２年　　　組　　　番　氏名＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

授業資料

デカルトの「幾何学」を読もう！

授業者　：阿部　千里

筑波大学大学院教育研究科教科教育専攻数学教育コース１年）

「ぼくは，連続量であれ非連続量であれ，任意の種類の量について提出されうるすべての問題を一般的に解くことを可能にするような，或るまったく新しい学問を作り出したいと思う．それも，各問題をその本性に応じて解くのだ．算術において，或る問題は有理数によって解かれ，或るものはただ根数（第 3 巻 注 14 を参照）によって解かれ，また或るものは想像はされるが解かれないのと同様に，連続量においても，或る問題は直線か円周のみによって解かれ，或るものは，ただひとつの運動によって生じ新しいコンパスによって描かれうる他の曲線を用いなければ解かれず，——このコンパスも円を描く普通のコンパスに劣らず正確で幾何学的であるとぼくは考えるのだ——また或るものは，有名な円積線のように，互いに関連のない別々の運動によって生じ単に想像的であるにすぎない曲線を用いなければ解かれないということを，ぼくは証明したいと思う．そして，少なくともこれらの線によって解かれないようなものは想像しえないとぼくは考える．しかしぼくは，どの問題はかくかくの仕方で解かれ，他の仕方では解かれない，ということを証明するようになりたいのだ．こうすれば，幾何学中にもはや発見すべきものはほとんど残らないはずだ．これは際限のない仕事であり，ひとりの人間にできることではない．途方もなく野心的なことだ．しかしぼくは，何か或る光がこの学問の暗い渾沌を貫いて輝くのを見たのだ．この助けによって，最も深い闇をも散らすことができるとぼくは考えるのだ」(AT, X, p. 156–158).

1619 年 3 月 26 日　デカルトがオランダの物理学者ベークマンにあてた手紙

【「デカルト著作集　―幾何学―」 原亨吉　解説】より

※下線は授業者（阿部）が加えた

1 デカルト以前の数学

1－1 アラビア

①例；アル・フワーリズミ（9世紀頃　アラビア）の方程式の分類

第２章　アラビアの数学

方程式の標準形（１）	
Ⅰ　マール＝ジズル	Ⅰ　m＝pj　［$x^2=px$］
Ⅱ　マール＝独立数	Ⅱ　m＝qa　［$x^2=q$］
Ⅲ　ジズル＝独立数	Ⅲ　pj＝qa　［$px=q$］
方程式の標準形（２）	
Ⅳ　マール＋ジズル＝独立数	Ⅳ　m＋pj＝qa　［$x^2+px=q$］
Ⅴ　マール＋独立数＝ジズル	Ⅴ　m＋qa＝pj　［$x^2+q=px$］
Ⅵ　ジズル＋独立数＝マール	Ⅵ　pj＋qa＝m　［$px+q=x^2$］

