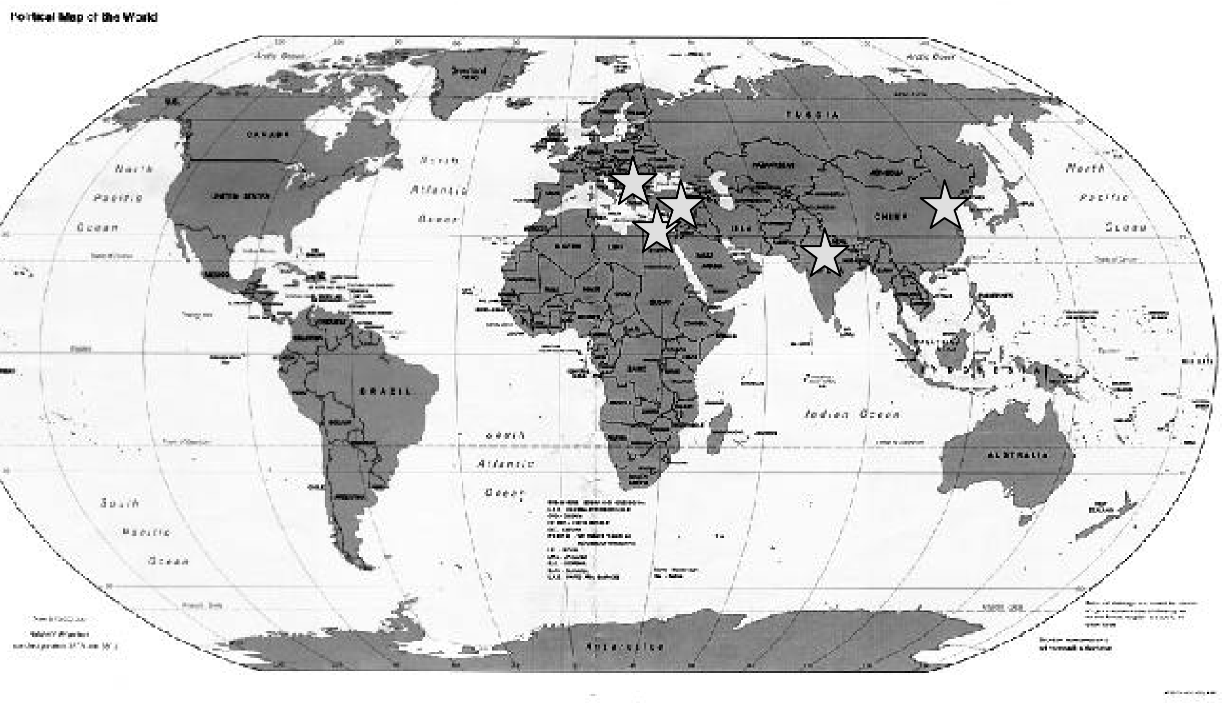
授業資料１日目

古代への旅
１時間目
～ピタゴラス数と行く古代世界～



３年　組　番　名前

授業者：筑波大学修士課程教育研究科
数学教育コース１年　　林　亜規子

はじめに

下の問題を考えてみましょう。

近くの原っぱでサッカーをすることにしました。
その原っぱにはサッカーのフィールドはありません。
皆さんの手には、巻尺とラインマーカーだけ。
「では、原っぱにサッカーのフィールドを作りましょう。」
と言われたら、みなさんはどう作りますか？

