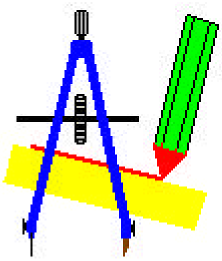
授業者：大谷まなみ

（　筑波大学大学院修士課程教育研究科　）

－授業資料－

古代ギリシア の数学



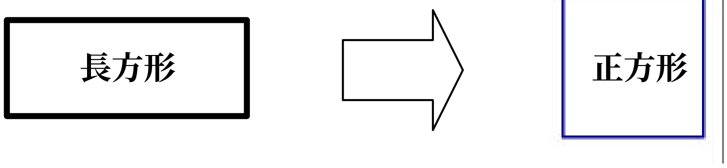
年　　組　　番　氏名

§１　ギリシア数学

§１－１　問題の解き方

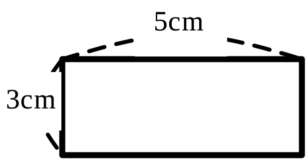
＜　問題　＞

横の長さが５㎝、たての長さが３㎝の長方形の面積と同じ面積の正方形を作りたい。正方形の一辺の長さを何cmにすればよいですか？また、その正方形を作図してください。

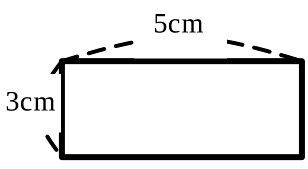


＜解答欄＞

＜作図 1＞

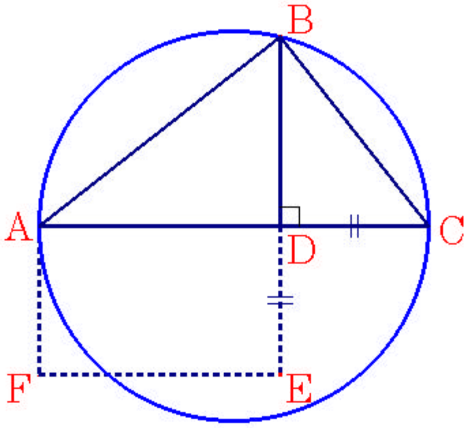


＜作図 2＞



＜証明＞

__図において、BD を一辺とする正方形の面積が長方形 ADEF の面積に等しいことを示せ。__



△ABD∽△BCD　より、

AD：BD＝$\boxed{\quad\quad}$：$\boxed{\quad\quad}$

よって

BD^2＝$\boxed{\quad\quad}$ × $\boxed{\quad\quad}$

ところで、CD ＝ $\boxed{\quad\quad}$

ゆえに

BD^2＝$\boxed{\quad\quad}$ × $\boxed{\quad\quad}$

＝　長方形 ADEF　（証明終）

・CD=DE
・AC は円の直径
・BD⊥AC

§１－２　ギリシア数学の特徴

作図と証明

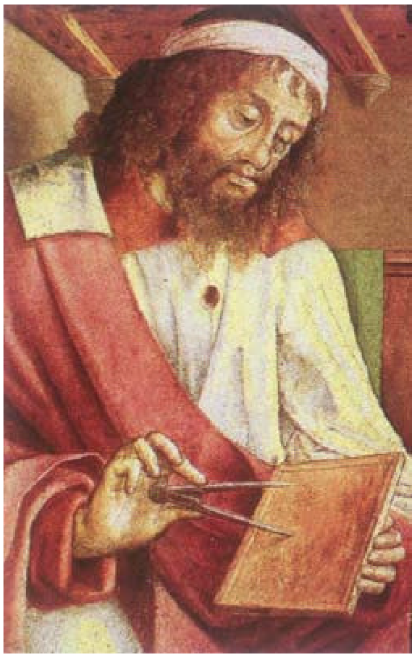
古代の幾何学では，作図によって組み立てられる図形のみが，存在するもの（現実に手もとにあるもの）とみなされているし、公準は或る基本的図形(直線、円、交点)の数学的存在性を保証している。

＜ギリシア数学の始原　サボー著　中村幸四郎他　訳＞

◆ 幾何学･･･図形に関する数学の分野のこと。（数学辞典　岩波より）
◆ 公準･････「数学的存在を、それの証明なしに承認することを求める主張」
（ツォイテンによる意味付け）

