

# 接線の幾何的作図に関する授業実践

## アポロニウスの円錐曲線論を用いて

筑波大学大学院修士課程教育研究科

中嶋 俊朗

	要約
1. はじめに	
2. 研究目的・研究方法	本研究では、アポロニウスの「円錐曲線論」を題材とし、円錐曲線とその接線の幾何的作図の解釈や活動を中心とする授業を行った。当時の数学を人の営みとして認識することによって生徒がこれまで学んできた数学を捉えなおし、生徒の数学観の変容が見られた。数学を発展的に捉え考えることの楽しさを再認識し、数学に対する興味・関心を高めることができたといえる。
3. 授業概要	
(1) 教材の解説	
(2) 授業環境	
(3) 授業展開	
4. 結果・考察	
5. おわりに	

### 1. はじめに

「数学は社会では役に立たない」と考え、数学に対する意欲や目的を失っている生徒が多くいる状況がある。このような状況は数学学習における「数学の基本的な概念や原理・法則の理解」や「数学的思考の育成」という数学教育の目的の一つが達成されていないことの現れではないかと考えられる。「興味・関心」がないから学習意欲が失われ、「概念や原理・法則の理解」や「数学的思考の育成」は達成されにくく、学習内容が定着せず学ぶ意欲につながらないという悪循環がこのような状況を生みだしている。

平成15年度から実施される「新学習指導要領」<sup>1</sup>には、「数学における概念の形成や原理・法則の認識の過程と人間や文化の関わりを中心として、数学史的な話題を取り上げる」ことで、「数量や図形についての概念等が人間の活動にかかわって発展してきたことを理解し、数学に対する興味・関心を高める。」という記述が見られる。この内容から、「数学史」の役割として、「数学と人間の関わり」を伝え「興味・関心」を高めていくことができるということがあげられる。それが、「数学基礎」の目標にある「数学的な見方や考え方の良さを認識し数学を活用す

<sup>1</sup>文部科学省(平成11年度)．高等学校学習指導要領解説 数学編・理数編

る態度を育てる。」ことを達成可能にするのではないか。磯田正美(2001)<sup>2</sup>は「数学史は、数学を人の営みとして自覚する意味での数学の文化的視野の覚醒契機を提供しえる。」と述べ、「数学史原典解釈により生徒が学ぶ数学の文化的視野の覚醒機会を提供する。」としている。

先行研究には、アポロニウスの「円錐曲線論」を扱ったものとして、後藤(1997)、薬師寺(1998)があり、アポロニウスの「接触」の原典を扱い、カプリを用いた教材開発をしたものとして高橋(2001)があるが、アポロニウスの「円錐曲線論」の原典を扱い、カプリを用いた教材開発をした先行研究は未だ見いだせていない。

そこで、円錐曲線の起源に焦点をあて、円錐曲線(主に放物線)とその接線の幾何的作図について追体験させ、その成果について考察する。

## 2. 研究目的・研究方法

研究目的：数学史を授業に取り入れることにより、生徒が学んできた数学を人の営みとして捉え、数学観の変容をもたらし、数学に対する興味・関心を高めていくことができるかを考察する。

目的達成のため、以下を課題とする。

課題1：数学史を授業に取り入れることにより、数学を発展的に捉え、数学に対する見方を変え、興味・関心を高めていくことができるか。

課題2：作図を考えることにより、円錐曲線やその接線を幾何的に捉え、理解を深めることができるか。

研究方法：原典を用いた歴史的教材を開発し、それを用いた授業実践を行う。授業の事前・事後に数学に関する意識を問うアンケート、各授業ごとに授業に対する感想を問うアンケート及び授業を撮影したビデオをもとに考察する。

## 3. 研究概要

### (1).教材の解説

本研究では原典としてアポロニウスの『円錐曲線論』、『ユークリッド原論』を題材として用いた。「円錐曲線の最初の定義」「円錐曲線の定義の命題や接線の性質の命題」を理解し、「比例中項の関係」の作図方法