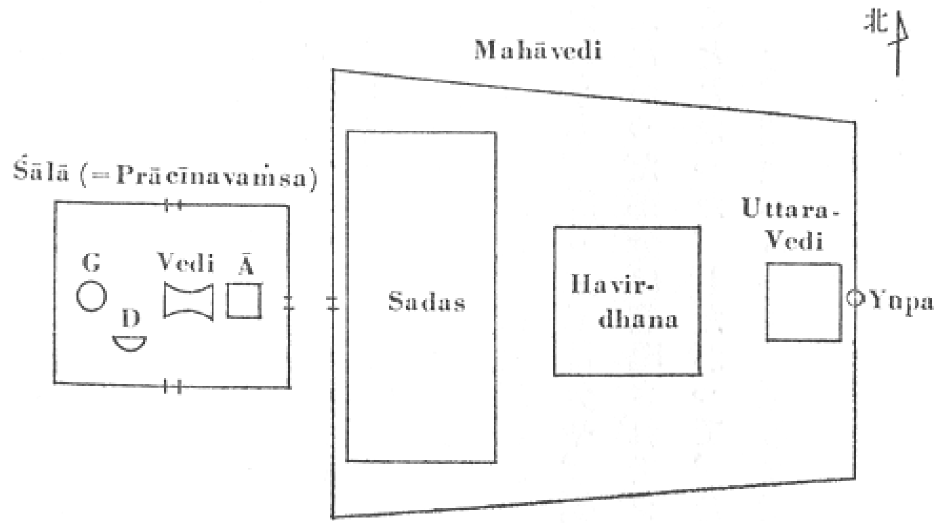
みなさんはこのような問題を考えたことがありますか？
上のような問題は、数学を使えばばっちりできてしまいます。

このような問題をどう解決するのか？
1 時間目はこの問題を皮切りに、数学と人々の関わりについて見ていきたいと思います。

1. 古代インドの生活と数学

場所と時代が変わっても、同じような問題があるものです。
少しのぞいてみましょう。

時は紀元前 1000 年ごろ。
当時、インドは宗教が生活だったというか、生活が宗教だったというか、そのような時代でした。とにかく、とても儀式的なものが生活の中に多くあって祭式（儀式的な祭のこと）も当然のごとくたくさんありました。



インドの祭場の図（井狩弥介 訳『アーパスタンバ・シュルバスートラ』より）

祭式には祭場（祭式を行う会場）が必要です。インドでは上図のような祭場を設営して（地面に書いて）儀式を行っていました。祭場は儀式的なものですから、適当に作ればよいというものではなく、きちんとした方法にのっとって作らなければなりません。その方法を記したのが

“ Śulbasūtra ”（シュルバスートラ）

という本です。

補足 「シュルバ」は「縄」、「スートラ」は「経典（テキスト）」なので、『シュルバスートラ』とは「縄の経典」という意味になります。

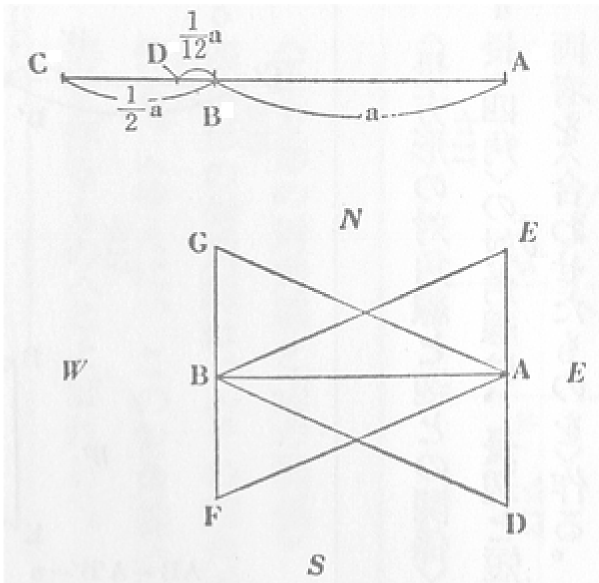
『シュルバスートラ』は、紀元前 600 年ごろに作られた文献です。この本には「シュルバ」という名のとおり、縄を用いた会場設営の方法、つまり縄を用いて上の図のような長方形や台形などを地面の上に作図するための方法が書かれています。

