出典：中学校・高等学校数学科教育課程開発に関する研究(10)
発行：筑波大学数学教育学研究室、pp.103-115、2003年3月

透視図法の数学化についての授業研究

－射影と切断の歴史を手がかりに－

筑波大学大学院修士課程教育研究科
福田　匡弘

章構成

1．はじめに
2．研究目的・研究方法
3．透視図法の教材化
4．透視図法の授業概要
5．考察
6．おわりに

要約

本研究は、学習指導に数学史やそれにまつわる器具などを用いることによって生徒の価値観の変容について検証するものである。特に、数学を人間の文化的営みと捉え、数学に対する意識を評価した。

透視図法やその器具に焦点をあてた教材を開発し、その効果を検証した。その結果、それを用いた授業実践を行った際の生徒達の反応から数学に対する価値観の変容を見取ることができ、開発した教材の効果が確認された。

キーワード：透視図法、射影幾何、数学史、器具、価値観

1．はじめに

今回、事前に生徒の数学に対する意識調査を行うため、また同時に、数学を自分の中でどのように扱っているかという生徒自身自分を見つめ直すために、埼玉県内の公立高校2年生に「私と数学」という題で作文を課した。その結果「速くてついていけない」「難しい」「日常生活に役に立たない」「大学に入るため」などの生徒の数学に対する意識が見られた。この調査から、学校における数学を勉強する価値を生徒が見出せていないということが読み取れる。そこで、この研究の主題を生徒の数学に対する学ぶ価値の育成とする。

数学に対する価値観の変容を起こすものとして、今回授業では数学史を取り上げた。数学史の利用に関して、礒田(2002)は「数学を生み出す活動は、人によって営まれる。他者の立場に心情を重ねつつ、自らの教訓を導き出そうとする共感に支えられた主体の行為に解釈学的営みは光りを当てる。例えば、数学の考えのよさを教えるためにはどうしたらよいか。まずは、よさを求めて教材に対する解釈学的営みがなされる。」(礒田, 2002, pp.8:72-78)と述べている。またさらに、古代の器具を授業に取り入れる効果について、Maria(2000)は、生徒達が器具を実際に操作することは、数学的活動における認識するのに基礎となりうる重要なところを含んでいると述べている。このことを受けて、筆者は価値の変容を生み出すものとしてこの２つのことを考えた。そして授業では、数学史を取り入れることと同時に、器具の使用というところにも力を入れて取り組んだ。

また、数学を教える価値について、杉山(1999)は、次の４つのことをあげている。「ア

他の教科（学問）を学習するための基礎」「イ　より進んだ数学を学習するため」「ウ　数学の学習を通してみにつけることができる力」「エ　知的楽しみを与える」　そこで、杉山(1999)が提案した4つの数学を教える価値を生徒が身につけるべき価値観と定め、この価値観を目標にし生徒の価値変容を見取ることとする。

よって、この４つの視点から、数学史の文献・器具を使用することにより、生徒の価値変容を議論する。また、今回授業では、透視図法を題材として扱った。透視図法の中に潜む射影と切断という方法を使うことで、生徒の数学に対する価値変容が現れるかということを議論する。

２．研究目的・方法

目的：透視図の中にある数学、射影と切断を扱う場面で、３次元にあるものを２次元に映したり、またそこで教具を使ったりすることを通して、生徒が「なぜ数学を勉強しなければならないのか」を考えることができる。

上記の目的を達成するために以下の課題を設定する。

課題１：生徒は、透視図法から発展した数学の原典解釈を通して、数学が他の教科（学問）を学習するための基礎となるということを理解できるか。

課題２：生徒は、数学が積み重なり発展してきたことを感じ取り、数学がより進んだ数学を学習するために必要であることを理解できるか。

課題３：生徒は、数学史の授業を通して、思考力･表現力･判断力を身につけることができるか。

課題４：生徒は、数学史の授業やそれにまつわる器具の使用により、知的楽しみを経験することができるか。

方法：原典を用いたテキスト、器具を開発する。そして、授業を実践し、授業前後のアンケート、授業や生徒の様子を撮影したビデオなどをもとに、「なぜ数学を勉強しなければならないのか」について議論する。

３．透視図法の教材化

今回、透視図法から発展したデザルグの定理とパスカルの定理の教材化を行った。透視図法を題材にしたことで、生徒は数学が他の学問と関わるということが経験できると予想した。また、数学史を扱うことで、数学が実際に発展してきた過程に接することができ、生徒が進んだ数学を学習するために必要であるということを理解できるとともに、知的楽しみも経験できると予想した。開発したテキストは3冊（各時間1冊）からなり、以下それぞれの授業のテキストについて説明する。

1時間目では、透視図法から数学が発展するという過程を示すために透視図法についてのテキストを開発した。原典としてデューラー(Albrecht Durer,1471-1528)の『Unterweysung der Messung（測定法教則）』とダ･ヴィンチ(Leonardo da Vinci,1452-1519)の『パリ手稿』を取り上げた。前者から、透視図法で絵を描くための器具の挿絵を用いて挿絵にある器具の模型を作り、後者から、平行な直線群が透視図においては一点で交わる直線群にな