---

<sup>2</sup>磯田正美(2001). 異文化体験からみた数学の文化的視野の覚醒に関する一考察 隠れた文化としての数学観の意識化と変容を求めて . 筑波数学教育研究 第20号 . pp.39 - 48

を利用した円錐曲線の作図方法やその接線の作図方法を考え、作図ツール(Cabri Geometry )を用いて作図し、生徒が学んできた円錐曲線と比較する。

## (2).授業環境

対象：都立高等学校 希望者 5 名（男子 3 年生 4 名、2 年生 1 名）

日時：平成 13 年 12 月 18 日(火)・19 日(水)・21 日(金) 放課後

準備：コンピュータ ( Windows )、作図ツール(Cabri Geometry 以下「カブリ」と呼ぶ)、Microsoft Power Point、ビデオプロジェクター、実物投影機、事前アンケート、事後アンケート、ワークシート(授業の感想を含む)、授業資料、作図用ファイル

## (3).授業展開

### 1 時間目：放物線の定義を理解し、比例中項の作図と放物線上の点の作図を考える

事前課題には、3 時間の授業に目的意識を持たせるために、円や放物線の接線について、接線の方程式を求める問題と、接線を作図する問題を課した。導入はその解答から始めた。方程式を求める解法は様々な方法が既習であり、円の接線の作図は知っているが、放物線の接線の作図は知らないことが確認され、それを目的することとした。

### 事前課題

問題 1：円  $x^2 + y^2 = 5$  について、次の接線の方程式を求めよ。

円周上の点  $(1, -2)$  における接線  
点  $(1, 3)$  から円に引いた接線

問題 2：放物線  $y = 3x^2$  について、次の接線の方程式を求めよ

放物線上の点  $(1, 3)$  における接線  
点  $(1, 0)$  から放物線に引いた接線

問題 3：円  $O$  について、次の接線を作図せよ。

円周上の点  $P$  における円  $O$  の接線  
円外の点  $Q$  から引いた円  $O$  の接線

問題 4：放物線について、次の接線を作図せよ。

放物線上の点  $P$  における放物線の接線  
放物線外の点  $Q$  から引いた放物線の接線



【写真】接線の作図の仕方をホワイトボードで、生徒が説明する。

放物線のような円錐曲線について考えられていたギリシア数学の「ユークリッド原論」 巻命題 14 を取り上げる。考えの基本に「比例の考え」・「面積のあてはめ」が使われていることを理解するために、比例中

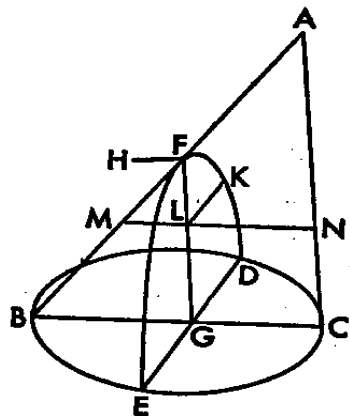




Therefore  $HF : FA$  comp.  $ML : LF, NL : FA$ .  
But  
rect.  $ML, LN : \text{rect. } LF, FA$  comp.  $ML : LF, LN : FA$  (Eucl. vi. 23).  
Therefore  $HF : FA :: \text{rect. } ML, LN : \text{rect. } LF, FA$ .  
But, with the straight line  $FL$  taken as common height,  
 $HF : FA :: \text{rect. } HF, FL : \text{rect. } LF, FA$  (Eucl. vi. 1),  
therefore  
rect.  $ML, LN : \text{rect. } LF, FA :: \text{rect. } HF, FL : \text{rect. } LF, FA$  (Eucl. v. 11).  
Therefore  
rect.  $ML, LN = \text{rect. } HF, FL$  (Eucl. v. 9).  
But  
rect.  $ML, LN = \text{sq. } KL$ ,  
therefore also  
sq.  $KL = \text{rect. } HF, FL$ .  
And let such a section be called a parabola, and let  $HF$  be called the straight line to which the straight lines drawn ordinately to the diameter  $FG$  are applied in square (καθ' ὃν ἕκασται αἱ ἀνωτάτωι περιγίνομεν ἐπὶ τῆς  $ZH$  ἰσότητας), and let it also be called the upright side (ἀρθία).<sup>1</sup>