縄を使って、どうやって作図するのかな？ 想像できますか？

◎ 実際に『シュルバスートラ』の一部を読んで、作図してみましょう。

長さ（AB）を基準とし、その二分の一の長さの縄（BC）を基準の長さの縄の西側に付加する。次に、縄の全長（AC）の西側の三分の一部分（BC）上に、B 点から後者（BC）の長さの六分の一を減じた位置に印（D）を作る。

祭場の背骨線（中心となる線）の両端（A と B）上に二本の小杭を打ち込み、そこに縄（AC）の両端を固定し、印（D）を持って縄のたるみがなくなるまで南側に引き張り、印（D）の位置の地上に標識（D）を作る。同様の手続きによって（AB の）北側に点（E）を決定する。次に、縄（AC）の両端の位置を入れ換えて逆にし、反対側で（B 点上で）同様の手続きを南側と北側に行う（F 点、G 点をそれぞれ決定する）。得られた四点（D, E, G, F）を結んで、$\boxed{\quad\quad\quad}$（DEGF）が作図される。以上が $\boxed{\quad\quad\quad}$ の正しい設置法である。



（※ 井狩弥介 訳『アーパスタンバ・シュルバスートラ』を参考に授業者が意訳しました。）

問題. 図形 DEGF は何でしょう？ 文中の $\boxed{\quad\quad\quad}$ の中に言葉を入れてください。

というわけで・・・

インドでは、紀元前 600 年以前に、（5,12,13）という、三平方の定理を満たす 3 つの自然数の組が、祭場を設計するために使われていました。

しかし！！

インドでは、三平方の定理を満たす具体的な数の組は見つかっていても、「三平方の定理」そのものは見つかっていませんでした。

「(5,12,13) という辺の三角形が直角三角形になる」ということを、数学的に正しいと分かっていたのではなく、経験的に知っていただけなのです。

それでは世界の三平方の定理を発見した地域を見ていきましょう。

2. 世界各地の三平方の定理

◎ ギリシア

ギリシアでは、紀元前 500 年以前に、ピタゴラスが三平方の定理を発見しました。

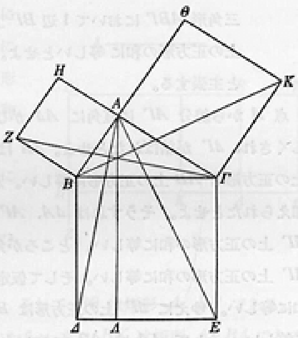
右の文章は『ユークリッド原論』という、当時書かれた数学の集大成の本です。

しかし、三平方の定理を発見したのはピタゴラスだけではないのです！！

（右図：中村幸四郎他 訳『ユークリッド言論』より抜粋）

47

直角三角形において直角の対辺の上の正方形は直角をはさむ 2 辺の上の正方形の和に等しい。



$AB\Gamma$ を角 $BA\Gamma$ を直角とする直角三角形とせよ。$B\Gamma$ 上の正方形は BA, $A\Gamma$ 上の正方形の和に等しいと主張する。