出典：中学校・高等学校数学科教育課程開発に関する研究(10)
発行：筑波大学数学教育学研究室、pp.103-115、2003年3月

るという線束の考え方を得るために、正方形の格子の透視図を描く方法を示した図を用いた。原典を用いることでルネサンス期の画家達が行った透視図法の研究に生徒たちが触れることができるようにした。

２時間目では射影と切断という方法を用い射影幾何学的分野への開拓を行ったデザルグ(Gerard Desargues,1593－1662)の弟子である Bosse の原典『La Perspective de Mr Desargues』の編集者であるパウドラが 1864 年に書いた『 [First] Geometrical Proposition』を取り上げた。この『 [First] Geometrical Proposition』の中にあるデザルグの定理「二つの三角形の対応する頂点を結ぶ３直線が１点で交わるならば、対応する辺の交点は１直線上にある」がどのようなものかを理解するために Cabri GeometryⅡ（以下カブリと呼ぶ）で作成したファイルを用い、またこの定理が証明されている過程を追体験できるようなテキストを開発した。このテキストに対する解釈学的営みを行うことで、(課題２)生徒に数学を通して力がつくと考えた。以下２時間目のテキスト『 [First] Geometrical Proposition』の中身を示す。

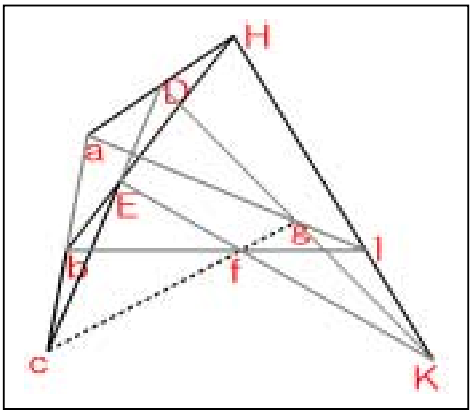


図 １－１　△DEK と△abl が接する場合、cfg が交線となる。

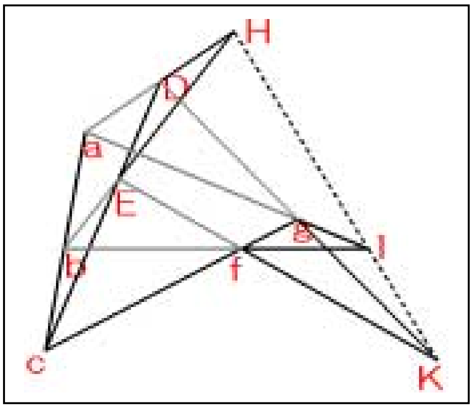


図 １－２　△bEf と△aDg が接しない場合で、HlK が交線となる。

[First] Geometrical Proposition は３つのパートを含んでいる。第１、第２で三角形が交わる時と交わらない時の場合分けを行い、第３で第１の場合の時の証明を与えている。

第１では二つの三角形△DEK と△abl が接する場合で交線が cfg (図 1-1)となる場合である。ここで、交線とは、平面と平面が交わる共線のことを言う。第２では二つの三角形が接しない場合で、△bEf と△aDg の平面の交線が Hlk(図 1-2)となる場合である。三角形が接しない場合として他に交線が aDH, bEH となる場合をあげている。交線を考える時平面から立体を考えるのが困難と考え模型を作った(図 13)。第３では証明を述べる。以下証明について書く。

第１の場合(交線 cfg)の時、三角形 DEK の頂点と H から abl の平面上に垂線を下ろし、平面上との交点を d,e,k,h とした(図 1-3)。そうすることで、平面上に新たな三角形 dek が現れる。つまり、デザルグの定理「二つの三角形の対応する頂点を結ぶ３直線が１点で交わるならば、対応する辺の交点は１直線上にある」に照らして考えると、二つの三角形を abl と dek とし、対応する頂点を結ぶ３直線が１点 h で交わることになる。ここで、対応する辺の交点は c,f,g となり、第１では交線が cfg だったので、c,f,g は１直線上にある。以上のことから、第１の場合についてデザルグの定理が証明された。そして、第２の場合についてもそれぞれ証明される。

さらに場合分けについて考えると、平面上に垂線を下ろした時の二つの三角形の関係で場合分けをしている。一方の三角形の各頂点と交点を通る直線上で、各頂点と交点の間(線分上)に