切り口の直径  $FG$  が軸三角形  $ABC$  の一方の辺  $AC$  に平行であると  
する。点  $F$  から  $FH$  を  $FG$  に垂直になるように描き、  
 $BC^2 : BA \cdot AC = FH : FA$  となるようにする。

点  $K$  をその切り口に任意にとり、 $K$  を通って  $KL$  を  $DE$  に平行に描くと  
 $KL^2 = HF \cdot FL$  であるといえる。



【命題 11 の日本語訳の一部】

原典解釈については、ギリシア語・ラテン語訳・英語訳・日本語訳をテキストに掲載し、内容の理解は日本語訳を用いた。その際、どのように証明されているかを理解するためにワークシートは証明の行間を埋める穴埋め形式にした。(写真)

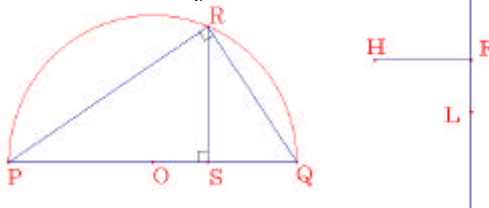
証明された結果が、「長方形の面積と正方形の面積が等しい」という幾何的な説明が出来る形であることを説明し、比例中項の説明と結びつけた。宿題として次の二つを提示した。

ユークリッド原論、アポロニウスの円錐曲線論(ギリシア語・ラテン語訳・英語訳・日本語訳)を読んで気づいたこと、感じたことを記述する。

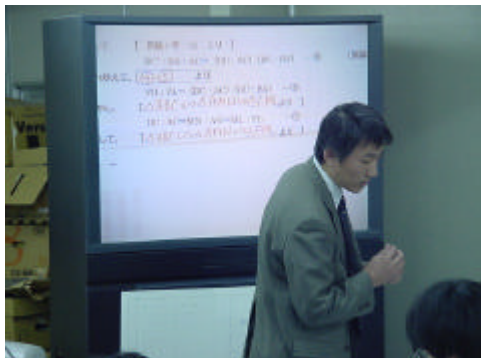
理解した放物線の定義と比例中項の関係を比較することによって点  $K$  の作図方法を考える。

【宿題】 点  $K$  を作図せよ。

比例中項の関係  $RS^2 = PS \cdot SQ$           放物線の定義  $KL^2 = FH \cdot FL$



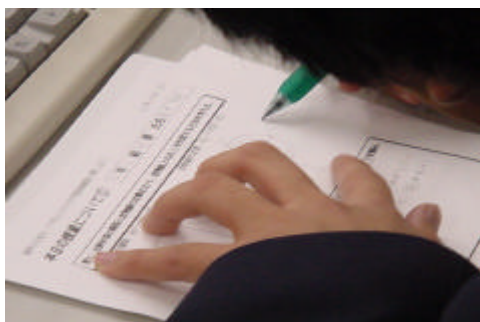
【写真】生徒は英語訳からの日本語訳を用いたワークシートを用いて命題 11 の証明を理解する。



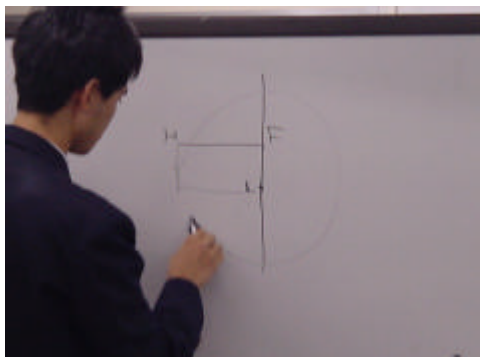
【写真】命題 11 の証明にはユークリッド原論の 巻命題 14、比例の考え、三角形の相似などが使われていることを確認する。