【「中世の数学」 編著者　鈴木孝典　共立出版株式会社】

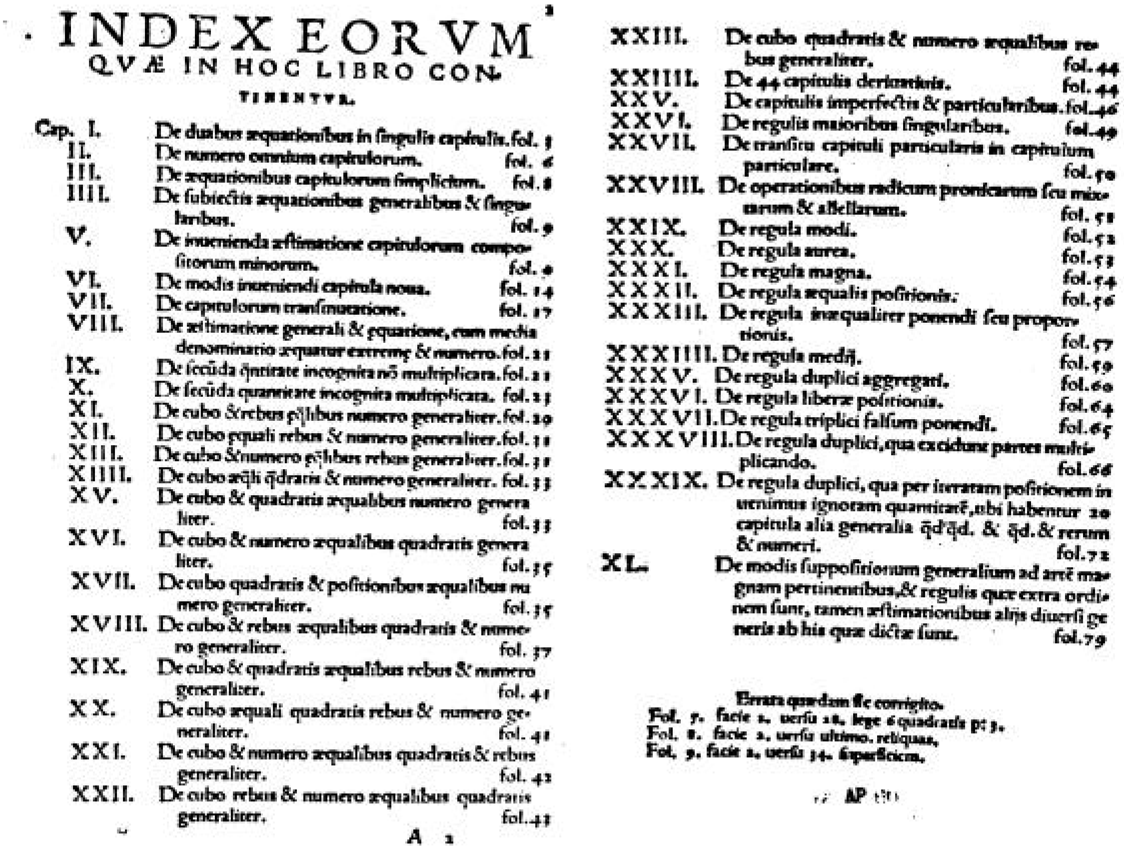
②例；ウマル・ハイヤーム（1123没　ペルシア）の方程式の分類

数が根に等しい	(1)	($n=x$)
数が平方に等しい	(2)	($n=x^2$)
数が立方に等しい	(3)	($n=x^3$)
根が平方に等しい	(4)	($qx=x^2$)
平方が立方に等しい	(5)	($qx^2=x^3$)
根が立方に等しい	(6)	($qx=x^3$)
平方と根が数に等しい	(7)	($x^2+px=q$)
平方と数が根に等しい	(8)	($x^2+q=px$)
根と数が平方に等しい	(9)	($px+q=x^2$)
立方と平方が根に等しい	(10)	($x^3+px^2=qx$)
立方と根が平方に等しい	(11)	($x^3+qx=px^2$)
根と平方が立方に等しい	(12)	($px^2+qx=x^3$)
立方と根が数に等しい	(13)	($x^3+qx=r$)
立方と数が根に等しい	(14)	($x^3+r=qx$)
数と根が立方に等しい	(15)	($qx+r=x^3$)
立方と平方が数に等しい	(16)	($x^3+px^2=r$)
立方と数が平方に等しい	(17)	($x^3+r=px^2$)
数と平方が立方に等しい	(18)	($px^2+r=x^3$)
立方，平方と根が数に等しい	(19)	($x^3+px^2+qx=r$)
立方，平方と数が根に等しい	(20)	($x^3+px^2+r=qx$)
立方，根と数が平方に等しい	(21)	($x^3+qx+r=px^2$)
立方が根，平方と数に等しい	(22)	($px^2+qx+r=x^3$)
立方と平方とが根と数に等しい	(23)	($x^3+px^2=qx+r$)
立方と根とが平方と数に等しい	(24)	($x^3+qx=px^2+r$)
立方と数とが根と平方に等しい	(25)	($x^3+r=px^2+qx$)

【「数学史～形成の立場から～」 著者中村幸四郎】より

1－２ ヨーロッパ

①例 ;カルダノ（1501～1576 イタリア）の方程式の分類


INDEX EORVM QVÆ IN HOC LIBRO CONTINENTVR.

Cap. I. De duabus æquationibus in ſingulis capitulis. fol. 3
II. De numero omnium capitulorum. fol. 6
III. De æquationibus capitulorum ſimplicium. fol. 8
IIII. De ſubiectis æquationibus generalibus & ſingularibus. fol. 9
V. De inuenienda æſtimatione capitulorum compoſitorum minorum. fol. [illegible]
VI. De modis inueniendi capitula noua. fol. 14
VII. De capitulorum tranſmutatione. fol. 17
VIII. De æſtimatione generali & æquatione, cum media denominatio æquatur extremę & numero. fol. 21
IX. De ſecũda q̃titate incognita nõ multiplicata. fol. 21
X. De ſecũda quantitate incognita multiplicata. fol. 23
XI. De cubo & rebus æq̃libus numero generaliter. fol. 29
XII. De cubo æquali rebus & numero generaliter. fol. 31
XIII. De cubo & numero æq̃libus rebus generaliter. fol. 31
XIIII. De cubo æq̃li q̃dratis & numero generaliter. fol. 33
XV. De cubo & quadratis æqualibus numero generaliter. fol. 33
XVI. De cubo & numero æqualibus quadratis generaliter. fol. 35
XVII. De cubo quadratis & poſitionibus æqualibus numero generaliter. fol. 35
XVIII. De cubo & rebus æqualibus quadratis & numero generaliter. fol. 37
XIX. De cubo & quadratis æqualibus rebus & numero generaliter. fol. 41
XX. De cubo æquali quadratis rebus & numero generaliter. fol. 41
XXI. De cubo & numero æqualibus quadratis & rebus generaliter. fol. 42
XXII. De cubo rebus & numero æqualibus quadratis generaliter. fol. 43