$B\Gamma$ 上に正方形 $B\Delta E\Gamma$ が，BA, $A\Gamma$ 上に正方形 HB, $\Theta\Gamma$ が描かれ，A を通り $B\Delta$, ΓE のどちらかに平行に $A\Lambda$ がひかれたとせよ。そして $A\Delta$, $Z\Gamma$ が結ばれたとせよ。そうすれば角 $BA\Gamma$, BAH の双方は直角であるから，任意の線分 BA に対してその上の点 A において同じ側にない 2 線分 $A\Gamma$, AH が接角を 2 直角に等しくする。それゆえ ΓA は AH と一直線をなす。同じ理由で BA も $A\Theta$ と一直線をなす。そして角 $\Delta B\Gamma$ は角 ZBA に，共に直角であるがゆえに等しいから，双方に角 $AB\Gamma$ が加えられたとせよ。そうすれば角 ΔBA 全体は角 $ZB\Gamma$ 全体に等しい。そして ΔB は $B\Gamma$ に等しく，ZB は BA に等しいから，2 辺 ΔB, BA は 2 辺 ZB, $B\Gamma$ にそれぞれ等しい。そして角 ΔBA は角 $ZB\Gamma$ に等しい。したがって底辺 $A\Delta$ は底辺 $Z\Gamma$ に等しく，三角形 $AB\Delta$ は三角形 $ZB\Gamma$ に等しい。そして平行四辺形 $B\Lambda$ は三角形 $AB\Delta$ の 2 倍である。なぜならそれらは同じ底辺 $B\Delta$ をもちかつ同じ平行線 $B\Delta$, $A\Lambda$ の間にあるから，そして正方形 HB は三角形 $ZB\Gamma$ の 2 倍である。なぜならこれらもまた同じ底辺 ZB をもちかつ同じ平行線 ZB, $H\Gamma$ の間にあるから。それゆえ平行四辺形 $B\Lambda$ は正方形 HB に等しい。同様にして AE, BK が結ばれれば，平行四辺形 $\Gamma\Lambda$ が正方形 $\Theta\Gamma$ に等しいことも証明されうる。ゆえに正方形 $B\Delta E\Gamma$ 全体は二つの正方形 HB, $\Theta\Gamma$ の和に等しい。そして正方形 $B\Delta E\Gamma$ は $B\Gamma$ 上に描かれ，HB, $\Theta\Gamma$ は BA, $A\Gamma$ 上に描かれている。したがって辺 $B\Gamma$ 上の正方形は辺 BA, $A\Gamma$ 上の正方形の和に等しい。

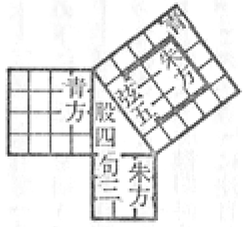
よって直角三角形において直角の対辺の上の正方形は直角をはさむ 2 辺の上の正方形の和に等しい。これが証明すべきことであった。

◎ 中国

中国では、紀元前 100 年以前に、「句股（こうこ）定理」という名で三平方の定理が発見されていました。

☆486
〈計算法〉「句」「股」をそれぞれ自乗し、加え合わし、開平方すれば、「弦」である。

劉徽註――「句」の自乗は下図の朱方をなし、「股」の自乗は青方をなす。これらを出入させ、たがいに補わせ、それぞれ類に従って付着させると、類は移動しないまま、「弦」方の冪を合成する。したがって開平方すると、「弦」である。