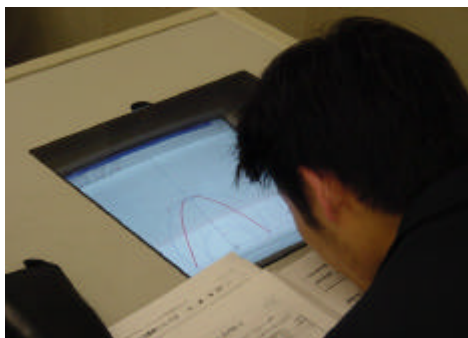
【写真】ホワイトボードに比例中項の関係を満たす点 R を作図する。



【写真】ワークシートに放物線上の点 K の作図方法を考える。



【写真】ホワイトボードで点 K の作図の仕方を生徒が発表する。



【写真】放物線を作図する。

## 2 時間目：作図ツールにより放物線の定義を用いて放物線の作図をする

前時の課題である比例中項の関係 ( $RS^2 = PS \cdot SQ$ ) が成り立つ点 R を PS、SQ から作図 (写真) できることを利用して、放物線の定義 ( $KL^2 = FH \cdot FL$ ) を満たす点 K の作図方法を考える。(写真)

カブリを使うのが初めてであったため、カブリの使い方を点 K の作図を利用して理解し (写真)

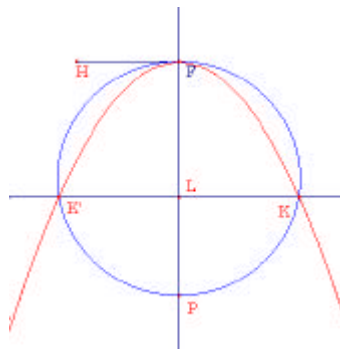
) 実際に各自カブリで作図する。(写真)

カブリの機能は (直線を描く、線分を描く、垂線を描く、平行線を描く、点をとる、交点をとる、中点をとる、円を描く、ラベルをつける、など) を教えることにした。

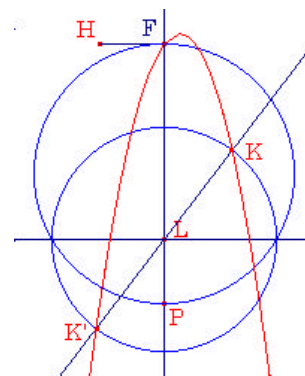
カブリのトレース機能を使い、作図された点 K の軌跡が放物線になることを確認する。(図)

比例中項の関係を利用して点 K を作図して描いた放物線は FL と KL を垂直としたが、 $KL^2 = FH \cdot FL$  を満たしていれば良いので、点 K は点 L を中心にした円周上の点として考える。(図) これによって斜円錐で円錐曲線を考えた場合 (直径 FL が軸にならない場合) と結びつける。

宿題を、「接線の性質 (定義 4 と命題 33) を理解し、放物線上の点における接線の作図を考える。」とした。



【図】放物線



【図】放物線

### 3 時間目：放物線の接線の性質を理解し、接線を作図する。

#### 次に双曲線・楕円の定義と接線の性質を理解する。



【写真】接線の性質を利用して、作図ツールで接線を作図する。

前時の課題である接線の性質（定義 4 と命題 33）で接線・直径・縦線方向の関係を考え、放物線上の点における接線の作図方法をテキスト上で考え、その後、カブリを用いて作図する。（写真）

次に、接線の性質（巻命題 46 と 巻命題 7）で接線・直径・縦線方向の関係を理解し、放物線外の点からの接線の作図方法をテキスト上で考え、カブリを用いて作図する。

