

機構を題材とした授業実践に関する一考察

楢円・双曲線の作図を通して -

筑波大学大学院修士課程教育研究科
石川 智史

章構成

- 1.はじめに
- 2.研究目的・研究方法
- 3.機構の教材化
- 4.道具の数学的解説
- 5.「機構による作図」の授業概要
- 6.議論
- 7 おわりに

要約

本研究は機構を使って描ける図形として楢円と双曲線を取り上げ、授業を行った。そこでは、生徒が自ら作業をし、証明をすることで、数学を身近に感じ、授業に積極的に参加することを目的とした。事後アンケート等から道具を取り入れた作図の授業が有効であることを示した。

キーワード：機構,証明,楢円・双曲線,作図

1.はじめに

高等学校学習指導要領解説では数学 C の学習について「事象を数学的に考察し処理する能力を伸ばす」と示しており、「この能力は、ある課題に関心を持ち、その解決に当たって、これまでに学習した知識等を基にして一般的な方略などを見つけ、それをを用いて適切に処理する学習を通して育成される。」(文部省,1999)と述べている。筆者は本研究において、厚紙で作った機構を生徒が自らの手で動かし、作図することによって、対象に興味を持ち、作図してできた図形の性質を確認するために、既存の学習内容である、三角形の相似・合同条件、平行四辺形の性質などを用いて、証明を行っている。事前アンケートの結果からも、生徒は機構という事に関して馴染みがなく、異文化体験となっている。このことが学習に関して果たす役割については「数学における異文化体験が、無意識下に潜む自らの数学文化を自覚させ、その文化の一層の進展に貢献する好機とみて、それを数学の文化的視野の覚醒と呼んだ」(磯田,2002)と言われている。また、3回の授業を通して自分で実際に作図をし、できた図形の性質を予想し、数学的に証明するということを度々行った。自分で活動し、予想したことを証明するため、生徒は授業に対して積極的に取り組みが、数学の有用性を発見できるのではないかと考える。また、はじめは、こちらの指示で行っていたが、繰り返すうちに、図形の性質を用いて数学的に証明してみようと、自ら学び、自ら考える態度を育むのに効果があるのではないかと考える。

2. 研究目的・方法

(1). 研究目的

機構を用いた作図に関する授業を通して、数学が身近に使われていることを感じ、数学観を変容できるか。

上記の目的を達成するため、以下の課題を設定する

課題 1 自分たちが作図して得た結果を、証明し、確認することで授業前後で生徒の数学に対する考え、特に身近な事に関して数学が役に立っているかについて、意識の変化が生まれるか。

課題 2 授業前にはあまり身近でなかった楕円・双曲線、機構について、授業を行うことで、従来の代数的な定義を用いた授業とは異なるイメージを育てられるか。

(2). 研究方法

機構を題材とした楕円・双曲線の作図に関するテキストを開発し、それを用いて授業実践を行う。そして、授業前後のアンケート、ビデオによる授業記録に基づき考察する。

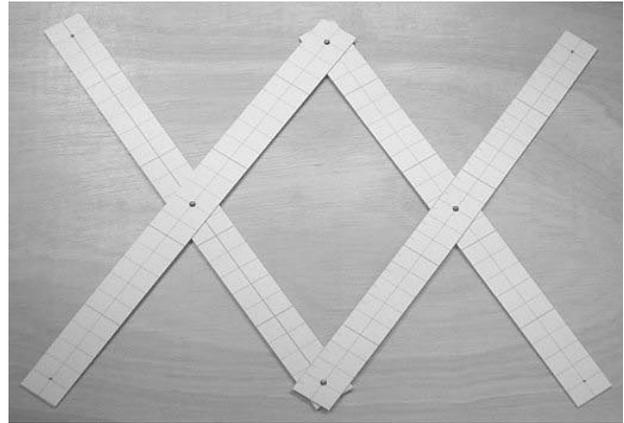
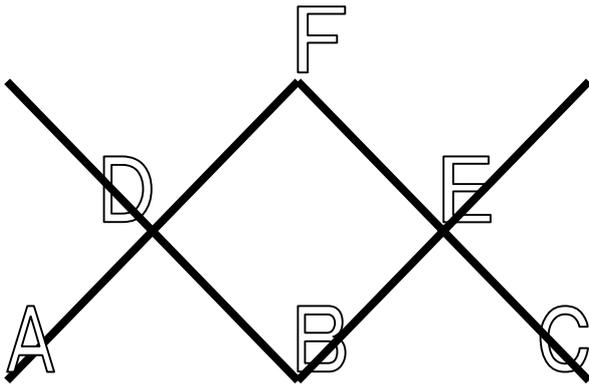
3. 機構の教材化

機構を用いた授業に関して、先行研究では「社会生活に役に立つ内容として、日常生活で目にすることのできる身近な数学の内容を盛り込む」、「機構の仕組みとその運動を見るとともに、作図ツールを利用して行われる探求的な活動」(小関,1998)とある。そこでは、クランク機構についての探求と、4節リンク機構に現れる曲線群に関する探究であった。そして「考察とまとめ」において「リンク機構を更に、数学における機械作図の歴史の中に位置づけ、パンタグラフなどの他の作図機械と関連させ一連の教材として活用することができるかが課題である」と述べている。本研究では、パンタグラフと4節リンク機構のひとつである交叉平行四辺形型の機構を扱った。授業では、前者を使って、相似な図形の作図と点対称な図形の作図を行い、後者を使って楕円・双曲線の作図を行った。また、導入において同じく4節リンク機構のひとつである、凧型の機構を用いた。これは、パワーショベルにも見られる機構で、写真やダンボールで作成した模型を使って、機構がどんなものであるかを紹介した。生徒の活動としては基本的に2人1組で行い、厚紙で作った機構を配布しそれを用いて、画用紙に作図をした。その後、できる図形を予想し、それを証明してみるということを何度か行った。また、機構の動きを確認するために作図ソフトである Cabri Geometry を用いた(以下カブリと示す)。

