

重差術を用いた授業研究

中国の数学原典「海島算経」を通して一

筑波大学大学院修士課程教育研究科

黄 秀蘭

章構成

要約

- | | |
|--------------|----------------------------|
| 1. はじめに | 本稿では、中学生を対象とした授業において、中国の |
| 2. 研究目的・研究方法 | 秦漢時代に発展した数学による重差術を扱った結果と考 |
| 3. 重差術の教材化 | 察を述べる。歴史の視点から当時中国人の数学の知恵を |
| 4. 重差術の授業概要 | 学ぶことで生徒の数学観に与える影響・変化を考察した。 |
| 5. 考察 | また、今回の授業では、海島算経を使うことにより、生 |
| 6. 終わりに | 活の中の身近なものを使って大自然の中に数学がさまざま |
| | な形で潜んでいる事を生徒に示した。 |

キーワード：重差術、海島算経、道具、算木、秦漢、相似

1. はじめに

数学の授業に歴史を取り入れることによって、文化・歴史への共感を呼び、数学を学び考えることの面白さを吟味することを目標とする。塚原(2002)は“学習者が人類の知的文化遺産を学び、一つの文化としての数学のよさを感じ得る”と述べている。さらに、Kazim(1983)は“数学が一つの文化であることは誰でも否定せず、多くの教師は、数学はあたかも定義、定理、法則、問題のコレクションであるかのように数学を教えている。生徒は、数学は試験のために存在し、単なるカリキュラムの一部だと捉えている。教師は数学の認知的な面だけに目を向け、情意的な面に欠けている”と述べている。教師主導の教え込み的な授業では、生徒は自ら考えようとせず、受身的に内容を受け入れる生徒がたくさん存在する。したがって、数学の学習は、試験のためであると生徒は思いがちである。このような状況を省みて実際に生活の中で数学がどのように応用されているか生徒が自発的に意識できるような数学教育の大切さを感じる。

数学史については、磯田(1987)によると、“数学史に対する真の理解をもたらすとともに、創造的な活動としての数学に対する理解、数学的な思考方法の理解を深めるものとして意義がある”。また、中学校学習指導用領(1999)では、「各領域の内容を総合したり日常の事象に関連付けたりした適切な課題をも設ける」と授業の内容を充実し、日常生活に役立たせる数学的活動を図ることが掲げられている。本稿では、その試みの端緒として、中国生まれ、漢字文化圏で使われていた数学を通し、その実践的な可能性を検討する。また、数学の原典を勉強し、数学の歴史を学ぶことで、生徒が数学に対する見方・考え方を

再認識でき、勉強の意欲を引き出すことを目指す。

2. 研究目的・研究方法

(1) 研究目的

中国の数学原典を通し、当時数学が活かされていた事実を取り上げた。歴史的な道具（算木）と現代の筆算を併用しながら古代の数学問題を解く授業を行った。道具を用いてその時代を追体験することで、数学の過去・現在に存在する真意を再考し、数学はいかに変化したかをするものである。数学に対する興味・関心を一層喚起するとともに、数学観の変容を考察する。

上記の目的を達成するため、以下の課題を設定する。

課題1：中国の数学原典を用いたことで、生徒の数学に対する見方・考え方の変容が見られるか、数学への興味を高めることができるか。

課題2：課題1を通し、数学の原典《海島算経》と追体験をし、身近なものを使っている数学の解きかたを学習することで、生徒は数学がいかに生活において大切かを実感する事ができるか。

(2) 研究方法

中国の数学原典「海島算経」に基づき、当時生活に応用されていた方向や時間の測量術といったあらゆる生活事象に関する数学を探り、それらを授業に取り入れる。また、歴史的な書物を参考にしたテキストと道具を開発し、それを用いて授業実践を行う。そして、授業前後のアンケート、ビデオによる授業記録に基づいて生徒の変容を考察する。

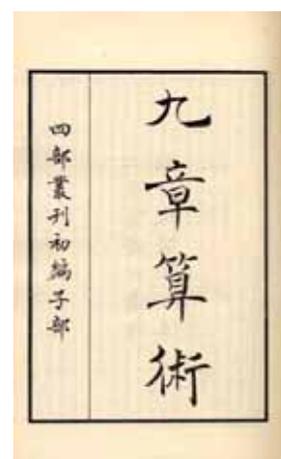
3. 重差術の教材化

今回、重差術を教材化するにあたり、三国時代（凡そ紀元後2世紀）の劉徽が著した《海島算経》^{かいとうさんけい}に焦点を当て、また、漢の時代（凡そ紀元前2世紀）から流布されていた《九章算術》^{きゅうしょうさんじゆつ}を参考にした。