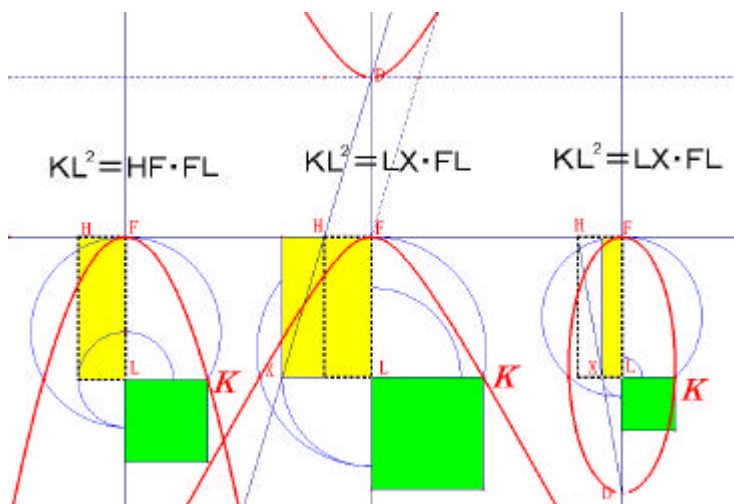
使った問題が事前課題の問題 2 の問題であることから、カブリの機能を用いて作図した接線の方程式等を表示させると事前に求めた接線の方程式と一致することを確認する。

次に、命題 12（双曲線の定義）と命題 13（楕円の定義）についても放物線と同様にして定義が理解できることを確認する。

3 つの円錐曲線の定義を満たす点 K の作図をディスプレイ上で確認し、カブリのトレース機能を用いて、作図された点 K の軌跡がそれぞれの曲線になることを体験する。（図 写真）

作図したものを比較しながら「面積のあてはめ」について考え、3 曲線の名称の由来がここにあることを理解する。

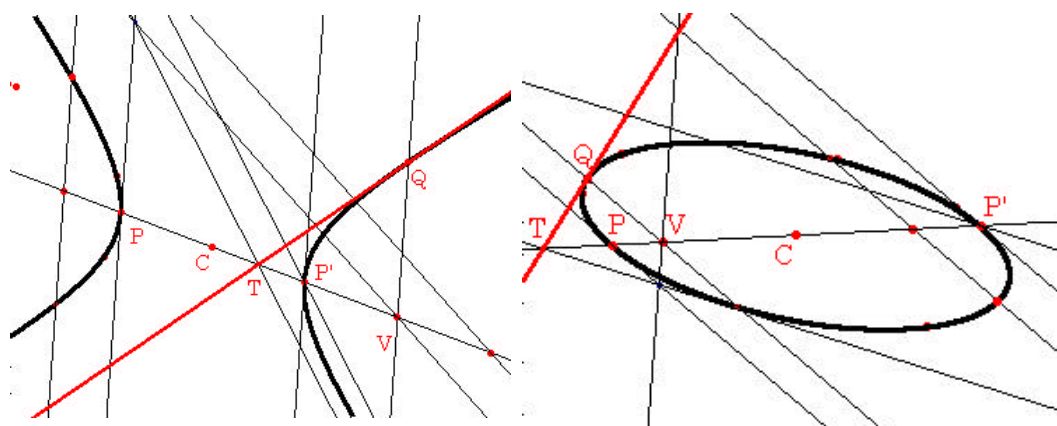
放物線(parabola)（あてはまる）  
 双曲線(hyperbola)（超過する）  
 楕円(ellipse)（不足する）