4. 道具の数学的解説

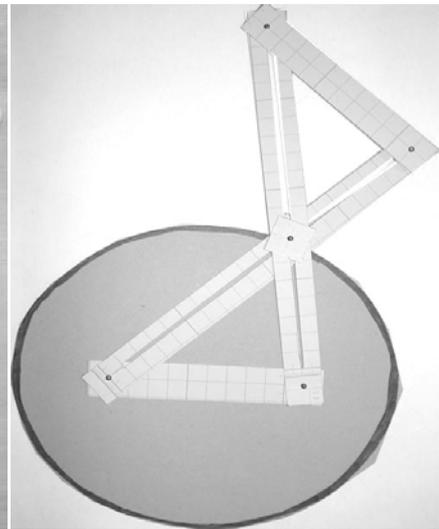
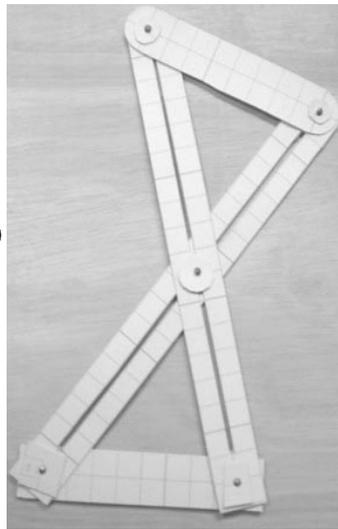
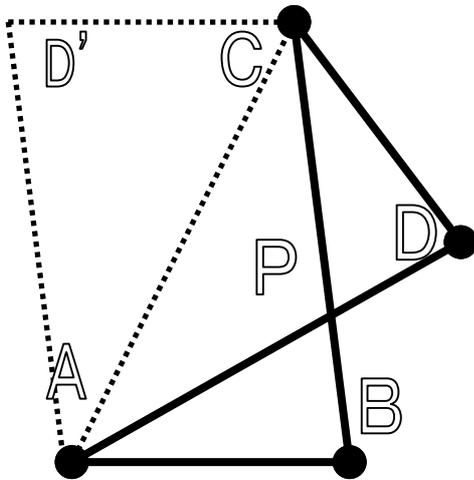
ここでは、3時間の授業で扱った3つの機構を紹介する。主に機構の形と、授業で行った作業の様子を解説する。

1 時間目の授業で使用した機構



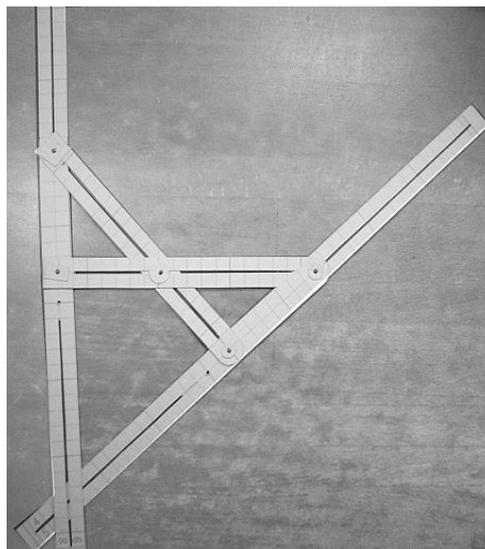
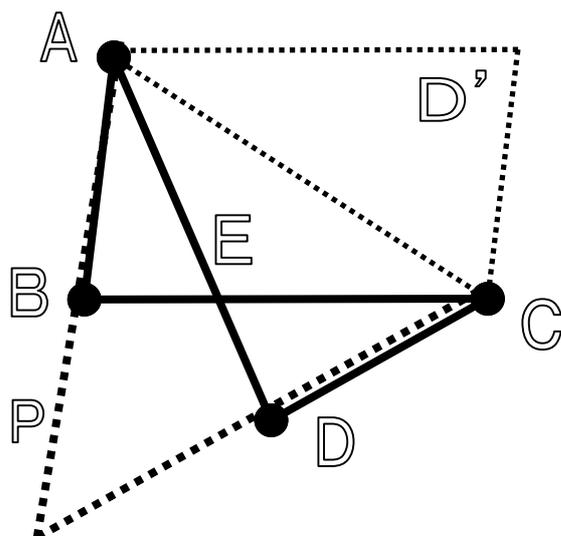
上記のパンタグラフは、等しい長さの棒 4 本でできており、点 D、E はそれぞれ棒の midpoint に位置している。点 A を固定し、点 B において図形をなぞると、点 C の軌跡は点 B でなぞった図形を二倍に拡大した図形となる。点 B を固定し、点 A において図形をなぞると、点 C の軌跡は点 B を中心として、点 A でなぞった図形の点対称な図形となる。証明は、 $\triangle ADB \cong \triangle BEC$ であることを利用するが、点対称に関しては、それに加えて点 A、B、C が一直線上にあることも利用する。

2 時間目の授業で使用した機構



上記の図形 ABCD を交叉平行四辺形という。平行四辺形 ABCD' を対角線 AC で折り返したものである。 $AD = BC$ 、 $AB = CD$ 、 $AB < BC$ を満たす。点 P は AD と BC の交点である。AB を固定し、点 D が点 A の周りを回転するとき、点 P の軌跡は点 A、B を焦点とする楕円を描く。(右側の写真参照)。また、このとき点 C、D を焦点とする同じ大きさの楕円が存在する。この楕円は、始めの楕円と点 P において接し、楕円の周りをもう一つの楕円が滑らずに回転している。授業でも、楕円型に切り取った厚紙を 2 つ配り、交叉平行四辺形型の機構に取り付けることで確認した。

3 時間目の授業で使用した機構



2 時間目と同じく、交叉平行四辺形型の機構を扱う。 $AD = BC$ 、 $AB = CD$ 、 $AB < BC$ であり、点 E は AD と BC の交点、点 P は AB、CD を通る直線の交点とする。BC を固定し、点 A が点 B の周りを回転するとき、点 P の軌跡は点 B、C を焦点とする双曲線を描く。右側の写真は、機構に部品を新たに取り付けて、AB、CD を延長したもの。授業ではこれを用いて双曲線を作図した。