A 2

XXIII. De cubo quadratis & numero æqualibus rebus generaliter. fol. 44
XXIIII. De 44 capitulis deriuatiuis. fol. 44
XXV. De capitulis imperfectis & particularibus. fol. 46
XXVI. De regulis maioribus ſingularibus. fol. 49
XXVII. De tranſitu capituli particularis in capitulum particulare. fol. 50
XXVIII. De operationibus radicum pronicarum ſeu mixtarum & aſellarum. fol. 51
XXIX. De regula modi. fol. 52
XXX. De regula aurea. fol. 53
XXXI. De regula magna. fol. 54
XXXII. De regula æqualis poſitionis. fol. 56
XXXIII. De regula inæqualiter ponendi ſeu proportionis. fol. 57
XXXIIII. De regula medij. fol. 59
XXXV. De regula duplici aggregati. fol. 60
XXXVI. De regula liberæ poſitionis. fol. 64
XXXVII. De regula triplici falſum ponendi. fol. 65
XXXVIII. De regula duplici, qua excidunt partes multiplicando. fol. 66
XXXIX. De regula duplici, qua per iteratam poſitionem inuenimus ignotam quantitatẽ, ubi habentur 20 capitula alia generalia q̃d q̃d. & q̃d. & rerum & numeri. fol. 72
XL. De modis ſuppoſitionum generalium ad artẽ magnam pertinentibus, & regulis quæ extra ordinem ſunt, tamen æſtimationibus alijs diuerſi generis ab his quæ dictæ ſunt. fol. 79

Errata quædam ſic corrigito.
Fol. 7. facie 2. uerſu 18. lege 6 quadratis p: 3.
Fol. 8. facie 2. uerſu ultimo. reliquas.
Fol. 9. facie 2. uerſu 34. ſuperficiem.

【ĀRTIS MAGN?」 カルダノ】より

②例 ;ヴィエタ（1540～1603　 フランス）

ヴィエタは、方程式を次のように書いている。

B3 in A quad－D plano in A +A cubo aequator Z solido

未知量を母音（A、E、I など）既知量を子音（B、D、G など）、未知量の平方をquad, 未知量の立方をcubo,既知量の平方をplano,既知量の立方をsolido などで表した。

2 デカルト

2─1 人物紹介

ルネ デカルト (1596～1650)

・フランスのトゥーレーヌのラ・エで生まれる。古い家系で働く必要はなかったが、「哲学者」「軍人」「数学者」として生涯を過ごした。

・著作には『方法序説』『精神指導の規則』などがある。

⇒「幾何学」は、『方法序説』の中の例として取り上げられた部分である。

≪デカルトのお話≫

デカルトは虚弱な体質のために 8 歳まで家にとどまり、それからラ・フレーシュのイエスズ会の学校へ送られた。校長はすぐに彼に眼を留め、この才能ある生徒に朝の授業に出席できると思うまで好きなだけベッドにとどまることを許可した。デカルトは生涯を通じてその習慣を守った。

デカルトは後に、「朝のベッドでの長く静かな瞑想は、私の最良の哲学的かつ数学的思想の第一の源泉である」と述べている。ソクラテスは軍務で雪の中に何時間も立っていたときも思考することができたと伝えられているが、デカルトの精神は暖かいところで横になっているときしか正しく働かなかった。

【「数学を築いた天才たち上」スチュアート・ホリングデール著 岡部恒治 監訳】より

2─2 デカルト『精神指導の規則』

「この考察は幾何学に大なる光をもたらす。というのは、ほとんどすべての人が幾何学において三種の数量すなわち線・面・物体を考えるという誤りに陥っているからである。実際すでに述べたように、線及び面は真に物体と区別したものとして表象せられず、また線と面相互についてもそうなのである。しかして三者が、単純に、悟性によって抽象されたものとして考えられる場合でも、それらが、数量の相違なる種（species）だとはいえない、あたかも人間において、動物（animal）と生物（vivens）とが、実体（substantia）の相異なる種であるとはいえないように。」

【「精神指導の規則」（1950）．デカルト著．野田又夫訳　岩波書店】より

2─３　幾何学』第１巻

2─３─１ 円と直線だけを用いて作図しうる問題について

LA

GEOMETRIE.

LIVRE PREMIER.

Des probleſmes qu'on peut conſtruire ſans y employer que des cercles & des lignes droites.

TOus les Probleſmes de Geometrie ſe peuuent facilement reduire a tels termes, qu'il n'eſt beſoin par aprés que de connoiſtre la longeur de quelques lignes droites, pour les conſtruire.

Commẽt le calcul d'Arithmetique ſe rapporte aux operations de Geometrie.

Et comme toute l'Arithmetique n'eſt compoſée, que de quatre ou cinq operations, qui ſont l'Addition, la Souſtraction, la Multiplication, la Diuiſion, & l'Extraction des racines, qu'on peut prendre pour vne eſpece de Diuiſion : Ainſi n'at'on autre choſe a faire en Geometrie touchant les lignes qu'on cherche, pour les preparer a eſtre connuës, que leur en adiouſter d'autres, ou en oſter, Oubien en ayant vne, que ie nommeray l'vnité pour la rapporter d'autant mieux aux nombres , & qui peut ordinairement eſtre priſe a diſcretion, puis en ayant encore deux autres, en trouuer vne quatrieſme, qui ſoit à l'vne de ces deux, comme l'autre eſt a l'vnité, ce qui eſt le meſme que la Multiplication ; oubien en trouuer vne quatrieſme, qui ſoit a l'vne de ces deux, comme l'vnité