【左図】3種類の曲線の比較  
 【上写真】納得の様子。

放物線の接線の性質と双曲線・楕円の接線の性質の相違点（命題 33 と命題 34・36）を確認し、放物線と同様に接線の作図方法を理解する。

作図された双曲線の接線（図 ）が、カブリの機能を利用して双曲線を楕円に変形しても性質が保たれ、楕円の接線（図 ）になることを体験する。



【図】 双曲線上の点Qにおける接線の作図

【図】 楕円上の点Qにおける接線の作図

#### 4 . 結果・考察

課題1の「数学史を授業に取り入れることにより、数学を発展的に捉え、数学に対する見方を変え、興味・関心を高めていくことができるか。」について、授業後のアンケートより、1日目は、自分たちが学習してきた数学と比べると証明の長さや書き方、英文の記述に戸惑い、違和感を覚えた生徒の反応が多かったが、3日目になると内容を理解してギリシア数学と学習してきた数学の違いやそのすばらしさを認める感想になっている。これまで自分たちが学んできた図形が、紀元前の古代ギリシア時代に立体図形の切断面という形で詳しく厳密に記述され、しかも、方程式を使わない表現方法で書かれていた当時の数学を解釈する活動を通して、生徒はこれまで学んできた数学と比べ違いを感じ、人の営みとしての数学を捉えなおし理解を深め、興味・関心を高めていることが分かる。

##### 【第1日目の授業後の感想】

##### <ユークリッド原論を読んで気づいたこと>

- ・全体はぼんやりと掴めるのだが、所々に意味の分からない部分があり、しっかりと分からなかった。読めない単語の長文を読んでいるかんじである。
- ・方程式を用いず、平方を正方形で表している点が現在と違い、変わっているなと思いました。

##### <アポロニウスの円錐曲線論を読んで気づいたこと>

- ・原文・ラテン語訳は文字で説明して、ごちゃごちゃしているが、英語訳・日本語訳は文字と式で説明されていて、すっきりしている。



### 【第3日目の授業後の感想】

#### <ギリシア数学についてどう思いましたか>

- ・紀元前から考えられていたなんてすごいと思う。
- ・図形として考えることは確かだと思う。それを証明することができたなんて昔の人は偉いと思った。
- ・数学といわれても、数字を使わない図形を中心に行われた学問だと思った。
- ・全て公理をもとにして当たり前なことまでも証明するのだから感心しました。

#### <現在の数学と比べて、アポロニウスの円錐曲線論についてどう思いましたか>

- ・いつも気にとめてない接線などにここまで深い事柄が隠されているとは思わなかった。

以上から、数学史を授業に取り入れることにより、数学を発展的に捉え、数学に対する見方を変え、興味・関心を高めていくことができたと言える。

課題2の「作図を考えることにより、円錐曲線やその接線を幾何的に捉え、理解を深めることができるか。」について、授業後のアンケートから、図があることが理解を助け、作図により図形の性質の理解をより深めることができることが分かり、図や作図の大切さを感じている。また、カブリ（作図ツール）を使うことが初めてであったので、初めは機能に対して驚きを感じていたが、最終的にはその有効性を感じるに至っている。作図することで作図方法が分かるだけでなく、代数中心に学んできた数学に対し、幾何的視点の重要性を再認識し、幾何と代数の結びつきを強め、図形に対する理解が深まっている。

### 【第1日目の授業後の感想】

- ・証明は式がやたらと多くごちゃごちゃしているから図で表されるとすごく助かります。

### 【第2日目の授業後の感想】

- ・実際に手を使って作図してみると、作図の仕方や作図の意味が分かり、数学に対する考えが深まったと思う。
- ・今のパソコンにこのような能力があるとは思わなかった。
- ・コンピュータを使った作図が楽で楽しかった。
- ・コンピュータプログラムを使っての作図はおもしろく、点Kがどこにあるのかよくわかった。

### 【第3日目の授業後の感想】

#### <授業を通して変わったと思うこと書いてください>

- ・方程式から接線の方程式を求めるだけでなく、実際に作図をするのも大切だなと思った。
- ・数学の勉強をする中で、計算上成り立つだけでなく、作図によって証明することは、理解をより深めるものだなあと感じるようになった。

#### <現在の数学と比べてアポロニウスの円錐曲線論についてどう思いましたか>

- ・今までに習ってきた図形も、このように複雑なことが隠れていると思うと、少しの恐怖と残りの好奇心とで心がいっぱいです。
- ・非常に難しく感じたが、実際に作図をして考えるというのは大切だと思う。多くの人に知ってもらえば良いと思う。