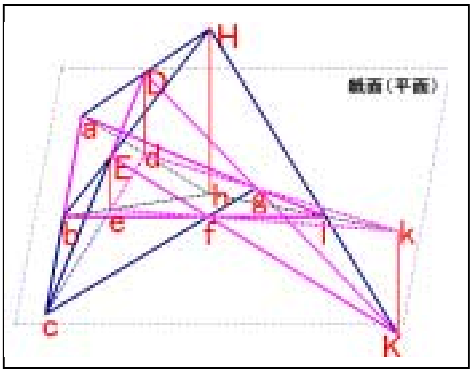


図 1－3　三角形 DEK の頂点と H から abl の平面上に垂線を下ろした。

もう一方の三角形のすべての頂点がある場合と、二つある場合、一つある場合、一つもない場合に場合分けがされる。例えば、第１の場合を例にあげると、△abl を一方の三角形、h が交点である。今、もう一方の△dek の頂点 d は線分 ah 上、e は線分 bh 上にあるが、k は線分 hl 上にはなく、hl を伸ばした直線上にある。よって、一方の三角形の各頂点と交点の間にもう一方の三角形の頂点が二つある場合となる。同様に、第２の場合を考えると、上にあげた(第１、第２の場合分け)４通りの場合分けがすべてを表すので、デザルグの定理は証明されたと言える。

以上のように、デザルグが行った『 [First] Geometrical Proposition』の中のデザルグの定理は、平面上（２次元）での定理であるが、それを証明する時に、２次元の中だけで考えて証明をするのではなく、３次元から２次元へと移す（射影）ことを用いて、証明していることに価値があると考え、それを生徒が追体験することに配慮した。

３時間目のテキストでは、原典としてデザルグの射影幾何学を認め、さらに発展させたパスカル(Blaise Pascal,1623－1662)の『Essay on Conics』を取り上げた。パスカルの定理とはどんなものか、また成り立つのかを確認するためにカブリで作成したファイルを用いた。ここでは生徒が円錐曲線について未習だったため円錐曲線を示す道具として、円錐の切断を示す器具「カメラオブスキュラ」を作成し、円錐曲線が現れてくる様子をビデオに撮影した。また、その様子を表したカブリのファイルを作成した。3 時間目の授業では、補題Ⅰ(円におけるパスカルの定理)と定義Ⅱ(円錐曲線の定義)から補題Ⅲ(パスカルの定理)を導き出す考えの中で、射影と切断という方法が使われていることを意識し、そこで、デザルグとパスカルとの関係を示すことで、生徒がより進んだ数学を学習する必要性を考えるよう配慮した。

最後に、この題材の中に含まれている数学史上の意義は、デザルグやパスカルが意識した図形の性質探究の方法である射影と切断が幾何学観の変更をもたらしたと考える。ここで、生徒はその方法を経験することができる。

４．透視図法の授業概要

（1）．授業環境

① 日時：平成 14 年 10 月 28,29,30 日(65 分×３)

② 対象：埼玉県立高校　第２学年(２クラス 78 名)

③ 準備：コンピュータ(Windows)、Microsoft Power Point、プロジェクター、小型カメラ(Quick Shot)、作図ツール(Cabri GeometryⅡ)、透視図を描くための器具(原典中の挿絵を基に作成したもの)、カメラオブスキュラ、授業テキスト、事前課題、授業記録用のデジタルカメラ等

（2）．授業展開

【１時間目】透視図法の研究

出典：中学校・高等学校数学科教育課程開発に関する研究(10)
発行：筑波大学数学教育学研究室、pp.103-115、2003年3月

ねらい：原典の挿絵や図を解釈する場面で、ルネサンス期の画家たちが行っていた透視図法の研究を体験することを通して、数学を人の文化的営みとして捉え、興味・関心を高めることができる。また、数学が他の学問の基礎になっていることが分かる。

導入：図 2 はトルチェロ島のサンタ･マリア･アシュンタ教会にあるモザイク画で 12,13 世紀に描かれた｢十字架｣のモザイク画を表し、図 3 はバチカン美術館にあるルネサンス期に描かれた壁画｢マリア懐胎の間｣である。２つを比べて、透視図法の導入を試みた。

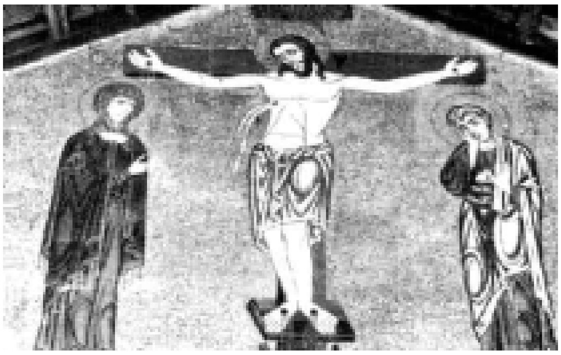


図 2 「十字架」

図 3 「マリア懐胎の間」

図 4 デューラーの挿絵

図 5 透視図を描くための器具。左手に持っているものがカメラで、手前にあるの画面が、そのカメラで映し出されたスクリーン

・Albrecht Durer

図 4 挿絵の中の二人が何をしているのかを問いかけた後、透視図を描くための器具(図 5)を提示し、右の画家の目の代わりに小型カメラを置き、カメラに見えている映像を、プロジェクターを使いスクリーンに映し出した。

・Leonardo da Vinci

ダヴィンチが、透視図について語っている「眼を頂点とするピラミッドで捕らえられ、そのピラミッドは上述のガラスの位置において切断されるのである。」という言葉を提示し、その言葉を絵に表すように生徒に促した。ここでは、Durer の挿絵をヒントとしてあげ、透視図を描く仕組みを生徒が理解することができた。(図 6)