P p　　eſt

【[LA GEOMETRIE　REN? DESCARTES」】より

第 1 巻

円と直線だけを用いて作図しうる問題について

幾何学のすべての問題は，いくつかの直線の長ささえ知れば作図しうるような諸項へと，容易に分解することができる．

［算術の計算は幾何学の操作にどのように関係するか］

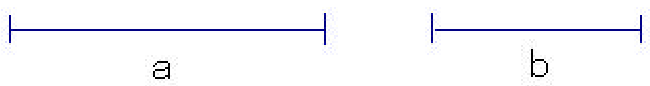
そして，全算術がただ4種か5種の演算，すなわち，加法，減法，乗法，除法，そして一種の除法と見なしうる巾根の抽出によって作られているのと同様に，幾何学においても，求める線が知られるようにするためには，それに他の線を加えるか，それから他の線を除くか，あるいは或る線があり——これを数にいっそうよく関係づけるために私は単位と呼ぶが，普通は任意にとることのできるものである——さらに他のふたつの線があるとき，この2線の一方に対して，他方が単位に対する比をもつ第4の線を見いだすか——これは乗法と同じである——または，2線の一方に対して単位が他方に対する比を持つ第4の線を見いだすか——これは除法と同じである——あるいは最後に，単位と或る線との間に，1個，2個，またはそれ以上の比例中項を見いだすか——これは平方根，立方根などを出すのと同じである——すればよい．私は意のあるところをよりわかりやすくするため，このような算術の用語をあえて幾何学に導入しようとするのである．

【「デカルト著作集 1」 原亨吉訳　白水社】より

※下線は授業者（阿部）が加えた

【問い】

上の文をもとに、ある線が次のように与えられているとき，上の下線部①～②を線で表してみよう。



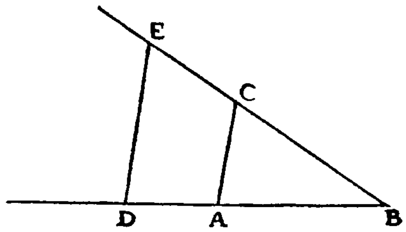
①[加法]　線に他の線を加える

②[減法]　線から他の線を除く

【問い】
下の四角で囲った部分は③～⑤についてのデカルトの方法です。なぜ正しいのか証明してみよう。

③[乗法]　或る線（単位）があり、さらに他のふたつの線があるとき、この線の一方に対して、他方が単位に対する比を持つ第４の線を見いだす。

［乗　法］
たとえば，AB［第１図］を単位とし，BD に BC を掛けねばならぬとすれば，点 A と C を結び，CA に平行に DE をひけばよい．BE はこの乗法の積である．
［除　法］
また，BE を BD で割らねばならぬ



［第１図］

【「デカルト著作集 1」原亨吉訳　白水社】より

【証明】

④[除法]　2線の一方に対して、単位が他方に対する比を持つ第４の線を見いだす。

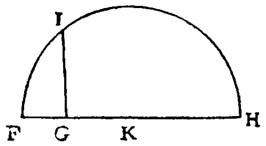
［除　法］
また，BE を BD で割らねばならぬ
とすれば，点 E と D を結んだうえで，DE に平行に AC をひく．BC はこの除法の結果[1)]である．

【「デカルト著作集 1」原亨吉訳　白水社】より

【証明】

⑤[平方根の抽出]　単位とある線との間に、1 個 2 個、またはそれ以上の比例中項を見いだす。

［平方根の抽出］



［第２図］

また，GH［第２図］の平方根を出さねばならぬとすれば，それと一直線上に単位であるFG を加え，FH を点Kで二等分して，K を中心とする円 FIH を描き，点Gから FH と直角に直線をIまで立てる．GI は求める根である．立方根その他についてはあとで述べる方が都合がよいから[2]，いまは何も言わないでおく．

【「デカルト著作集 1」 原亨吉訳　白水社】より

【証明】

2－3－2 平面的な問題

C'eſt pourquoy ie me contenteray icy de vous auertir, que pourvû qu'en demeſlant ces Equations on ne manque point a ſe ſeruir de toutes les diuiſions, qui ſeront poſſibles, on aura infalliblement les plus ſimples termes, auſquels la queſtion puiſſe eſtre reduite.

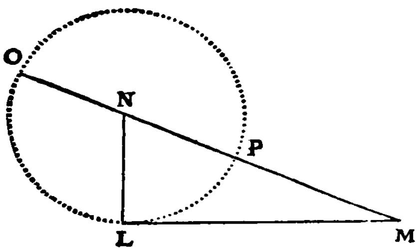
Quels ſont les problesſmes plans

Et que ſi elle peut eſtre reſolue par la Geometrie ordinaire, c'eſt a dire, en ne ſe ſeruant que de lignes droites & circulaires tracées ſur vne ſuperficie plate, lorſque la derniere Equation aura eſté entierement démeſlée, il n'y reſtera tout au plus qu'vn quarré inconnu, eſgal a ce qui ſe produiſt de l'Addition, ou ſouſtraction de ſa racine multipliée par quelque quantité connue, & de quelque autre quantité auſſy connue

Comment ils ſe reſoluent.

Et lors cete racine, ou ligne inconnue ſe trouue ayſement. Car ſi i'ay par exemple

$z^2 \infty az + bb$



ie fais le triangle rectangle N L M, dont le coſté L M eſt eſgal à b racine quarrée de la quantité connue bb, & l'autre L N eſt $\frac{1}{2}a$, la moitié de l'autre quantité connue, qui eſtoit multipliée par z que ie ſuppoſe eſtre la ligne inconnue. puis prolongeant M N la baze de ce triangle,

angle,

12

LIVRE PREMIER. 303

angle, iuſques a O, en ſorte qu'N O ſoit eſgale a N L, la toute O M eſt z la ligne cherchée. Et elle s'exprime en cete ſorte

$z \infty \frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}aa + bb}.$

Que ſi iay $yy \infty - ay + bb$, & qu'y ſoit la quantité qu'il faut trouuer, ie fais le meſme triangle rectangle N L M, & de ſa baze M N i'oſte N P eſgale a N L, & le reſte P M eſt y la racine cherchée. De façon que iay $y \infty - \frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}aa + bb}$. Et tout de meſme ſi i'auois $x^4 \infty - ax^2 + b^2$. P M ſeroit x^2. & i'aurois $x \infty \sqrt{-\frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}aa + bb}}$: & ainſi des autres.