□『ユークリッド原論』

紀元前 4 世紀頃、ユークリッドという人が、それ以前の数学研究や成果をたくみに総合し、体系化した本です。
この『原論』は、聖書の次によく読まれたと言われている本で、かつて書かれた数学の教科書の中で最も広まったものです。



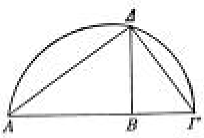
〈ユークリッド〉

＊例えば･･･

13

与えられた 2 線分の比例中項を見いだすこと。

与えられた 2 線分を AB, $B\Gamma$ とせよ。このとき AB, $B\Gamma$ の比例中項を見いださねばならぬ。



それらが一直線をなすようにおかれ，$A\Gamma$ 上に半円 $A\Delta\Gamma$ が描かれ，点 B から線分 $A\Gamma$ に直角に $B\Delta$ がひかれ，$A\Delta$, $\Delta\Gamma$ が結ばれたとせよ。
角 $A\Delta\Gamma$ は半円内の角であるから，直角である。そして直角三角形 $A\Delta\Gamma$ において直角から底辺に垂線 ΔB が下されたから，ΔB は底辺の 2 部分 AB, $B\Gamma$ の比例中項である。
よって与えられた 2 線分 AB, $B\Gamma$ の比例中項 ΔB が見いだされた。これが作図すべきものであった。

＜ユークリッド原論　６巻命題１３より
訳・解説　中村幸四郎他　共立出版＞

§１－３　古代ギリシアの作図

古代ギリシア数学の背景

　古典期初期のギリシア数学は、2 つの道具の使用に基づいていた、というより実際のところは束縛されていた。その２つの道具とは、直線を引いたり延ばしたりするための目盛りのない定規と、円を描くためのコンパスである。

＜数学を築いた天才たち　スチュアート・ホリングデール著
岡部恒治　監訳　講談社＞

＊定木と定規＊

定木：まっすぐな線をひくための道具。目盛りはついていない。
定規：定められた目盛りがついている道具。

問題；

１）線分を２等分せよ。

２）角を２等分せよ。

３）線分を３等分せよ。

４）角を３等分せよ。

§２－１　角の 3 等分

討論メモ；

§２－２　三大作図問題

古代ギリシア時代では、次の 3 つの作図問題が数学者達の間で熱心に研究されました。

○ 任意の角の 3 等分
○ 円の平方化
○ 立方体の倍積問題

◆古代ギリシア時代の研究者

エリスのヒッピアス（B.C.460 年頃生まれたらしい）が「任意の角の 3 等分問題」の最初の研究家であると言われていて、3 等分を求めるための曲線を発見したことで，有名であった。

§２－３．ヒッピアスが考えた曲線

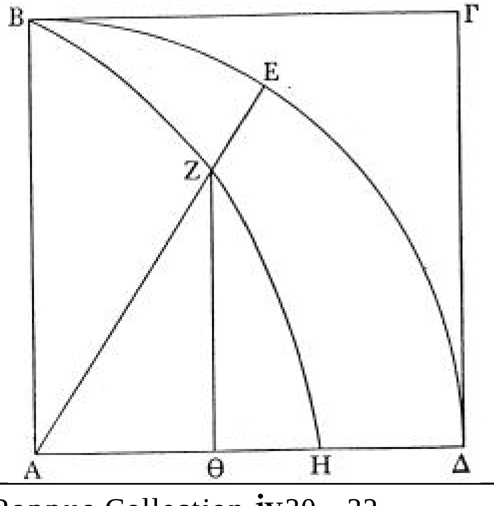
(ii.) *The Quadratrix*

Papp. *Coll.* iv. 30-32, ed. Hultsch 250. 33–258. 19

Construction of the Curve

λʹ. Εἰς τὸν τετραγωνισμὸν τοῦ κύκλου παρελήφθη τις ὑπὸ Δεινοστράτου καὶ Νικομήδους γραμμὴ καί τινων ἄλλων νεωτέρων ἀπὸ τοῦ περὶ αὐτὴν συμπτώματος λαβοῦσα τοὔνομα· καλεῖται γὰρ ὑπ' αὐτῶν τετραγωνίζουσα καὶ γένεσιν ἔχει τοιαύτην.