5 .「機構による作図」の授業概要

(1) 授業環境

日時:平成 15 年 11 月 7 日、10 日、14 日 (計 47 分 \times 3 回)

対象:栃木県公立高校 2 年生理系クラス (41 名)

準備:コンピュータ (Windows)、ビデオプロジェクター、Microsoft Power Point、作図ソフト (Cabri Geometry)、実物投影機、授業テキスト、事前・事後アンケート、楕円・双曲線作図器 (交叉平行四辺形型の機構)、パンタグラフ、画用紙、画鋏等

(2) 授業展開

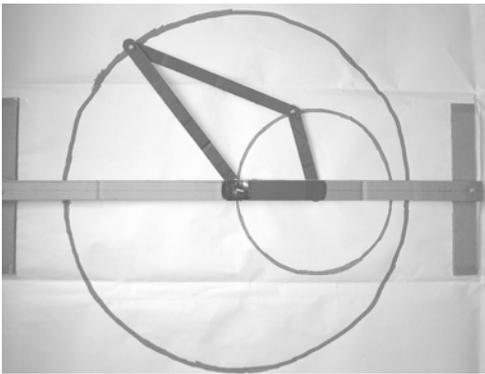
1 時間目の目標

機構とはどんなものをいうのか知る。パンタグラフを用いて作図をし、次に行う証明への興味が持てるようにする。既存の平行線の性質、相似条件等を用いて、予想したことが確かであるか証明を行い、厳密性・客観性などの数学的な考え方のよさを認識する。

授業概要

生徒にとって機構という言葉自体、あまり馴染みがないため、身近な機構の例として、パワーショベルに見られる機構をカブリやダンボールで作った模型を使って説明した (図 参照)。

次に、二人一組になってもらい、ダンボールの台紙・画鋏・画用紙・パンタグ



【図】 扇型の機構の説明

ラフを配布した。描く図形が画用紙からはみ出さないようにするために、画用紙には三角形とパンタグラフを固定する点が描かれており、ダンボールに画鋸で固定されている。作業の説明を実物投影機で実演し、生徒も作図を行った(図参照)。できた図形(図参照)を考えてもらった。二人一組で作業しているので、2人で話合うよう促した(図参照)。そこでは次のような会話が見て取れた。

【会話】

生徒：「これと同じ三角形をしてんだよ」

生徒：「これを大きくできんだよ」

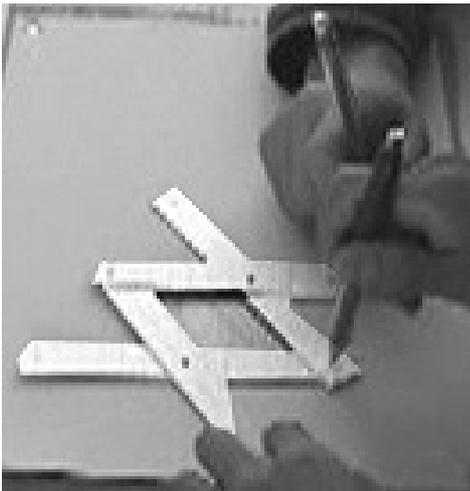
生徒：「2倍になっている」

その後できた図形を発表してもらった。

【会話】

生徒：「三角形」

教師：「もっと詳しくいうと、どんな三角形といえるかな」



【図】 パンタグラフによる作図

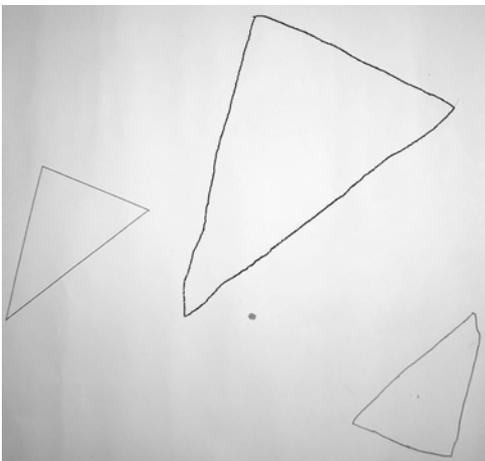
生徒：「点Eで描く三角形よりも大きくなった三角形」

生徒：「相似な図形」

教師：「他に何かありますか」

生徒：「1：2、2倍」

この後、機構の動きの確認をカブリで行った。2回目からトレース機能を使い、できる図形も確認した。次に、実際に点の軌跡が予想した通りになるか、テキストの穴埋めの証明を行った。その際、2人で相談するところが見られた。生徒の様子をみて、どの三角形に注目すればよいかヒントを出した。

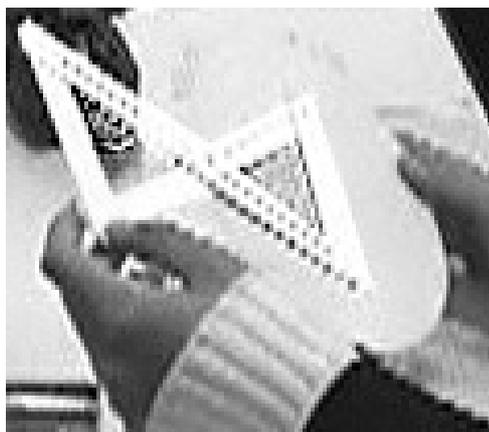


【図】 生徒による作図の結果

次に、同じパンタグラフを用いて、点対称な図形を描いてもらった。できた図形に対して、合同だけで終わらないように、さらに詳しく考えることを促した。その後、描けた図形を発表してもらった。