・平行線は、交わる？

まっすぐな線路の写真を提示し、そこからどんなことが分かるかの問いかけをした。生徒からは線路が

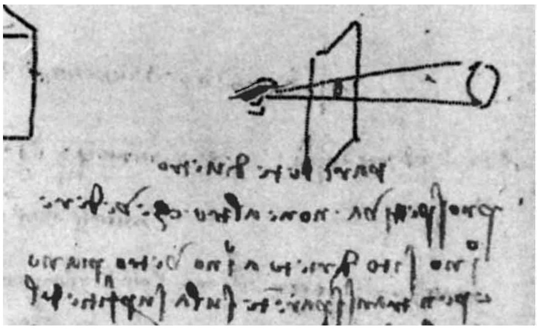


図 6　ダ･ヴィンチの挿絵１

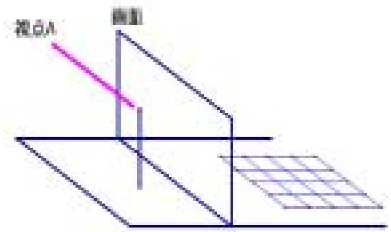


図 7　視点 A から格子を見たとき、画面ではどのように見えるか。

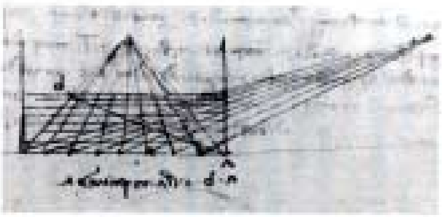


図 8　　ダヴィンチの挿絵２

図 9　図８の仕組みを発表する

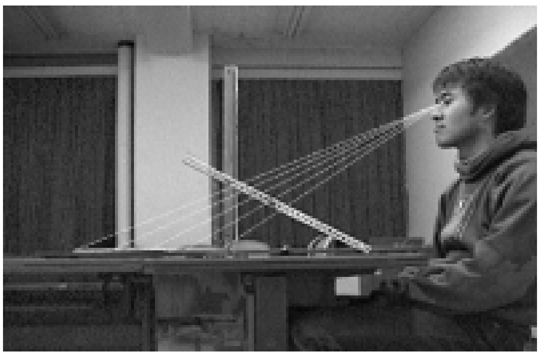


図 10　目から光線が出る

奥に行くにつけて一点に集まることや、枕木の間隔が狭まってくるなどの答えが返ってきた。次に、図 7 のような状況の時、透視図法の考え方を用いるとどのように図が描かれるかを生徒に予想してもらい、小型カメラから実際どのように映っているか見てもらった。つづいて、正方形の格子を描く方法を考えたレオナルド・ダ・ヴィンチの挿絵(図 8)を提示し、どのようにしたら透視図を描けるかその仕組みについて問いかけをした。

教師：(図 8)挿絵の仕組みを考えてください。ヒントしては、先ほどあげたデューラーの挿絵(図 4)を参考にしてみましょう。

～数分考える時間～

生徒：分かった！
目の位置が 2 箇所あるんだ！この尖がっているところだ。それで、さっき、目から出た光線がガラスで切断されるといったからここに表れている。(図 9)

教師：2 箇所？（図 8）左側の尖がるところは、線路のところでやったけど、一点に集まるところだよ。こんなものを作ったから見てみよう(図 10)。

生徒：あ～なるほど！
この絵で言うと、ここがガラスになるんだ。

教師：(挿絵を描きかえたものを提示する。図 11)そうそう、それでガラスによって、切断された光線を水平に移動したところが、透視図の中で、格子の横の線、つまり、奥行きを表しているんだ。

生徒：う～ん。うん、うん（うなずく）

最後に、平行な直線群が透視図においては一点で交わる直線群になるという線束の考え方を押さえた。そして、レオナルドが実際にこの方法を使って描いた絵画「マギの礼拝背景図」(図 12)を提示した。一部の生徒達は、授業後「透視図はコンピュータグラフィックなどにも使われているよね」、「今でも最先端で使われているんだ」など。今もいろいろなところに使われているということに感心したようだった。