句股弦互求図
☆487

句股の定理（川原秀城 訳『劉徽註九章算術』より抜粋）

※　文献を紐解きますと、ギリシアで発見された定理が中国に渡ってきたのではなく、ギリシア・中国それぞれで、三平方の定理が発見されていたことが分かっています。

三平方の定理が世界各地で別々に発見されていた！！

4．世界各地のピタゴラス数

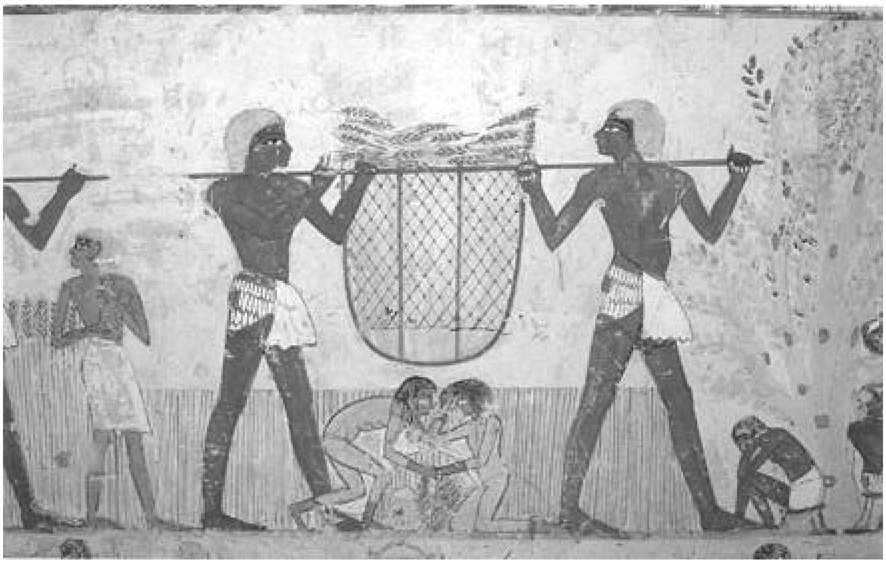
★三平方の定理を満たす 3 つの自然数の組をピタゴラス数と言います。

三平方の定理だけでなく、ピタゴラス数もインド以外のその他各地で発見・利用されています。

三平方の定理の発見されていたギリシア･中国はもちろん、そのほかにも･･･

◎ エジプト

エジプトでは、紀元前 500 年以前に、（3,4,5）のピタゴラス数が、土地の区画整理（直角で区切る）のために使われていました。



（仁田三夫 写真『古代エジプトの壁画』より抜粋）

上図はエジプトの壁画で、穀物を収穫している絵です。

「エジプトはナイルの賜物（たまもの）」という言葉が示すとおり、エジプトではナイル河岸付近で農業が営まれていたのですが、毎年河が氾濫するために、どこからどこまでが自分の土地か分からなくなってしまうことがしばしばありました。その時に、「縄張り師」と呼ばれる人々が、縄を携えて土地を直角に区切ってゆくという仕事をしていました。その際に (3,4,5) というピタゴラス数が使われていました。

◎ バビロニア

　バビロニアでは、紀元前 1700 年以前に、ピタゴラス数の表が、当時のテキストに書かれていました。

右図: プリンプトン 322（村田全他 訳『数学の黎明』より抜粋）

　上の写真はバビロニアで発見された「プリンプトン 322」という当時の石版です。一部欠けていますが、読める部分を復元すると、

	幅	対角線	数
2, 0	1,59	2,49	1
57,36	56, 7	1,20,25	2
1,20, 0	1,16,41	1,50,49	3
3,45, 0	3,31,49	5, 9, 1	4
1,12	1, 5	1,37	5
6, 0	5,19	8, 1	6
45, 0	38,11	59, 1	7
16, 0	13,19	20,49	8
10, 0	8, 1	12,49	9
1,48, 0	1,22,41	2,16, 1	10
1, 0	45	1,15	11
40, 0	27,59	48,49	12
4, 0	2,41	4,49	13
45, 0	29,31	53,49	14
1,30	56	1,46	15