【図】 話し合う生徒



【図】 交叉平行四辺形型の機構

【会話】

教師：「どんな図形ができましたか」

生徒：「合同で線対称」

これについても、証明とカブリでの確認を行った。1時間目のまとめとして、次のことを示した。

機構の紹介 扇型の機構 パンタグラフ

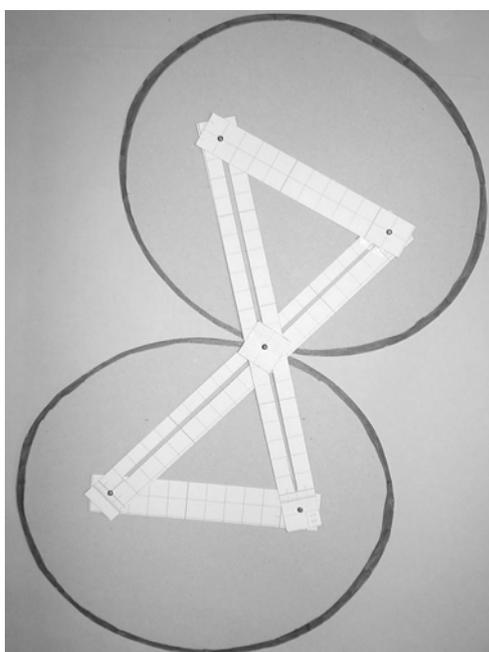
機構の特徴 部品や固定点によって性質が変わる

2時間目の目標

1時間目に引き続き、機構によって図形を描くことにより、生徒が授業について積極的に取り組めるようにする。そして、数学観の変容と身近なことに数学が関わっている事を実感できるようにする。また、二人で作業をすることにより、お互いに意見を出し合いながら、作業が進められるようにする。

授業概要

前回の復習として、機構は「機械にある仕事をさせる、物体の組み合わせ」であり、前時では扇型の機構を例として紹介したことを述べた。そして本時では、それと全く同じ部品で、接続の仕方だけを変えた機構を扱うことを述べた。1時間目と同じく二人一組になってもらい次のものを配布した。



【図】 楕円歯車

厚紙で作った交叉平行四辺形型の機構（交叉平行

四辺形とは、平行四辺形をその対角線で折り曲げ、そのときに、もとの平行四辺形の四辺によって作られる図形である。詳しくは、4.道具の数学的解説を参照）ここでは、交叉平行四辺形の交点Pの軌跡に注目した。次のような会話が見られた。

【会話】

生徒：「円...、楕円！」

教師：「他に何か気づいたことありますか」

生徒：「楕円」

できる図形をカブリで確認した。

また、手元にある機構の交点が実際に楕円を描くかどうか確認するために、描く軌跡と同じ大きさに切り取られた楕円型の厚紙を配った。生徒はこれを、機構に取り付けることで、交点Pが楕円の縁をたどっていく様子を確認できたはずであ

る（図 参照）。

生徒はまだ楕円を未習のため、楕円の定義（2 定点からの距離の和が一定である点の軌跡を楕円と呼ぶ）を紹介した。実際に点が楕円の定義を満たすかどうか確認するために、下記のような穴埋めの証明を行い、発表してもらった。

（証明）

平行四辺形 ABCD' の対角線 AC に対して D' を線対称移動したものが D であるから、ACD は ACD' を折り返した図形となる。よって、

$$CD = CD' = AB$$

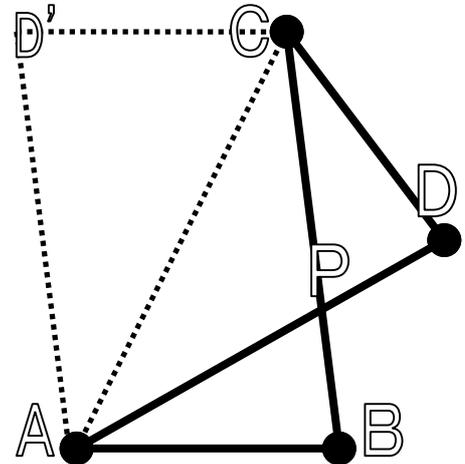
$$\angle CPD = \angle APB$$

$$\angle CDA = \angle CD'A = \angle ABC$$

$$\text{より } \angle PCD = \angle PAB$$

よって 1 辺とその両端の角が等しいので、（ ）

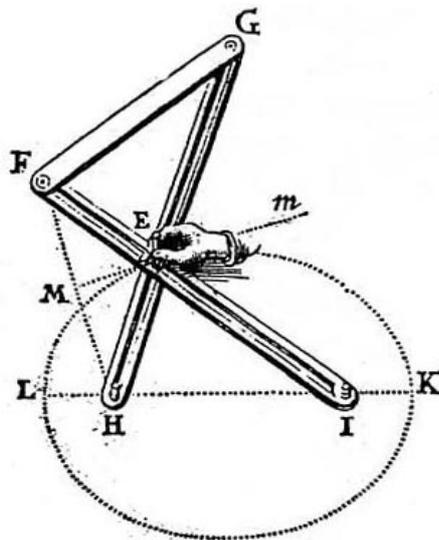
従って、より $AP + BP = AP + \text{（ ）} = \text{（ ）}$



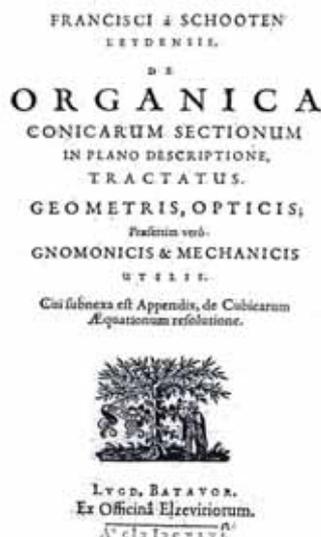
つまり、点 P は A、B からの距離の和が常に一定となる。（証明終わり）

次に F.VAN SCHOOTEN が彼の著書『ORGANICA』のなかで今日の授業で扱った方法で楕円を描いている（挿絵 参照。挿絵 は本の表紙）ことを紹介した。また、デカルトは彼の著書『屈折光学』において、違う方法（杭と紐を使った方法）で描いていることも紹介した。