出典：中学校・高等学校数学科教育課程開発に関する研究(10)
発行：筑波大学数学教育学研究室、pp.103-115、2003年3月

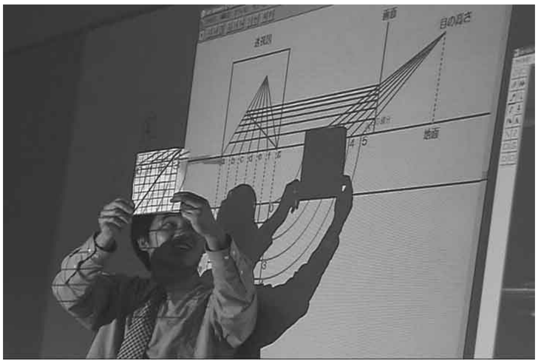


図 11　格子を透視図で描く方法の説明

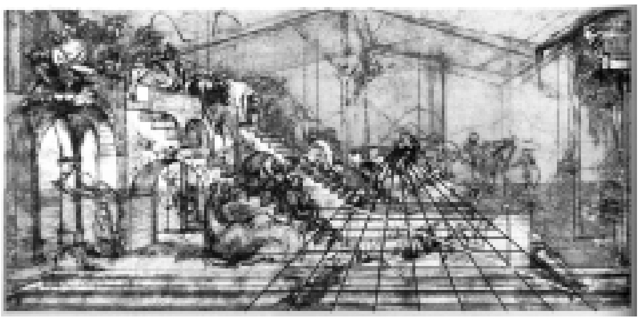


図 12　「マギの礼拝背景図」

【２時間目】デザルグの定理の考え

ねらい：デザルグの定理[First] Geometrical Proposition の原典に触れる場面で、3 次元から 2 次元へと見かたを移すことを通して、知的楽しみを経験できる。

・デザルグの定理

デザルグの定理を満たしたカブリのファイルを提示し、生徒達はコンピュータで、そのファイルを動かすことで、どのような定理かを導き出し理解した。

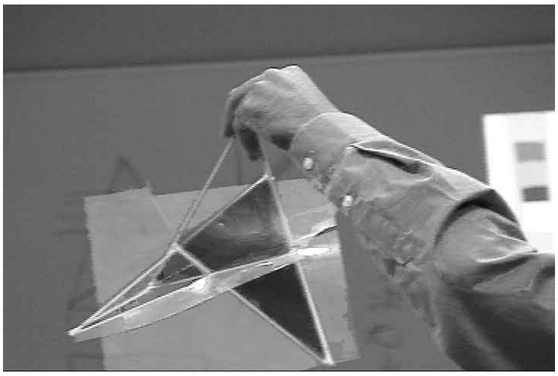


図 13　[First] Geometrical Proposition の模型

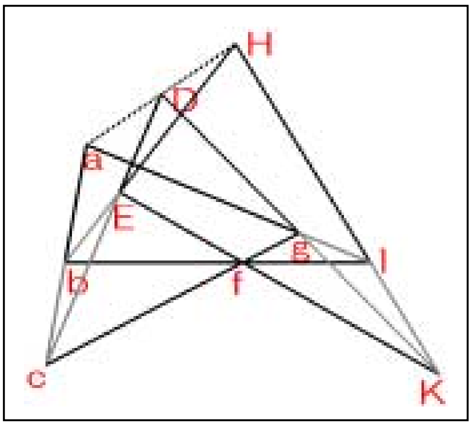


図 14　△cbE と△glK の交線は aDH

つづいて、『[First] Geometrical Proposition』に書いてある内容について１、２、3 の順で解釈を進めていった。（教材化 2 時間目参照）

この命題は 3 つの部分を含んでいて、１では、紙面上にあることを立体的に見るために模型を作って、どこが交線になっているかを意識した。また、これを平面で見たときに、先ほど生徒が導き出したデザルグの定理にもなっているということを意識させた。紙面上ではどこが交線になっているか理解するのが困難だった生徒も模型を見せることで、理解できた生徒がいた。２についても同じようにどこが交線になっているかを確かめた。そして、どのような場合分けを行っているかを考えた。

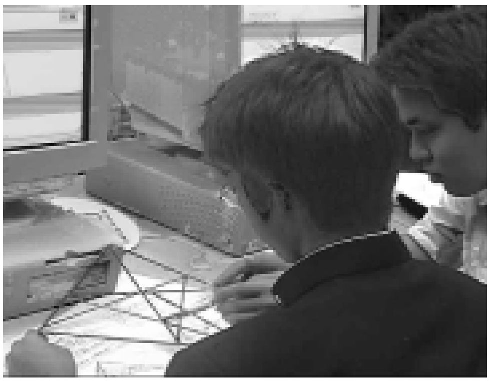
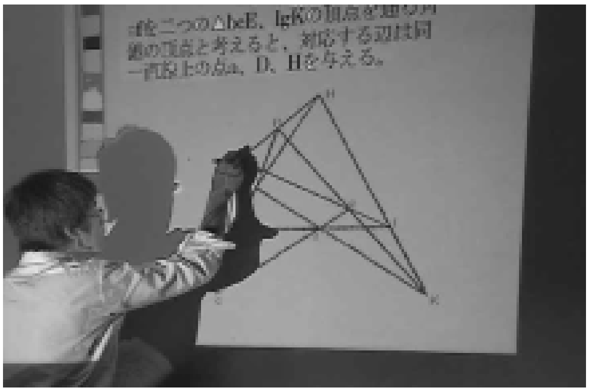


図 15　模型を観察しどこが交線になるか

図 14 のような場合、交線をＤと考える生徒がかなりいた。そのような生徒にを発言してもらい、三角形を平面で考えるということを意識させた。



第１、第２で場合分けを行い第３では、第１の場合を取り出し、デザルグの定理を証明した。そして、最後に、第３で考えてきたことから「ただ一つの平面上の図形によって代替される」という原典の言葉の解釈を行った。