［平面的な問題とは何か］

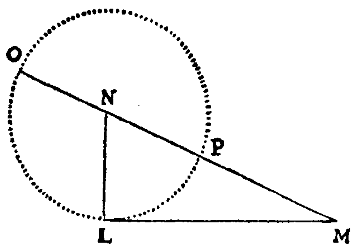
次に，問題が通常の幾何学によって解ける場合，つまり平面上に描かれた直線と円だけを用いて解ける場合は，最後の方程式が完全に整理されたとき，たかだか１個の未知の平方が，方程式の根に或る既知量を掛けたものと，やはり既知の他の或る量との加法か減法によ~~って生ずるものに等しい，~~ということになるであろう．

［それはどうして解けるか］

こうなれば，この根，つまり未知の線は容易に見いだされる．なぜならば，たとえば，

$$z^2 \infty az+bb$$

が得られたとすれば，直角三角形 NLM［第３図］を作って，辺 LM を既知量 bb の平方根 b に等しく，他の辺 LN を $\frac{1}{2}a$，つまり未知の線と仮定す



［第３図］

る z が掛かっていた他の量の半分にする．次に，この三角形の底辺 MN を O まで延長して，NO が NL に等しくなるようにすれば，全体 OM が求める線 z である．そしてこの線は次のようにあらわされる．

$$z \infty \frac{1}{2}a+\sqrt{\frac{1}{4}aa+bb}.$$ [10]

もし

$$yy \infty -ay+bb$$

が得られたとし，y が見いだされるべき量であるとすれば，同じ直角三角形 NLM を作り，底 MN から NL に等しい NP を除けば，残り PM が求める根 y である．ここでは

$$y \infty -\frac{1}{2}a+\sqrt{\frac{1}{4}aa+bb}$$

が得られる．

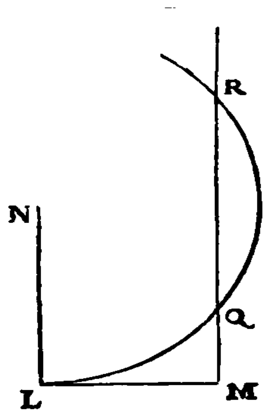
同様に，もし

$$x^4 \infty -ax^2+b^2$$

が得られたのであれば，PM は x^2 であり，

$$x \infty \sqrt{-\frac{1}{2}a+\sqrt{\frac{1}{4}aa+bb}}$$

となるであろう．他の場合も同様である。



Enfin si i'ay

$z^{2} \propto az - bb$:

ie fais NL esgale à $\frac{1}{2}a$, & LM esgale à b cõme deuãt, puis, au lieu de ioindre les poins MN, ie tire MQR parallele a LN. & du centre N par L ayant descrit vn cercle qui la couppe aux poins Q & R, la ligne cherchée z est MQ, oubiẽ MR, car en ce cas elle s'exprime en deux façons, a sçauoir $z \propto \frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}aa - bb}$, & $z \propto \frac{1}{2}a - \sqrt{\frac{1}{4}aa - bb}$.

Et si le cercle, qui ayant son centre au point N, passe par le point L, ne couppe ny ne touche la ligne droite MQR, il n'y a aucune racine en l'Equation, de façon qu'on peut assurer que la construction du problesme proposé est impossible.

Au

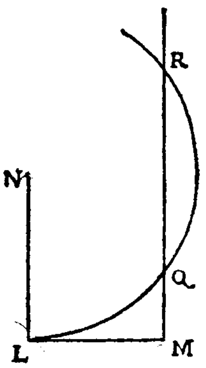
Au reste ces mesmes racines se peuuent trouuer par vne infinité d'autres moyens, & i'ay seulement veulu mettre ceux cy, comme fort simples, affin de faire voir qu'on peut construire tous les Problesmes de la Geometrie ordinaire, sans faire autre chose que le peu qui est compris dans les quatre figures que i'ay expliquées. Ce que ie ne croy pas que les anciens ayent remarqué. car autrement ils n'eussent pas pris la peine d'en escrire tant de gros liures, ou le seul ordre de leurs propositions nous fait connoistre qu'ils n'ont point eu la vraye methode pour les trouuer toutes, mais qu'ils ont seulement ramassé celles qu'ils ont rencontrées.