次に楕円型に切られた厚紙をもうひとつ配って、機構に取り付けてもらい、楕円の外側をもうひとつの楕円が滑らずに転がっていく様子を見てもらった。これを楕円歯車と呼ぶ（図 参照）。円の歯車よりも楕円歯車のほうが滑らず、しっかりと力を伝えることから、水道メーターなどに使用されていることを述べ、身近な生活に実用されていることを示した。次に、カブリを用いて、機構の部品の



【挿絵】楕円の作図

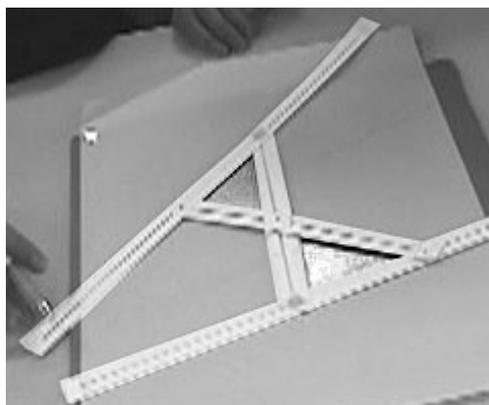


【挿絵】本の表紙

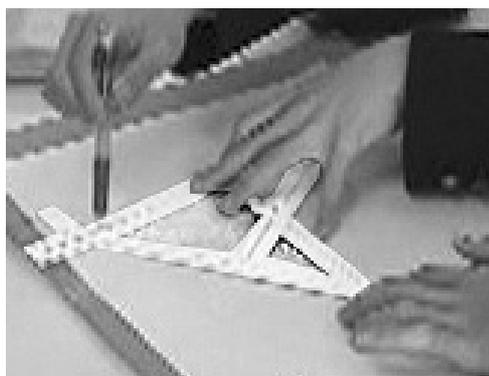
長さを変えると楕円の形は変わるものの、軌跡が楕円になることには変わりがないことを示した。今日の授業のまとめとして次のようなことを述べた。

楕円の定義

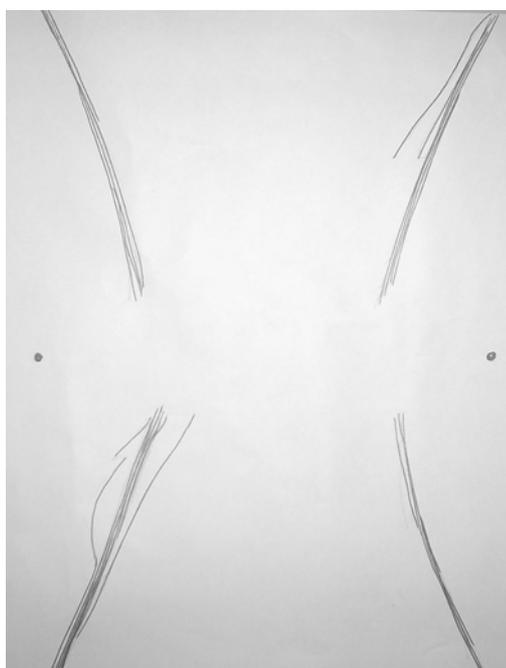
機構は部品が同じでも組み合わせ方（接続の仕方）で違う動きをすること



【図】機構にパーツを取り付けたもの



【図】双曲線の作図



【図】生徒による作図の結果

(F.VAN SCHOOTEN)の紹介をし、その本の中で紹介されている作図方法と、今回の授業で行ったことが同じであることを述べた(挿絵 参照)。

次にカブリを用いて、機構の部品の変えと、どのようになるか見てもらった。ここでは、双曲線の形は変化するものの、注目した点が、2 定点からの距離の差が一定であるという条件を満たす限り、軌跡が双曲線になることを示し

3 時間目の目標

2 時間目と同じく、作図と証明を行うことで、生徒が興味を持って取り組み、数学のよさを学べるようにする。また、3 時間通して行ってきた、作図・予想・数学的に証明という流れを繰り返すことにより、自ら学び自ら考える姿勢を育む。本時は最後の授業となるため、3 時間のまとめも行う。

授業概要

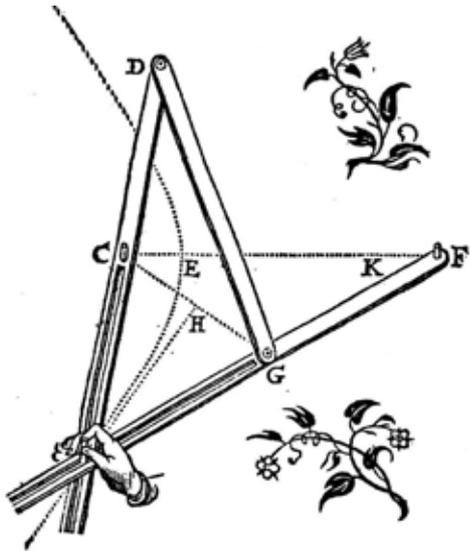
1・2 時間目の復習を行い、機構とはどんなものか、どのような機構を扱ったのかももう一度紹介した。次に、2 時間目との関連を確認するため、次の2つを確認した。1つ目は、本時では2 時間目と全く同じ機構を用いること。2つ目は前回、短い辺を固定して機構を動かしていたが、今回は長い辺を固定した場合を考えることである。二人一組になってもらい、次のものを配布した。

- ・ 交叉平行四辺形型の機構
- ・ 短い辺を延長するためのパーツ
- ・ 画鋏
- ・ 画用紙
- ・ 台紙(ダンボール)

機構の動かし方によって、上手く回転しないことがあるため、回転の仕方を実物投影機で説明した。パーツを機構に取り付けてもらい、短い辺を延長したものの交点の軌跡を画用紙に描いてもらった(図 参照)。両方に延長しているので、交点は両側にできる。しかし、それに気づいていない生徒が多く見られたので、補足説明した。その後、カブリで実演した。次に証明を行った。2 時間目で証明した条件(三角形の相似)は使ってよいとした。原典『ORGANICA』