という数の表になっています。

（＜注意＞バビロニアの数は 60 進法で表されています。
例：1,59 = 1×60 + 59 = 119）

左から 1 列目の欄を h とし、2 列目の欄「幅」を b、3 列目の欄「対角線」を d とおけば、この数はまさに

$$d^2 - b^2 = h^2$$

の式をみたします。このとき d,b,h はすべて自然数です。つまり、ピタゴラス数の表になっているのです。

※　この二つの地域で発見されたピタゴラス数も、どこかから伝わったのではなく、独自に発見されていたことが分かっています。

・・・ということで、三平方の定理やピタゴラス数は、さまざまな地方で発見・活用されているのです。

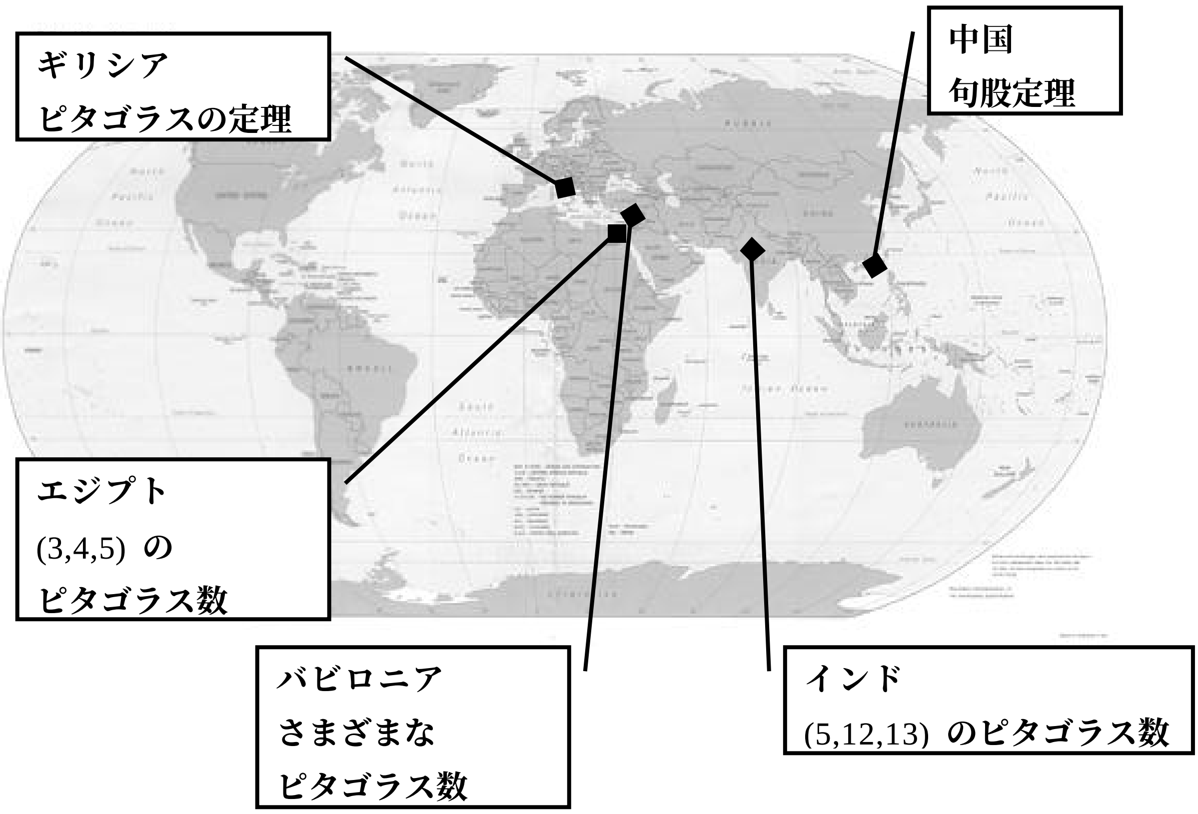
ピタゴラス数は、古代の世界各地で使われていた！

5．　本日のまとめ

- **定規も分度器も使わずに、縄だけで長方形を書くことができる。**
- **ピタゴラス数を知っていれば、直角を作ることができる。**
- **古代、世界各地でピタゴラス数や三平方の定理は、発見されたり、発展していた。**

発展問題：最初に考えた問題は、同じように縄を使って解けるでしょうか？

＜ピタゴラス数・三平方の定理が発見された地域＞



6. 次回は・・・

四角数とピタゴラス数について、古代の数学を見ていきたいと思います。

小話＜ピタゴラスの発見の源＞

ピタゴラスは三平方の定理の発見者として有名ですが、どうやって発見したかという説には二通りの有力な見方があります。一つ目として、これはよく知られている話ですが、ピタゴラスはギリシアの寺院の床を見ていました。その床の模様は三角形の組み合わさった模様だったのですが、それを見ているうちに、三平方の定理を見出したといわれています。二つ目として、彼は様々な地方に勉学のため旅をしたといわれています。その中には、バビロニアやエジプトもあったようで、ピタゴラスはそこで直角三角形となるような様々な数（ピタゴラス数）を学び、後に三平方の定理を見出したのではないかと考えられています。