【LA GEOMETRIE　REN? DESCARTES」】より

最後に，

$$z^2 \infty az-bb$$

が得られたのであれば，前と同様に NL［第4図］を $\frac{1}{2}a$ に等しく，LM を b に等しくしたうえ，点 M, N を結ぶかわりに，LN に平行に MQR をひき，N を中心としてLを通る円を描いて，MQR を点 Q, R において



［第4図］

切る．求める線 z は MQ または MR である．なぜならば，この場合には z はふたつの仕方，すなわち

$$z \infty \frac{1}{2}a+\sqrt{\frac{1}{4}aa-bb},$$

$$\text{および}\ z \infty \frac{1}{2}a-\sqrt{\frac{1}{4}aa-bb}$$

によってあらわされるからである．

点Nを中心とし点Lを通る円が直線 MQR を切ることも，これに接することもないならば，方程式にはまったく根がなく，提出された問題の作図は不可能と断定することができる．[11]

そのうえ，これらの根は他の無数の方法によっても見いだされうるのであって，私が上の方法だけを至って簡単なものとして述べたのは，通常の幾何学の問題はすべて，私が説明した4個の図に含まれているわずかなものしか使わないで作図しうることを示すためなのである．しかし，古代の人々がこのことに気づいていたとは思えない．というのも，もし気づいていたならば，彼らはわざわざこの種の問題についてあれほど多数の大きな本を書きはしなかったろうから．これらの書物では，命題の順序を見ただけで，そのすべてを解くための真の方法を彼らが持っておらず，たまたま出会ったものをとりまとめたにすぎないことが知られるのである．

【「デカルト著作集1」原亨吉訳　白水社】より

2—4 デカルトの 幾何学」 第２巻

2—4—1 曲線の性質について

LA

GEOMETRIE.

LIVRE SECOND.

De la nature des lignes courbes.

Quelles ſont les lignes courbes qu'on peut receuoir en Geometrie.

LEs anciens ont fort bien remarqué, qu'entre les Problesmes de Geometrie, les vns ſont plans, les autres ſolides, & les autres lineaires, c'eſt a dire, que les vns peuuent eſtre conſtruits, en ne traçant que des lignes droites, & des cercles; au lieu que les autres ne le peuuent eſtre, qu'on n'y employe pour le moins quelque ſection conique; ni enfin les autres, qu'on n'y employe quelque autre ligne plus compoſée. Mais ie m'eſtonne de ce qu'ils n'ont point outre cela diſtingué diuers degrés entre ces lignes plus compoſées, & ie ne ſçaurois comprendre pourquoy ils les ont nommées mechaniques, plutoſt que Geometriques. Car de dire que ç'ait eſté, a cauſe qu'il eſt beſoin de ſe ſeruir de quelque machine pour les deſcrire, il faudroit reietter par meſme raiſon les cercles & les lignes droites; vû qu'on ne les deſcrit ſur le papier qu'auec vn compas, & vne reigle, qu'on peut auſſy nommer des machines. Ce n'eſt pas non plus, a cauſe que les inſtrumens, qui ſeruent a les tracer, eſtant plus compoſés que la reigle & le compas, ne peuuent eſtre ſi iuſtes; car il faudroit pour cete raiſon les reietter des Mechaniques, où la iuſteſſe des ouurages qui ſortent de la main eſt deſirée; plutoſt que de la Geometrie, ou c'eſt ſeulement la iuſteſſe du raiſonnemẽt qu'on recher-

Rr 2 che,

【「LA GEOMETRIE　REN? DESCARTES」】より

第 2 巻

曲線の性質について

［幾何学に受けいれうる曲線はどのようなものか］

幾何学の問題のうち，或るものは平面的，或るものは立体的，或るものは曲線的[1]であることに古代人は十分気づいていた．すなわち，或るものは直線と円を描くだけで作図しうるが，或るものは少なくとも或る円錐曲線を用いなければ作図しえず，最後に他のものはより複雑な他の曲線を用いなければ作図しえない，という意味である．しかし，彼らがさらに進んで，より複雑なこれらの線の間に種々の段階を区別しなかったことに私は驚かざるをえないし，彼らがこれらの線をどうして幾何学的と呼ばずに機械的[2]と呼んだか，理解に苦しむ．なぜならば，これらを描くには何らかの機械を使うことが必要だからと言うのであれば，同じ理由で，円と直線も〔幾何学から〕退けねばなるまい．これらを紙の上に描くにはコンパスと定木を使わねばならず，これも機械にちがいないからである．また，これらの複雑な線を描くに用いられる器具は定木やコンパスより複雑なため，あまり正しくはありえない，という理由からでもない．なぜならば，このような理由からは，人の手になる作品の正しさが要求される機械学からこれを退けるべきであって，推論の正しさだけが求められる幾何学から退けるのは当たるまい．幾何学はたしかに他の線に関してと同様これらの線に関しても完全な知識を与えうるのである．

【「デカルト著作集 1」 原亨吉訳　白水社】より

予備知識

古代ギリシャのアポロニウス(紀元前 2 世紀)以来、幾何学には目覚しい発見がなかった。それは、古典時代の幾何学問題がほとんど完全に解釈されたからでである。よって、曲線も細かく分類されず、定木とコンパスによるものと、それ以外のものとしか考えられなかったのだった。

2—4—2 デカルトによる曲線の分類

［すべての曲線をいくつかの類に分け，そのすべての点が直線の点にたいしてもつ関係を知る方法］

次々と複雑さを増して限りなく進む曲線を描きまた考える手段は，ほかにもいくつか示すことができる．しかし，自然のなかにあるすべての曲線を包括し，それらを順序正しくいくつかの類に分けるためには，次のように述べ