(F.VAN SCHOOTEN)の紹介をし、その本の中で紹介されている作図方法と、今回の授業で行ったことが同じであることを述べた(挿絵 参照)。

次にカブリを用いて、機構の部品の変えと、どのようになるか見てもらった。ここでは、双曲線の形は変化するものの、注目した点が、2 定点からの距離の差が一定であるという条件を満たす限り、軌跡が双曲線になることを示し



【挿絵】双曲線の作図

た。

3時間のまとめとして次のことを述べた。

機構は構成する部品・組み合わせ等によって多様な動きをすること
棒の条件を変えることで同じ点の軌跡も楕円になったり双曲線になったりすること
図形の性質を確認するために数学が役立っていること

6. 議論

(1) 課題1に関する議論

課題1：自分たちが作図して得た結果を、証明し確認することで授業前後で生徒の数学に対する考え、特に身近な事に関して数学が役に立っているかについて、意識の変化が生まれるか。

授業後に行ったアンケートの質問と回答は以下の通りである。(生徒個人の回答を次の～にグループ分けした)。

質問1：授業では毎時間、証明を行いました。授業を受けて、あなたの数学の証明についてのイメージに何か変わったことはありますか？また、現在証明についてどんなイメージがありますか？

- ・今までやったことのないような証明が出来てよかったです。楽しく出来ました。
- ・基本的なことが出来ればあとは応用すればいいというイメージになった。
- ・証明は式だけでやるものだと思っていたが、実際に道具を使うことによって分かりやすくなった。
- ・難しい数式を使わずに出来るので、クイズみたいな感覚で面白いと思った。
- ・図形を使ったので分かりやすくなった。証明はやり方が分かれば簡単。
- ・数学が生活に深く関係しているということが分かった。

質問2：授業では機構を使って図形を描きましたが、このように、数学の授業に道具を用いることについて思った事を書いてください。

- ・今まで、このような授業は受けたことが無いので楽しい。でも、内容はちゃんとした機構の勉強になっている。
- ・数字を使って計算することだけが数学だと思っていたので、数学に対する見方がかなり変わった。
- ・説得力がある。
- ・このような道具を使って図形を書くということはしたことがないので、まだ

まだ知らないことがたくさんあるのだなあと思いました。

- ・話を聞くより実際に自分でやったほうが、面白いし、理解も良く出来た。
- ・頭で考えるだけでなく、実際に手を動かしているのも、とても楽しかったし、分かりやすいと思った。
- ・数学でも分かりやすく楽しかった。

質問3：日常生活と数学の関わりについてどう思いますか？

- ・思わぬ所で関わりがあったのでびっくりした。
- ・様々なことに数学が関わっていると感じ凄いなと思った。
- ・授業を通して一見関わりがないと思う所にも数学が生かされているのだと思った。
- ・機構が上手く使われている事を知って、関わりがあると思った。
- ・大規模なことをするときによく使われていると思う。

シヨベルカーの例でしか実際に使われているのが分からなかったのもっと他の例が知りたいと思った。

質問4：3日間の授業を終えて、あなたの感じたことを自由に書いてください。

- ・数学は教科書だけじゃないとあらためて感じられた。
- ・悪い先入観が無くなりました。授業受けてよかった。
- ・数学で実験をするとは思っていませんでしたので、普通に授業を受けるより楽しかった。
- ・数学と物理がとても身近なものだと思った。
- ・数学の新しい部分を発見できた。
- ・3日間、機構というものを学び、日常の中にも、数学はどこかしらに関係があるのだなあと思いました。

この授業では道具の材料は違うものの、原典である『ORGANICA』で F.VAN SCHOOTEN が行った作図と同じ方法を生徒は体験することができた。「道具を実際に生徒が自ら利用して見ることで、人はその道具の開発者・利用者がどのように考えたかを知るきっかけを得ることができる」(磯田,2003)とあり、アンケートの回答からもその効果が伺える。また、道具を用いることで生徒は数学のよさや、身近なところで数学が使用されていることを気づき、また、数学という範囲を超えてその道具そのものに関する意識を変化させるという効果もある。(アンケートの回答)。道具を二人に1つ配ることで、生徒自らが機構を動かしながら、探求する学習活動を実現した。二人一組で活動を行うことで、相談をしながら、活動することもできた。このことは、実際の授業の会話などからも見て取れ、自分が作図をしたものを見ながら、結果がどうなるかを周りとの意見を交換している場面が多く見られた。機構の点の軌跡を各自、作図した結果が、始めから画用紙に書いてあった三角形と何か関係があるのではないかと疑問が浮かんだためである。このことが問題意識や興味を生み出し、学習効果を上げるのにつながると考えられる。他にもお互いに話合う場面が見られた。授業では、

F.VAN SCHOOTEN が著書『ORGANICA』のなかで用いている方法と、デカルトが彼の著書『屈折光学』で、用いている方法を紹介した。このことは、異文化体験による文化的視野の覚醒として、その効果は「異文化体験で顕在化した、他文化とそこで自覚された、自文化の自覚ある進展」(磯田,2001)と言われている。また、会話のように、どんなものが描けたか聞いてみる際に、始めは三角形と答えるだけであり、こちらから問いかけてから、どんな三角形であるか考え出した。しかし、次の機会では、会話のように、始めからどんな三角形になるかまで考えて答えており、さらに会話のように、指名してない生徒からも積極的な発言が見られた。これは、自分が作図したものを発表するので、間違いなどを気にせず発表できるためだと考える。また、作図の仕方が分かっている人も、誤解する人も当然いるが、生徒間で教えあいが見られた。

数学科の目標として「数学における基本的な概念や原理・法則の理解を深め、事象を数学的に考察し処理する能力を高め、数学的活動を通して創造性の基礎を培うとともに、数学的な考え方のよさを認識し、それらを積極的に活用する態度を育てる」(文部省,1999)とある。今回、上記のアンケート結果や先行研究及び、下記に示す事前・事後アンケートの結果からも、生徒が実際に作図を行い、予想し証明を行うということは数学的活動であり、既習事項を使って結論を導くことは、数学を積極的に使用する態度を育て、数学のよさを知ることにつながるのではないかと考える。

