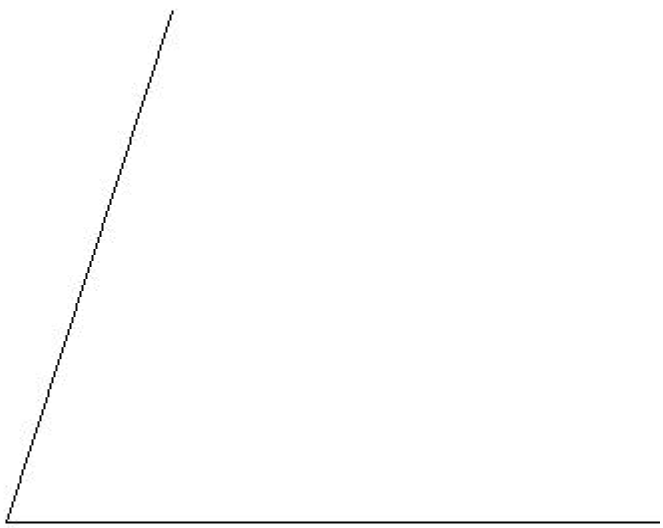
角の三等分線の作図

３年　組　　番 氏名＿＿＿＿＿＿＿＿

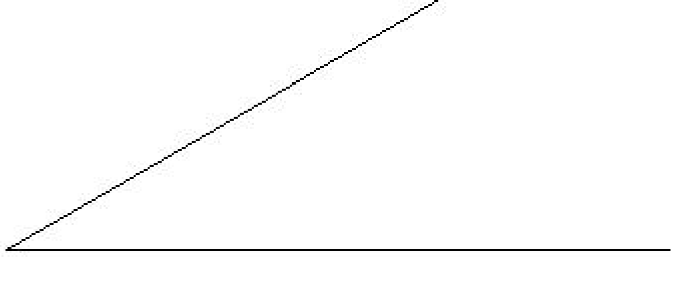
（１）６０°



（２）７２°



（３）３０°

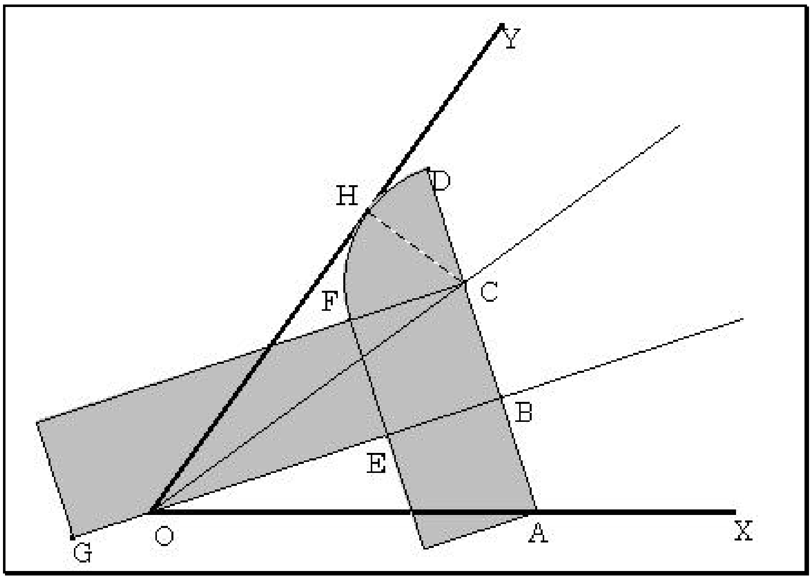


ワークシート No.5

角の三等分器の構造　②

3年　組　　番 氏名＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

角の三等分器の構造を数学的に証明してみよう。



（証明）

点Ｃから線分ＯＹへ垂線をおろし，その足をＨとする。

△ＡＢＯ，△ＣＢＯにおいて，

ＡＢ＝□　．

□は共通

∠□＝∠□＝９０°

したがって，２辺とその間の角が等しいので，△ＡＢＯ≡△ＣＢＯ

よって，∠ＡＯＢ＝∠□　…①

△ＣＢＯ，△ＣＨＯにおいて

ＢＣ＝□(＝ＤＣ)

□は共通

∠□＝∠□＝９０°

したがって直角三角形の斜辺と他の一辺が等しいので，△ＣＢＯ≡△ＣＨＯ

よって，∠ＣＯＢ＝∠□　…②

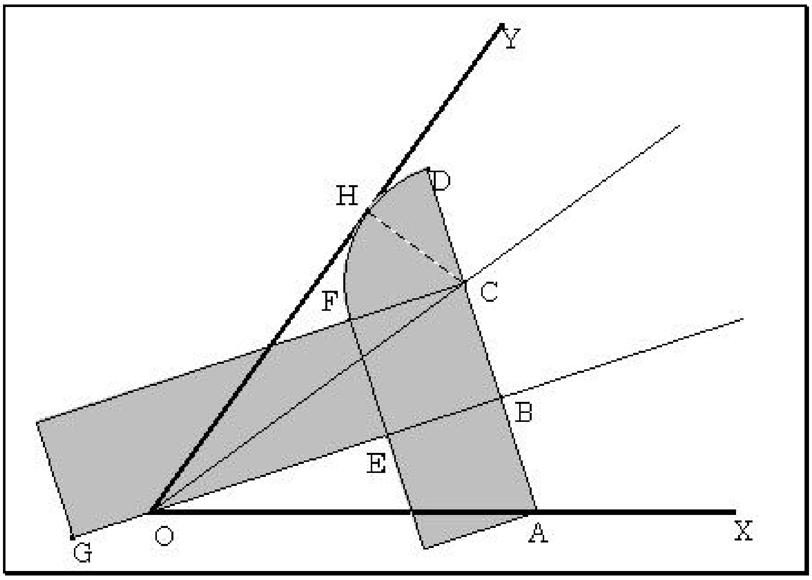
①，②より

∠ＡＯＢ＝∠ＣＯＢ＝∠ＣＯＨ

ワークシート No.5　　模範解答

角の三等分器の構造　②

角の三等分器の構造を幾何学的に証明してみよう



（証明）点Cから線分ＯＹへ垂線をおろし，その足をＨとする。

△ＡＢＯ，△ＣＢＯにおいて，

ＡＢ＝ＣＢ

ＯＢは共通

∠ＡＢＯ＝∠ＣＢＯ＝９０°

したがって，２辺とその間の角が等しいので，△ＡＢＯ≡△ＣＢＯ

よって，∠ＡＯＢ＝∠ＣＯＢ　…①

△ＣＢＯ，△ＣＨＯにおいて

ＢＣ＝ＨＣ(＝ＤＣ)

ＯＣは共通

∠ＣＢＯ＝∠ＣＨＯ＝９０°

したがって直角三角形の斜辺と他の一辺が等しいので，△ＣＢＯ≡△ＣＨＯ

よって，∠ＣＯＢ＝∠ＣＯＨ　…②

①，②より

∠ＡＯＢ＝∠ＣＯＢ＝∠ＣＯＨ

角の三等分器についての感想を書いてください。
（発明されたことや，構造など）

肯定的なこと

否定的なこと

角の三等分器を使って三等分線を描いた感想を書いてください。

肯定的なこと

否定的なこと