18 幾何学

るのが最もよいと私は考えるのである．幾何学的と名づけうる線，すなわち，何らかの的確で精密な計測を受けうる線のすべての点は，必ず，ひとつの直線のすべての点にたいして或る関係をもち，この関係は線のすべての点に関して同一の方程式によって表わされうる．そして，この方程式が２個の未定量による矩形あるいは同一の未定量による正方形までしかのぼらないとき，曲線は第１の最も単純な類に属し，そこに含まれるものは円と放物線と双曲線と楕円しかない．しかし，方程式が２個の未定量——というのは，ここでは１点と他の点との関係を説明するのに２個の未定量が必要だからであるが——の双方または一方の第３ないし第４次元までのぼるときは，曲線は第２類に属する．方程式が第５ないし第６次元までのぼるときは，線は第３類に属し，以下同様にどこまでも進む．

【『デカルト著作集１』 原亨吉訳　白水社】より

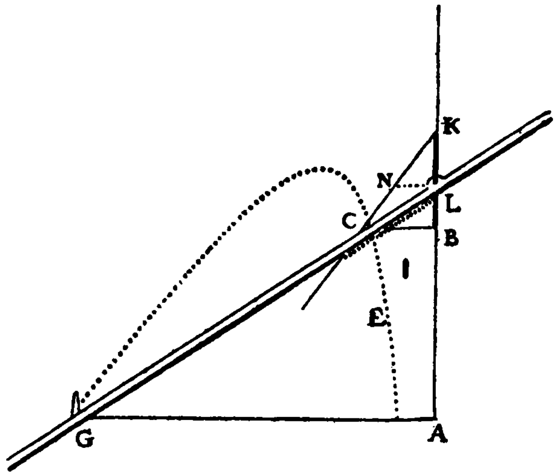
つまり・・・・

①　方程式が２つの不定量について２次のとき　→　第１類
②　３次または４次のとき　→　第２類
③　５次または６次のとき　→　第３類

⋮

2－4－3 曲線を方程式で表現してみよう!

320 LA GEOMETRIE.



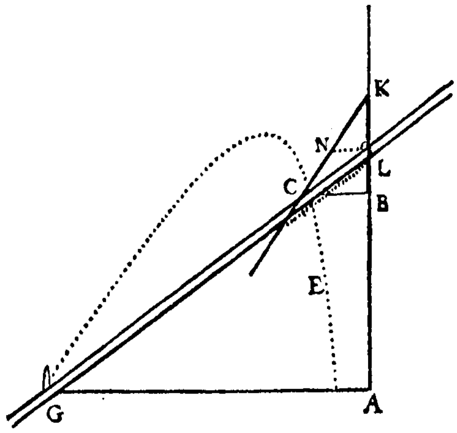
reigle G L, & du plan rectiligne C N K L, dont le coſté K N eſt indefiniement prolongé vers C, & qui eſtant meu ſur le plan de deſſous en ligne droite, c'eſt a dire en telle ſorte que ſon diametre K L ſe trouue touſiours appliqué ſur quelque endroit de la ligne B A prolongée de part & d'autre, fait mouuoir circulairement cete reigle G L autour du point G, a cauſe quelle luy eſt tellement iointe quelle paſſe touſiours par le point L. Ie choiſis vne ligne droite, comme A B, pour rapporter a ſes diuers poins tous ceux de cete ligne courbe E C, & en cete ligne A B ie choiſis vn point, comme A, pour commencer par luy ce calcul. Ie dis que ie choiſis & l'vn & l'autre, a cauſe qu'il eſt libre de les prendre tels qu'on veult. car encore qu'il y ait beaucoup de choix pour rendre l'equation plus courte, & plus ayſée; toutefois en quelle façon qu'on les prene, on peut touſiours faire que la ligne paroiſſe de meſme genre, ainſi qu'il eſt ayſé a demonſtrer.

Aprés

50

【「LA GEOMETRIE　REN? DESCARTES」】より

たとえば，定木 GL［第7図］と直線に囲まれた平面 CNKL——その辺 KN は C の方に際限なく伸びている——との交わりによって，線 EC が描かれたと想像し，その線は第何類に属するかを知りたいとしよう．ここに CNKL は下にある平面のうえを直線的に，というのは，その直径 KL がどちらにも伸びた線 BA の何らかの場所に常に重なっているように動かされ，定木 GL を点 G のまわりに回転させるとする．定木は常に点 L を通るように CNKL に結びつけられているためである．私は AB のような直線を選び，曲線 EC のすべての点をその様々な点に関係づける．この線 AB 上に A のような 1 点を選び，そこから計算を始める．これら双方を選ぶと私が言うのは，もともとこれらは好きなようにとってよいものだからである．というのも，方程式をより短く，より扱いやすいものにするためには大いに選択の余地があるけれども，どのようなとり方をしても，線を常に同じ類のものとしてあらわしうるからであり，その証明は容易である．