Ἐκκείσθω τετράγωνον τὸ ΑΒΓΔ καὶ περὶ κέντρον τὸ Α περιφέρεια γεγράφθω ἡ ΒΕΔ, καὶ κινείσθω ἡ μὲν ΑΒ οὕτως ὥστε τὸ μὲν Α σημεῖον μένειν τὸ δὲ Β φέρεσθαι κατὰ τὴν ΒΕΔ περιφέρειαν, ἡ δὲ ΒΓ παράλληλος ἀεὶ διαμένουσα τῇ ΑΔ τῷ Β σημείῳ φερομένῳ[1] κατὰ τῆς ΒΑ συνακολουθείτω, καὶ ἐν ἴσῳ χρόνῳ ἥ τε ΑΒ κινουμένη ὁμαλῶς τὴν ὑπὸ ΒΑΔ γωνίαν, τουτέστιν τὸ Β σημεῖον τὴν ΒΕΔ περιφέρειαν, διανυέτω, καὶ ἡ ΒΓ τὴν ΒΑ εὐθεῖαν παροδευέτω, τουτέστιν τὸ Β σημεῖον κατὰ τῆς ΒΑ φερέσθω. συμβήσεται δῆλον τῇ ΑΔ εὐθείᾳ ἅμα ἐφαρμόζειν ἑκατέραν τήν τε ΑΒ καὶ τὴν ΒΓ. τοιαύτης δὴ γινομένης κινήσεως τεμοῦσιν ἀλλήλας ἐν τῇ φορᾷ αἱ ΒΓ, ΒΑ εὐθεῖαι κατά τι σημεῖον αἰεὶ συμμεθιστάμενον αὐταῖς, ὑφ' οὗ σημείου γράφεταί τις ἐν τῷ μεταξὺ τόπῳ τῶν τε ΒΑΔ εὐθειῶν καὶ τῆς ΒΕΔ περιφερείας γραμμὴ ἐπὶ τὰ αὐτὰ κοίλη, οἵα ἐστὶν ἡ ΒΖΗ, ἣ καὶ χρειώδης εἶναι δοκεῖ πρὸς τὸ τῷ δοθέντι κύκλῳ τετράγωνον ἴσον εὑρεῖν. τὸ δὲ ἀρχικὸν αὐτῆς σύμπτωμα τοιοῦτόν ἐστιν. ἥτις γὰρ ἂν διαχθῇ τυχοῦσα ⟨πρὸς τὴν περιφέρειαν, ὡς ἡ ΑΖΕ, ἔσται ὡς ὅλη ἡ⟩[1] περιφέρεια πρὸς τὴν ΕΔ, ἡ ΒΑ εὐθεῖα πρὸς τὴν ΖΘ· τοῦτο γὰρ ἐκ τῆς γενέσεως τῆς γραμμῆς φανερόν ἐστιν.



＜Pappus.Collection.ⅳ30－32.
ed. Hultsch 250. 33-258. 19＞

(ⅱ.) The Quadratrix

Pappus, Collection ⅳ. 30－32., ed. Hultsch 250. 33-258. 19

Construction of the curve

ABΓΔを正方形とし，A を中心とする円弧 BEΔを描く。①そして，点 A を固定し，B が弧 BEΔに沿って動くように AB を動かす。②さらに，BΓはいつも AΔに平行に向かって動き、B は BA に沿って動く。③そして，AB が∠BAΔを作りながら（弧 BΔに沿った点 B の移動）動く時間と，BΓが BA を通って（点 B が BA を横断する）動く時間は等しい。④次に，AB と BΓの両方が同時に直線 AΔに重なることは明らかだろう。⑤直線 BΓと BA が互いを切る動きの進行中に，それらの動きにより，直線 BA と AΔ，弧 BEΔの間のスペースに BZH などの弧が描かれる。⑥（BZH は，与えられた円に等しい正方形の発見に有効であるように見える。）その主要な特性はこれである。もし AZE のような直線が円周のほうへ引かれるならば，全体の円弧対 EΔの比率は，直線 BA 対 ZθΘの比率と同じになるだろう。⑦これは線が発生した方法から明確である。