事前・事後アンケートの結果をまとめた表を質問内容と共に下記に示す。

日常の問題の解決に数学が役立つ

調査人数/意見	大賛成	賛成	どちらとも	反対	大反対
事前(36)	2(6%)	12(33%)	14(38%)	6(17%)	2(6%)
事後(37)	10(27%)	13(36%)	9(24%)	3(8%)	2(5%)

大部分の数学が仕事上で実際に使われる

調査人数/意見	大賛成	賛成	どちらとも	反対	大反対
事前(36)	5(14%)	12(33%)	14(39%)	4(11%)	1(3%)
事後(37)	9(24%)	16(43%)	8(22%)	3(8%)	1(3%)

身の回りの道具から数学的な性質を見つけることができる

調査人数/意見	大賛成	賛成	どちらとも	反対	大反対
事前(36)	5(14%)	16(44%)	12(33%)	1(3%)	2(6%)
事後(37)	11(30%)	14(38%)	10(27%)	0(0%)	2(5%)

数学は自分で新しいことを考えていこうとする人にとって適した学問である

調査人数/意見	大賛成	賛成	どちらとも	反対	大反対
事前(36)	9(25%)	10(28%)	10(28%)	7(19%)	0(0%)
事後(37)	10(27%)	15(40%)	11(30%)	0(0%)	1(3%)

「日常の問題の解決に数学が役立つ」という質問の回答に関して、大賛成を 5、

賛成を 4、どちらでもないを 3、...と数値化して、母平均の差の検定を行った。事前・事後の 2 つの母集団を $N(\mu_1, \sigma_1^2)$ 、 $N(\mu_2, \sigma_2^2)$ とし、帰無仮説を $H_0 : \mu_1 = \mu_2$ 、対立仮説を $H : \mu_1 < \mu_2$ とした。それぞれ

$$\mu_1 = 3.1666... \quad 3.167 \quad \sigma_1^2 = 0.9428... \quad 0.943$$

$$\mu_2 = 3.702703 \quad 3.703 \quad \sigma_2^2 = 1.27027 \quad 1.27$$

$$t = 2.178898 \cong 2.179$$

$$\nu = 67.60276 \cong 68$$

よって、自由度 68 の t 分布に従う。有意水準を $\alpha = 0.05$ と設定する。t 分布表より、自由度 68 の t 分布の片側 5% 点は $t_{0.05}(68) < t_{0.05}(80) = 1.664$ である。

ところで、 $t = 2.179$ 、 $t_{0.05}(80) = 1.664$ であるので、 $t = 2.179 > 1.664 = t_{0.05}(80)$

となり、帰無仮説は有意水準 0.05 で棄却できる。従って、生徒の「日常の問題の解決に数学が役立つ」に対する意見について、授業前と授業後ではより多くの生徒が賛成するようになったといえる。つまり数学に対する日常の問題の解決に数学が役立つという意識を変容したことがわかる。他にも、上記のアンケート結果の下線部からも授業前後で生徒の数学に対する考えに意識の変化が生まれたと考えられる。

以上のことから機構を用いることよって、授業への積極的な態度が生まれ、教材について興味を持てることが分かった。また、機構を用いて作図を行い、できる図形を予想し、証明することで、生徒は数学の有用性や日常生活の中に数学が使われていると感じ、数学観の変容を図ることができたと考える。

(2) 課題 2 に関する議論

課題 2 : 授業前にはあまり身近でなかった楕円・双曲線、機構について、授業を行うことで、従来の代数的な定義を用いた授業とは異なるイメージを育てられるか。

授業後に行ったアンケートの質問内容と回答は以下の通りである。(生徒個人の回答を次の ~ にグループ分けした)。

質問 5 : 授業を終えて、あなたの機構に対するイメージはどのように変わりましたか？

- ・機構というものが前は分からなかったが授業をやっていくにつれて興味が出てきた。
- ・もともとどんなものか分からなかったので、機構について知るいい機会になったと思います。
- ・今まで機械そのものが嫌いだったが、数学との関わりを持つと知り、嫌いではなくなり、少し機構を知ることができた。
- ・最初は全く意味不明の言葉だったけど、機械にある運動をさせる一組の物体の組み合わせだということが分かった。

質問 6 : 3 日間の授業を終えて、あなたの感じたことを自由に書いてください。機構は数学というより物理に近い気がする。

中学校とか高校の総合学習とかに役立つと思います。

今回は機構と数学を結びつけての授業となった。機構の例を多くすることにより、総合的な学習の時間や、数学があまり好きでない生徒にとっても、数学に対する新たな視点・考えを生み出すことができるのではないかと考える(アンケートの回答)。従来の教科書からは、少し離れた内容であったが、そこから数学を見つめなおすことで、数学への見方、特に数学が身近な場所で活用されていることに関して変容があったと考えられる。そして、このことは、今後の数学の学習にもよい影響が出てくると考える。実際に回答や課題1の結果にもあるように、自らが手にとって作業をしたことで、機構について興味を持ち、それらの性質を証明することで、生徒は数学を使うことである事柄が明らかになっていくことを経験できたはずである。また、これによって、証明に関する意識も、変化が出たと考える。また、の回答のように物理との関係を書く生徒もいた。他にも、数学が他の分野と関わり、将来、仕事で使うことがあるだろうと答えている生徒もいた。事前アンケートより、授業前では楕円・双曲線という言葉を知っている生徒はあまりなく、その正確な定義を知っている生徒もほとんどいなかったと考えられる。しかし、授業を通して楕円・双曲線の定義を学び、それを実際に作図・証明することで、従来の代数的な定義とは違い、点々が、自分たちが証明した条件を満たしながら動いていく様子を確認することが出来た。そして、その軌跡が楕円・双曲線というものであることを学ぶことが出来た。