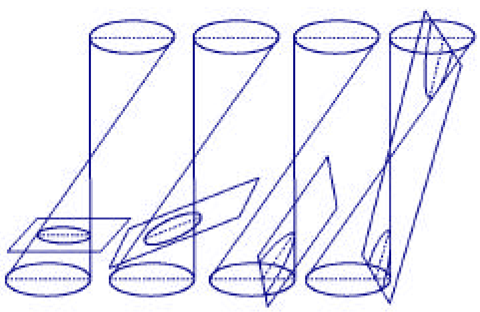


［第7図］

【「デカルト著作集 1」 原亨吉訳　白水社】より

<参考>

アポロニウスはその著書『円錐曲線論』で、円錐曲線（「放物線」「楕円」「双曲線」）を、1 つの円錐を異なる傾きの平面で切ることによって示している。



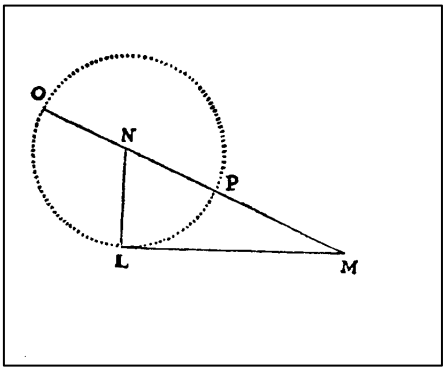
円　　楕円　放物線　双曲線

ワークシート①

2年　組　　番　名前

<問題>

デカルトの方法で $z^2=az+bb$ のzの長さを表そう。



右の図で、LM＝b、NL＝$\frac{a}{2}$

Nを中心とし、半径NLの円を描いて、

LN⊥LM　とすると、事前課題の

「方べきの定理」を利用して、

まず、△OLM∽△LPMである。よって、LM：OM＝（　　）：（　　）

ゆえに、LM^2＝（　　　）・（　　）

そして、OM＝z　とすると、b^2＝z（　　　）

これは、解きたい方程式と同じである。

つまり、この図の　OMが求めたい　z　である。

また　Z=ON＋NMより、この線は次のように表される。

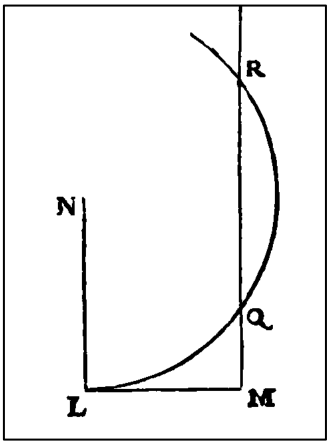
$$z=\frac{a}{2}+\sqrt{\frac{a^2}{4}+b^2}$$

ワークシート②

2 年　　組　　　番　名前

＜問題＞

z^2 =az－bb　の z の長さを表そう。



右の図で、LN＝$\frac{a}{2}$、LM＝b、また

Nを中心とし、半径LNの円とLNに平行な

直線との交点をQ，Rとする。

まず、△LMR∽△QMLである。よって、LM：QM＝（　　　）：（　　　）

ゆえに、LM^2＝（　　　）・（　　　）

そして、QM＝z とおくと、b^2＝z（　　　　）

また、RM＝z としても、同じ式になる。

そしてこれは、解きたい方程式と同じである。

つまり、先ほどと同様、この図の QM、RM が求めたい z である。

また、長さは

$$QM = z = \frac{a}{2} - \sqrt{\frac{a^2}{4} - b^2}$$

$$RM = z = \frac{a}{2} + \sqrt{\frac{a^2}{4} - b^2}$$

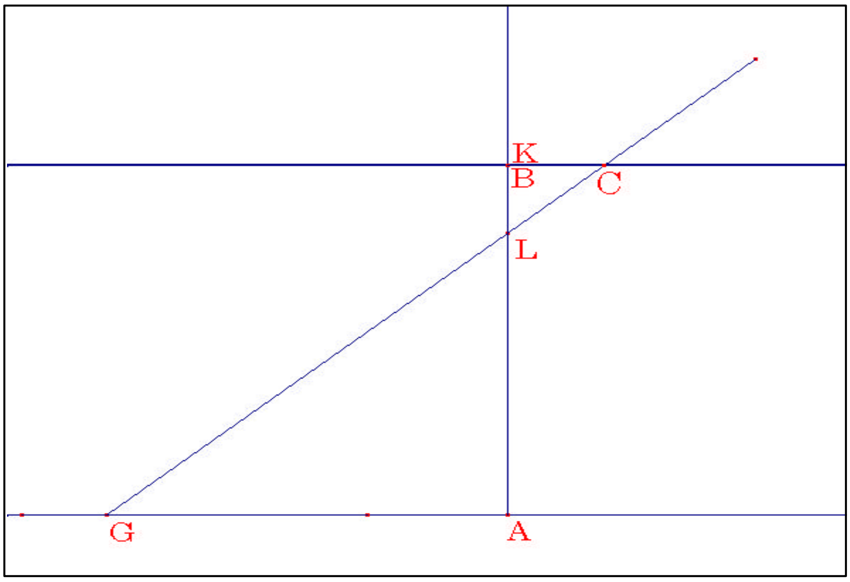
となる。

ワークシート③

2年　　組　　番　氏名

【穴埋め問題】

●デカルトの方法で曲線の方程式を導いてみよう！



KN をカブリで LN と平行にすると、K と B が一致する。

$BA = x$　　$GA = a$　　$LB = b$　　$BC = y$

とおくと、△LCB∽△LGA より、

$BC : LB =$（　　　　）:（　　　　）　なので、

$y : b =$（　　　　）:（　　　　）　とできる。

よって、$ab =$（　　　　　）

$y =$（　　　　　　）

つまり、L を上下に動かしたときに点 C が描く軌跡は, 現代でよく知られている（　　　　　　　）である。