＜Greek　Mathematical　Works　Ⅰ
IVIOR　THOMAS　著　大谷訳＞

§２－４．ヒッピアスの曲線についての批評

＜スポロスの批評＞

第一に、構成が有用に思える結末は仮説において推測される。
最初に直線 AB と円周 BEΔの比率が知られていない場合、B から動き始めて円周に沿ってΔに進む点と、直線に沿って A に進む点の 2 点の等しい時間で終点につくことは，どうすれば可能であるか。動く点の速度がこの比率であることが必要なのである。調整されない速度を使い，同時に終わる動きを作ることは、偶然に起こらない限りどのようにできたか。この不合理になるという失敗がどのようにできたか。一方，彼らが円の平方化に使用する曲線の先端（曲線が直線ＡΔを切る点）は見つけられない。前述により構成は考察される。ΓＢ，ＢＡがそれぞれの動きを一緒に終わらせるために動く直線であるときに、それらはＡΓと重なり，もはや互いを切らないだろう。実際の先端が交点だった。誰も言わない限り、私たちがＡΔまで直線をかくのと同じ方法で曲線はかかれると考えられる。しかし、これは仮定から続かない。単に円周対直線の比率を仮定することによって、点Ｈを見つけることができる。従って、この比率が与えられない場合，私たちは円積線を発見した人たちの権威に従って，その構成(より多くの構造の問題)を認めないように注意しなければならない。

＜Greek　Mathematical　Works　Ⅰ
IVIOR　THOMAS　著　　大谷　訳＞

§２－５　角の３等分に取り組んだ人々

角の３等分を考える際に、曲線を考え出したり、発展させたりしました。

- シラクサのアルキメデス（紀元前 287 年に生まれる）
- ニコメデス（紀元前 270 年頃生まれる）
- アポロニウス(紀元前 262 年に生まれる)
- アレクサンドリアのパッポス（紀元後 300 年頃生存）

など･･･

◎実は・・・

考えられ始めてから 2000 年以上も後になって・・・

1837**年**　　**ワンツェル　という学者が角の三等分は**

コンパス＆定木だけでは，作図できない

ことを証明しました。《　不可能　の証明》

ここでの不可能とは・・・

与えられた条件下で、解はあるがそれを求める算法がない。

ということです。

§３－１　直角定木を用いる方法

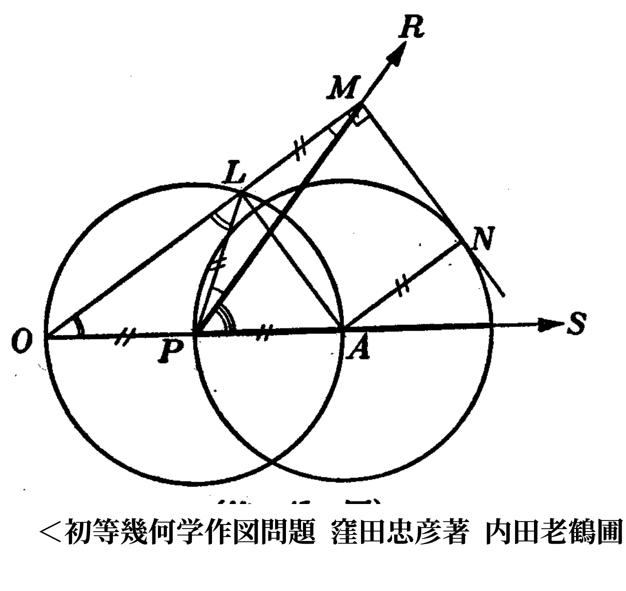
＜**Bieberbach(ビーベルバッハ)：ドイツ人**＞

　1931 年にビーベルバッハは直角定木を使って任意の角の 3 等分が解けることを証明しました。ビーベルバッハは、ナチスの御用学者といわれて,
あまり評判がよくありませんでしたが、幾何学の分野の業績が数多くあります。
＜角の 3 等分　矢野健太郎著　日本評論社＞

○<u>直角定木と定木とコンパスによる角の３等分</u>

【作図法】

① 角 **SPR** を与えられた角とする。
② の辺 PS 上に点 A をとり、A を中心として P を通る円をかく。
③ P に対する A の対称点を O とする。
④ 直角定木の頂点 M が角の他の辺 PR 上にあり、その一辺が点 O
を通り、他の辺が円 A に接するように調整する。
⑤ P を中心とし AO を直径とする円と MO との他の交点を L とする。



＜初等幾何学作図問題 窪田忠彦著 内田老鶴圃＞