7. おわりに

本研究において、機構による作図をテーマに授業実践を行ってきた。授業において生徒は実際に道具を手にとって動かすことにより、ある条件を満たす点の軌跡がどんな図形を描くかを自分の目で確認することができた。また、スクリーン上でも、作図ソフトであるカブリを用いることで確認することができた。道具を使うことで、内容が現実的なものとなり、生徒はより興味を持って授業に取り組むことができた。そして、既習内容を用いて結論を得ることで、数学観の変容が得られたことが事後アンケートからも確認できた。ここでは、2次曲線を未習の生徒に対して、楕円・双曲線を題材にした。授業ではそれらの知識を前提としなくても授業に参加できるように、数式を出さず、定義とそれを満たす点の軌跡が実際にその図形を描くことを示した。この活動をしたことで、2次曲線をもう一度学ぶ際にどんな影響があるかはそのときになってみないと確認することができない。しかし、楕円・双曲線はどのような定義で、機構は、固定する辺によって点の軌跡が変わるということは知ることが出来たと考える。授業では、実際に機構が使用されている例として挙げたのはパワーショベルだけだった。また、楕円歯車を取り挙げたが、力を正確に伝え、速度が変化するという性質を伝えるだけにとどまり、具体例を出せなかった。今後の課題としては、「もっと具体的な例が見たかった」(アンケートの回答 参照)とあるように、実際に機構が使わ

れている例をたくさん盛り込むことが挙げられる。

謝辞

研究授業の実施に際して、栃木県立佐野高等学校の石塚学先生、秋澤学先生をはじめ同高等学校の数学科の先生方には貴重なご意見・ご指導をいただき、同高等学校の諸先生方にも多大なるご協力をいただきました。そして、筑波大学に内地留学されている佐野高校の会田英一先生にも、日程の調整・段取りなどご協力いただきました。厚く御礼申し上げます。

注)

本研究は平成 15 年度科学研究費、特定領域研究(2)課題番号 15020214「数学用機械と JAVA による移動・変換と関数・微積ハンズオン教材の WEB 化研究」(研究代表者磯田正美)において開発された歴史的道具を前提にして、平成 15 年度科学研究費、基盤研究(B)(2)課題番号 14380055「数学の文化的視野覚醒と新文化創出のための教材・指導法開発研究」(研究代表者磯田正美)の一環として行われた。

参考・引用文献

- (1)文部省(1999).*高等学校学習指導要領解説数学編理数編*. 東京：実教出版.
- (2)文部省(1999).*高等学校学習指導要領* 東京：大蔵省印刷局.
- (3)小関勝則(1998).4 節リンク機構における曲線の探求:LEGO dacta と作図ツールを用いた他教科との関連教材.*中学校・高等学校数学科教育課程開発に関する研究(5) テクノロジーの活用による数学教育内容と指導法の創造に関する研究：代数、解析、幾何の改革*,pp.212-218.筑波大学数学教育研究室.
- (4) 磯田正美(2003).なぜ道具を数学教育で活用する必要があるのか:道具を使ってこそ学べる数学の教育的価値を明かすためのパースペクティブ.*日本数学教育学会第 36 回数学教育論文発表会「課題別分科会」発表収録:今後の我が国の数学教育研究*,pp.246-249. 筑波大学数学教育研究室.
- (5)小林正(1993).*現場の歯車活用事典*.日本プラントメンテナンス協会
- (6)磯田正美(2002).異文化体験からみた数学の文化的視野の覚醒に関する一考察:隠れた文化としての数学観の意識化と変容を求めて.*筑波数学教育研究*,20,pp.39-48.
- (7)広井徳文,北島茂樹,坂本正彦(2000).回転作図器の授業におけるレゴの効果に関する一考察:LEGO dacta を利用した平面図形の探究活動 .*中学校・高等学校数学科教育課程開発に関する研究(7)数学教育改革の推進とテクノロジーの利用の実証に関する研究：ミレニアムプロジェクトに於いて*. pp.89-100.筑波大学数学教育研究室.
- (8)小島泰一,北島茂樹,坂本正彦(2000).線対称作図器の授業に関する一考察:LEGO dacta を利用した平面図形の探究活動 .*中学校・高等学校数学科教育課*

程開発に関する研究(7)数学教育改革の推進とテクノロジーの利用の実証に関する研究：ミレニアムプロジェクトに於いて、pp.101-108.筑波大学数学教育学研究室.

- (9)磯田正美(2000).道具が媒介する図形における「観察,操作,実験」型探求の楽しさ.中学校・高等学校数学科教育課程開発に関する研究(7)数学教育改革の推進とテクノロジーの利用の実証に関する研究：ミレニアムプロジェクトに於いて、pp.83-87.筑波大学数学教育学研究室.
- (10)磯田正美(2002).解釈学からみた数学的活動論の展開：人間の営みを構想する学教育学へのパースペクティブ.筑波数学教育研究,21,pp.1-10.
- (11)辻宏子(2002).数学教育における教材・教具としてのコンピュータの機能に関する一考察：Cabri-Geometryにおける『点の自由度』を事例として.筑波数学教育研究,21,pp.47-54.

上記以外で授業に際して参考にした文献

- (12)斎藤二郎(1976).機構学へのアプローチ.大河出版.
- (13)デカルト(1637).三宅徳嘉他訳(2001).デカルト著作集 1 増補版：屈折光学.白水社.
- (14)F.VAN SCHOOTEN(1648).ORGANICA.
- (15)永尾汎ほか 8 名(2001).改訂版高等学校数学 C.数研出版株式会社.
- (16)井沢実,加藤博共(1979).機構学.産業図書.
- (17)井垣久ほか(1989).機構学.朝倉書店.
- (18)船山良三(1977).工科のための運動の幾何学.理工図書.
- (19)ポイヤール(1968).加賀美鉄雄,浦野由有共訳(1984).数学の歴史：3.朝倉書店.
- (20)スチュアート・ホリングデール(1989).岡部恒治監訳(1993).数学を築いた天才たち：上下.講談社.
- (21)技能士の友編集部編(1973).歯車のハタラキ.大河出版.