「方程式」・「図形」については、事前課題に使った放物線の接線を作図させたので、作図できた接線の方程式を表示すると事前に求めた方程式に一致した。事後の感想に事前のアンケートになかった図形と方程式の関係についての記述が増えたことより、図形と方程式の関係についての理解が深まったことが分かる。

< 「方程式」という言葉からイメージすることを自由に書いてください。 >

**事前**

- ・数の関係。
- ・左辺と右辺が等しい。
- ・ $x =$  の形、何か答えがでてくる感じ。

**事後**

- ・方程式は図形を表す式である。
- ・方程式は解を求めるもの。でも  $x$   $y$  座標で一つになる。
- ・図形の存在する関係を示すもの

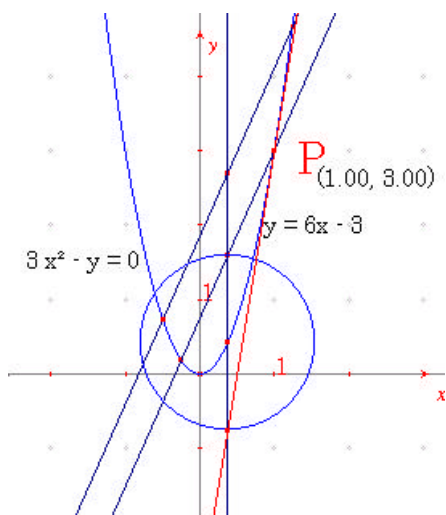
< 「図形」という言葉からイメージすることを自由に書いてください。 >

**事前**

- ・三角形・四角形など平面上で点と線で結ばれたもの。

**事後**

- ・字面だけでなく、空間的な要素を含んでいるので、現実的なものでありそうだが、逆につかみにくいイメージがある。
- ・自然界に存在するもののなす形。楕円といわれると、地球が太陽を中心として描く軌跡という具合です。
- ・図形は方程式を形にするもの
- ・図形は形か長さなどを求めるものでも  $x$   $y$  座標などで方程式と一つになる。



以上から、作図を考えることにより、円錐曲線やその接線を幾何的に捉え、理解を深めることができたといえる。

【左図、写真】

放物線上の点Pにおける接線を作図し、その方程式を表示する。

5. おわりに

本研究では、原典を教材に取り入れた数学史の学習が、生徒の数学観の変容に貢献でき、数学に対する興味・関心を高めることができるかに焦点を当ててきた。アポロニウスの円錐曲線論を題材に、定義による円錐曲線とその接線の作図につ

いて、放物線を中心に作図方法を考え、作図ツールを用いて学習することで、数学を発展的に捉え、数学に対する「興味・関心」を高めることができることが分かった。

授業後のアンケートにおいて、数学に対して理解が深まり興味・関心が高まった様子が生徒に現れたという点で、この実践が果たした役割は大きいと考えられる。新学習指導要領のもとでこのような意識を生徒に持たせる学習は可能であるが、数学史を活用した学習がより数学観の変容に貢献できるといえる。

今回授業を受けた生徒は、作図ツール(カブリ)を使うのが初めてであったこと、操作になれるのに時間が十分にとれなかったことから、驚きの中には作図が図形の理解を助けたことや作図方法が理解できたこと以外に作図ツールの機能に対するものが見られた。感想には、作図方法を理解するためにはコンピュータだけでなく、手による作図方法を考えたことで理解が深まる様子も見られた。

今後、数学史を取り入れた教材開発と、コンピュータの効果的な活用方法についての検証を課題として取り組んでいきたい。

謝辞 研究授業の実施に際して、東京都立九段高等学校の荻野大吾先生、佐野孝志先生をはじめ、数学科の先生方に貴重な御意見、御協力をいただきました。厚く御礼申し上げます。