【３時間目】デザルグからパスカルへ

ねらい：パスカルの円錐曲線試論を解釈する場面で、器具を使うことを通して円錐曲線を理解することができる。また、２時間目に行ったデザルグとパスカルの関係に意識することを通して、発達中の数学を経験できる。

・パスカル

はじめに２時間目の復習としてデザルグが考えた立体を射影して平面で眺めるということを押さえた。さらに、パスカルが円錐曲線試論の中で、デザルグの考えを使っていたということを意識した。

・円錐曲線

２時間目終了後に、円錐の切断によりどのような図形が現れてくるかという宿題を出した。ここではその答えの説明として、円錐曲線試論の定義Ⅱでパスカルが定義している円錐曲線について紹介した。

図 16　カメラオブスキュラを覗く

説明する際に、カメラオブスキュラを作成し、円錐曲線が現れてくる様子をビデオに撮って示した。カメラオブスキュラというものは、レンズによって像をスクリーンに写すものである。ここで、筆者は太陽光線がレンズによって円錐を作り出すことに注目し、スクリーンの角度を変えることによりスクリーンに映ってくるものが円錐曲線になるというカメラを考えた。また、その様子をカブリファイルで示した。生徒の反応は、わかりやすかったという生徒が多かった。

つづいて、補題Ⅰ（円におけるパスカルの定理)、補題Ⅱ、補題Ⅲ（パスカルの定理）を解釈した。生徒は、補題Ⅰ、補題Ⅲを理解するために、事前に用意した補題Ⅰ、Ⅲの条件を満たしているそれぞれのカブリファ

出典：中学校・高等学校数学科教育課程開発に関する研究(10)
発行：筑波大学数学教育学研究室、pp.103-115、2003年3月

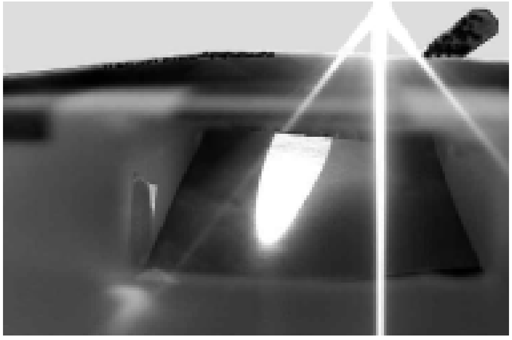


図 17　太陽をカメラオブスキュラによって見たときに、スークリーンに現れた放物線　(右上にある光は太陽)

A：今、補題Ⅰでは何がわかっているんだっけ？
B：・・・円のとき。
A：で、補題Ⅲが円錐曲線だよね。
B：・・・円のとき分かっている時に、その幅を広げるってこと？

イルを操作した。ここで、補題Ⅰが成り立っていると仮定したときに、補題Ⅲはどのように導けるだろうという問いかけをした。

生徒の反応として、左にあるようなつぶやきがあった。

そこで、定義Ⅱ（円錐の切断により、円錐曲線は現れる）をヒントとして与えた。

しかし、残念ながらここからどのようにして補題Ⅲが導かれるかということ考え出した生徒はいなかった。そこで、筆者が補題Ⅰ、(補題Ⅱ)、定理Ⅱを使って、補題Ⅲを導き出すと、生徒達は、うなずき、「そうか～」とつぶやく生徒がいた。最後に、パスカルは、この考えを得るためにデザルグの「射影と切断」という考えを用いたということを、まとめとして、授業を終えた。

C：何で、一直線なんだろう、たまたまじゃないよね。

5．考察

（１）課題１に対する考察

課題１：生徒は、透視図法から発展した数学の原典解釈を通して、数学が他の教科（学問）を学習するための基礎となるということを理解できるか。

生徒の感想から
- 遠近法とかは美術で使ったけど、まさかこれが数学的な根拠にもとづいているなんてことが思わなかった。それを学べてよかった。
- 透視図法という普段の授業では学んでいないことが学べた。ぼくは建築などに興味があるので今回は楽しく学ぶことができた。
- 透視図法の考えを歴史をたどりながら学んだ。
- 今まで何気なく絵を書いていたが、立体を平面の絵にするのにたくさんの学者の努力があったということがわかった。

数学と他教科の関係について、丸野(2002)は、生徒が透視図の描き方を示す原典の図を解釈する活動を行うことや、透視図法という絵画の技法の中に潜んでいる数学を体験することで、数学の興味関心を高めることができることを示した。今回の授業でも丸野(2002)の結果と同じく生徒は、上のアンケート結果からも分かるように、数学が透視図法と結びついていていることが学べ数学に興味関心を示し、意欲的な取り組

みが見られた。また、生徒は歴史を扱うことで、透視図法から発展した数学や、立体を平面に考えることの努力を経験することができ興味関心を高められた。これらのことから透視図法を描く時には、数学が基礎になっているということを生徒が理解できたということがいえる。このような結果が得られたのは、透視図の発展とともに数学が発展してきたということを認識する指導を行ったからである。このことから数学は単なる学問ではなく、人間の営みであると捉えるようになる。