註1 本研究は、筑波大学学内プロジェクト研究(助成研究B:研究代表者 磯田正美)「インターネット上の数学博物館の開発・評価研究」の一貫として行われた。

註2 授業の詳細、並びに資料は次に掲示している。<http://www.mathedu-jp.org>

## 参考文献

- 【1】R .Catesby Taliaferro(1939).*ON CONIC SECTIONS BY APOLLONIUS OF PERGA* .  
*GREAT BOOKS OF THE WESTERN WORLD*(1952). University of Chicago . ENCYCLOPEDIA BRITANNICA , INC . pp.595 - 804
- 【2】Edmundus Halleius (1710) . *DE SECTIONE CYLINDRI ET CONI LIBRI DUO* .  
Biblio Verlag・Osnabruck(1984) . *Apollonii Pergaei CONICORUM LIBRI OCTO* . pp.13 - 14 , pp.31 - 37
- 【3】中村幸四郎・寺坂英孝・伊藤俊太郎・池田美恵訳(1996) . *ユークリッド原論(縮刷)*

版). 共立出版 . p.31 , 33 , 34 , 38 , 39 , 47 , 48

- 【 4 】 磯田正美(2001) . 異文化体験からみた数学の文化的視野の覚醒に関する一考察 隠れた文化としての数学観の意識化と変容を求めて 筑波数学教育研究 第 20 号 . pp.39 - 48
- 【 5 】 磯田正美(1987) . 数学学習における数学史の利用に関する一考察 . 筑波大学附属駒場中・高等学校研究報告、第 26 集 . pp.159 - 174
- 【 6 】 沖田和美(1996) . 学校数学における数学史を生かした指導に関する一考察 . 平成 7 年度筑波大学大学院教育研究科修士論文
- 【 7 】 恩田洋一(1999) . 一次文献を利用した数学史教育に関する一考察 ~ 「数学基礎」に関連して ~ . 平成 10 年度筑波大学大学院教育研究科修士論文
- 【 8 】 文部科学省(平成 11 年度) . 高等学校学習指導要領解説 数学編・理数編 . pp.31 - 33

#### 上記以外に授業に際して参考にした参考文献

- 【 9 】 Apollonius , Conics i . , Apoll . Perg . ed . Heiberg i . 6.2 - 8.28 , 22.26 - 36.5 , 36.26 - 58.7  
Ivor Thomas(1941) . Greek Mathematical Works . Harvard University . pp.284 - 329
- 【 10 】 T . L . HEATH(1896) . APOLLONIUS OF PERGA TREATISE ON CONIC SECTION . CAMBRIDGE AT THE UNIVERSITY PRESS . pp.1 - 41
- 【 11 】 T . L . ヒース(1998) . 復刻版 ギリシア数学史 . 共立出版 . pp.281 - 293
- 【 12 】 スチュアート・ホリングデール(1993) . 数学を築いた天才たち④ . 講談社 . pp.63 - 106
- 【 13 】 近藤洋逸(1977) . 数学の誕生 古代数学史入門 . 現代数学社 . pp.201 - 213
- 【 14 】 ボイヤー(1984) . 数学の歴史 2 . 加賀美鐵雄、浦野由有訳 . 朝倉書店 . pp.30 - 55
- 【 15 】 後藤司(1997) . 曲線の表現と作図ツールをふまえた解析幾何教材の刷新に関する一考察 ~ ギリシャから微積分創成紀をふまえて ~ . 平成 8 年度筑波大学大学院教育研究科修士論文
- 【 16 】 薬師寺将二(1998) . 解析の歴史的変遷を踏まえた曲線の探求に関する一考察 ~ 作図ツールの使用を前提に ~ . 平成 9 年度筑波大学大学院教育研究科修士論文
- 【 17 】 高橋英樹(2001) . 高校数学における数学史の導入に関する一考察 ~ アポロニウスの問題の解法を通して ~ . 世界の教育課程改革の動向と歴史文化志向の数学教育 代数・幾何・微積 For All プロジェクトの新展開 . 中学校・高等学校数学科教育課程開発に関する研究 ( 8 ) . 筑波大学数学教育学研究室 . pp.143 - 160