（２）課題２に対する考察

課題２：生徒は、数学が積み重なり発展してきたことを感じ取り、数学がより進んだ数学を学習するために必要であることを理解できるか。

アンケートでは、より進んだ数学を学習するために数学が必要であるという事について書いた生徒はいなかった。しかし、２時間目と３時間目の授業のつながりである、デザルグが意識し考え出した射影と切断という考え方がパスカルの定理に使われているところに、生徒は数学がより進んだ数学を学習するために必要であると考えるのではないかといえる。野口(2001)は、数学の歴史を学ぶことによって、生徒が数学を断片的に捉えていたが、これから発展していくと考え始めた傾向にあることを示し、さらに、過去の数学、現在の数学、未来の数学を結び付けて考えられるようになったことを示している。筆者も、野口(2002)の示したことをアンケート結果から見ることができた。この結果を生徒の学ぶ価値と結び付けることで、数学の歴史を授業に組み込むことは、生徒が今学習している数学がより進んだ数学を学習するためであるという考えを抱くのに有効であると考える。

（３）課題３に対する考察

課題３：生徒は、数学史の授業を通して、思考力･表現力･判断力を身につけることができるか。

生徒の感想から

- 立体や定理を使って、どんな形をしているかどんな性質があるかを考えるのは何か違った難しさがあると思った。いつもより、想像力や文書表現能力が必要とされているのかと思えた。
- 私は立体的、空間的なものを頭の中で想像するのは苦手なのですが、幾何学のおもしろさに少し目覚めることができました。

生徒の感想から想像力や文書表現力が必要という感想があった。この教材では、平面から立体を想像したり、その立体にどんな性質があるのかを想像したりすることで、生徒には思考力がつくといえる。また、生徒は２時間目の授業で、カブリの操作からデザルグの定理を見つけ出したり、定理の証明をたどることによりその証明の真偽を考えたりすることで、判断力がつくといえる。さらに、証明の合理性や計画性などから生徒にそれらが身につくといえる。

ここで、数学史を教材にする利点であるが、例えば１時間目の授業で取り扱った、平行線は交わるという考え方に、生徒達はどのように取り組んだかを考える。生徒は、今までの数学では平行線は、どこまで行っても交わらないと学習してきたが、交わる

出典：中学校・高等学校数学科教育課程開発に関する研究(10)
発行：筑波大学数学教育学研究室、pp.103-115、2003年3月

という考えは本当だろうか、どのような証明なのかと思いをめぐらすと考えられる。このように、数学史を学習することで、生徒達は、数学がただ単に具体的な事象を抽象化することによって生れたからだけではなく、数学の立場から新しい課題を次々と作って発展してきたということを、創造的に経験できる。このことから、生徒は数学史を学習することは創造的な態度や考え方を身につけることができるといえる。

（４）課題４に対する考察

課題４：生徒は、数学史の授業やそれにまつわる器具の使用により、知的楽しみを経験することができるか。

生徒の感想から

- 空間図形という分野は、頭の中では想像しなくてはいけないものだから、今までは、相当苦労したけど立体を提示してくれたことでわかりやすかった。また、実験をしたことをビデオで写してくれたことも円錐曲線というものがどんなものか分かりやすかった。このような授業ならもっと進んで受けたいと思う。
- ３次元を２次元に置き換えるということを学んだ、空間図形は立体のままで考えていたが、平面でも考えるという感覚を身につけられたと思う。

ここでは、器具による生徒の分かりやすさと同時に知的楽しみが得られた。平林(1973)は、三つの種類の教具について注目している。第１は「つめこみ器」ともいえるもので、例えば、九九を暗記させるためのフラッシュカードなど、その典型的なものである。第２は、いわゆる「説明器」である。種々の立体模型や球積公式説明器などは、その代表的なものである。第３は、いわば「思考器具」とも言えるもので、子どもに多様な思考を触発し、種々の方向からそれへの近接を許す道具である。授業では、１時間目に透視図をあらわす機械を提示し、2 時間目に立体模型を提示し、3 時間目にカメラオブスキュラを提示した。透視図を描くための器具は、「説明器」と同時に「思考器具」と見ることができると考えられる。生徒は、デザルグが意識した射影と切断という方法が、視点からの「射影」とガラスにおいて切るという「切断」に使われているということに分かりやすさを感じ取れた。また、器具を示すことで分かりやすさが進んだと同時に、生徒にはそこに数学が隠れているということを発見できた喜びがあるといえる。２時間目でも、生徒に透視図の機械を提示することで、生徒は立体から平面という射影と切断を意識した。ここでは、デザルグが行った証明に３次元から２次元という証明をつけているということに知的楽しみを得たといえる。立体模型の提示は「説明器」の役割を持つ部分が多かったが、生徒達からは立体模型を提示したことで、透視図法の器具とあわせて考え、立体と平面の間の行き来が頻繁に行うことができるようになったといえる。生徒が３時間目の円錐曲線については未習だったため、カメラオブスキュラは、初めは円錐曲線の「説明器具」という形で使用したが、パスカルの定理の円から円錐曲線への広がりも射影と切断という考え方が使われているということを生徒達は意識することができ、「思考器具」に発展させることができたと言え、知的楽しみにつながると考えられる。これらのことは筆者が数学史の授業を数学（射

影と切断の歴史）が発展してきたということに意識して行った結果でもあるといえる。よって、数学史を授業に入れることは知的楽しみを引き起こすと考えることができ、また、その数学に存在する器具は、生徒が知的楽しみを経験することができる器具であると言える。

研究では、杉山(1999)が提案した４つの教える価値を生徒が身につけるべき価値観と定め、その価値観を目標とし課題について考察した。この研究では、生徒の価値観を変容させるための手段として、数学史を教材にすることと、器具を操作したり観察したりすることに注目した。考察の結果として、透視図法の中に潜んでいる射影と切断という幾何的方法を体験した生徒は、数学に対する価値観の変容が起こった。

６．おわりに

今回授業で数学史を扱ったが、その教材を扱うことで、生徒に価値変容が見て取れた。さらに、教具を使うことによりもちろん分かりやすさも進むが、同時にその器具が果たしている数学の知的楽しさを生徒が体験できた。数学史やそれにまつわる器具を扱うことで、生徒の価値変容を促すということが今回の授業で示された。

今回、器具としてカブリを使ったが３時間だけの授業だったので、カブリの操作になれていない生徒がその操作の理由などを意識できないまま、ただそこにあるもの画面で動くものを見て納得するような傾向があった。生徒が意識してカブリを使用するようになるには、カブリの機能について知る必要があり、そして、その機能を使って、生徒自身で計画や実験などができるレベルまで到達することが生徒に望まれることだと考える。今回、器具についても考察したが、カブリの使用でそこから生徒にどんな数学的活動が行われ、どんな結果が得られるかを考察するのが今後の課題である。

最後に、授業後生徒から次のような言葉をもらったので紹介する。

「先生、俺大学に行ったらこんな勉強したいな」

謝辞

研究授業の実施に際し、埼玉県立春日部高等学校の早乙女勤先生、熊谷公孝先生、中島幹夫先生をはじめとする数学科の先生方には、準備の段階より貴重なご意見と多大なる御尽力をいただきました。心より御礼申し上げます。

注

本研究は平成 14 年度科学研究費「数学の文化的視野の覚醒と新文化創出のための教材・指導法開発研究」（基盤研究Ｂ,研究代表者 礒田正美 No.14380055）の一環として行われた。

【引用・参考文献】

・ 礒田正美(2002). 解釈学から見た数学的活動論の展開－人間の営みを構想する数学教育学へのパースペクティブ. *筑波数学教育研究, 21*, 1-10

出典：中学校・高等学校数学科教育課程開発に関する研究(10)
発行：筑波大学数学教育学研究室、pp.103-115、2003年3月

- 杉山吉茂(1999). 数学科の目標. 所蔵 杉山吉茂, 澤田利夫, 橋本吉彦, 町田彰一郎(編), *数学科教育―中学・高校* (pp. 12-21). 東京: 学文社.
- 古藤怜, 金子忠雄(1974). *幾何教育と変換の考え*. (pp. 44-64). 東京: (株)近代新書出版社
- 中島健三, 大野清四郎(1974). *数学と思考*. (pp. 108-118). 東京: 第一法規出版株式会社
- Bartolini Bussi, G. Maria. (1999). Ancient instruments in the modern classroom. In J. Fauvel & J. V. Maanen (ed.), *History in mathematics education* (pp. 343-350). Boston: Kluwer Academic
- Durer, A. (1525). *The painter's manual* (Translated by W. L. Strauss, 1977). New York: Abaris Books
- Hammond, H. J. (1981). *The camera obscura* a chronicle. Bristol: A. Hilger.
- Pascal, F. (1640). Essay pour les coniques. In D. E. Smith (ed.), *A source book in mathematics* (Translated by L. G. Simons) (pp. 326-330). New York: Dover Publications.
- Poudra (1889). Desargues on perspective triangles. In D. E. Smith (ed.), *A source book in mathematics* (Translated by F. M. Clarke) (pp. 307-310). New York: Dover Publications.
- 平林一栄(1973). 数学的教具と遊びの精神. *日本数学教育学会誌(数学教育), 55*, 58-61.
- 丸野悟(2002). 透視図法を題材とした幾何の授業実践－原典を利用した教材開発－. *中学校・高等学校数学科教育課程開発に関する研究(9)教育評価の転換と歴史文化思考の数学教育―ADDING IT UP: Helping children learn mathematics―*, 238-248.
- 野口敬子(2001). 道具を利用した数学史学習による生徒の数学間の変容に関する一考察－角の三等分問題を通して－. *中学校・高等学校数学科教育課程開発に関する研究(8)世界の教育課程改革の動向と歴史文化思考の数学教育―代数・幾何・微積 For All プロジェクトの新展開―*, 130-142.

Web references

- 丸野悟
  http://130.158.186.230/forAll/project/2001/maruno-fl/maruno-index.htm