《九章算術》は中国において、最古の数学書とされている。¹《九章算術》が出現してから、14世紀初頭までの約1300年間、数学の知識を伝えるもっとも基本的な教科書であった。長い時間にわたり、ほかの数学書の原型となっていた。²

書《海島算経》に取り入れた（図2）。彼は《九章算術》に詳細な注解をほどこし、序言を書き、合わせて《重差

【図1】現存の九章算術



一巻を記した。

《重差》は《九章算術》の後ろに編入されていたが、唐代に十部算経の選定にあたり、取り出され、独立の

一冊《海島算経》になった。³

重差ということばは、中国の古典の《周禮》と《靈憲》の中にも取り上げられていた。張衡が《靈憲》の中で、「重差こうこう勾股」に言及して天体測量に用いた。⁴ 劉徽

は、先人の仕事をもとに勉強を続け、実際の生活に役に立たせるように応用しやすい計算法を創った。さらに、彼は、《九章算術》の注釈の序文に、重差術の意義、方法及び自身の研究経過について詳細に記述した。

「凡そ極めて高く望む所や絶えて深い所を測り、そこまでの遠さを知るには、必ず重差が用いられる。勾股の方法に、重差を以て率にするので重差という」(図3)。

《海島算経》を用いたことで、当時の中国人は、身近なものの木、金属とかで日時計のような機能をこなし、違うところで影を測り、影の長さの変化により、重差術の計算をして山や谷の高さ深さを求めたとわかった。

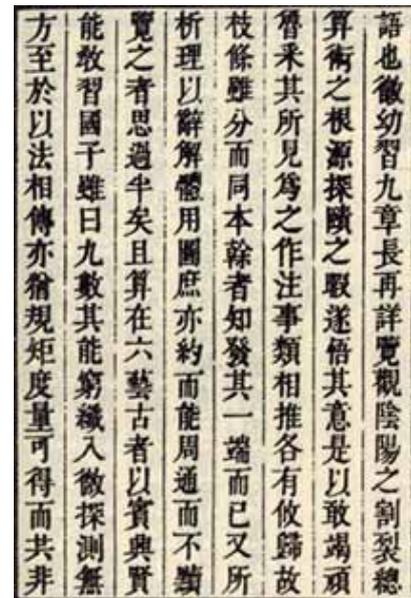
長い歴史に誇りを持つエジプトは、ピラミッドの長さを測るのに、ほぼ同じの方法を使ったことも授業の中で説明した。⁷

《海島算経》の中では、9つの数学問題しかないが、二時間目に一問を取り上げ、三時間目には二問という割合を設定し、生徒に計算させた。

海島算経の原典では、文字のみで質問と答えと解き方を示した。図が載せられていないため生徒にはやや難解であると思われた。そこで、生徒に取り込みやすくするために、簡単な図を用意した。生徒が質問の文の意味を読み取り、一步ずつ自ら図の完成をしていかなければならないような図の構成を工夫した。

また、数学の原典は中国語であるためまだ漢文を学習していない中学校三年生の生徒にはその内容を理解することは不可能なので、日本語の全訳を付け加えた。

【図2】九章算術抜粋

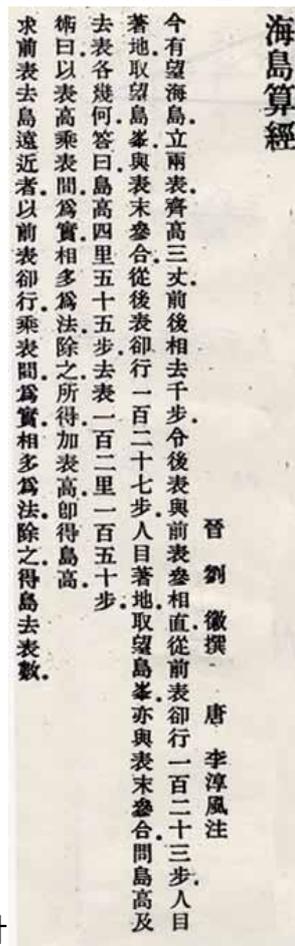


【図3】九章算術抜粋



一時間目は、中国の秦漢時代の歴史を踏まえ、重差術の源流を紹介した。二時間目は、影の原理を用いて方向の判断方法を紹介し、それを踏まえ重差術の計算を行った。三時間目では、影の原理を使い、時間の測り方を紹介した。さらに昼間には、影で時間を判断できるが、夜になったとき当時の中国人はどのように時間を計ったのかを紹介した。それらを踏まえ、重差術応用の問題に進める。

【図5】海島算経抜粋



4. 授業の概要

授業環境

日時：2004年12月13、14、16日（計50分×3回）

対象：私立中学校3年生（1クラス、46名）

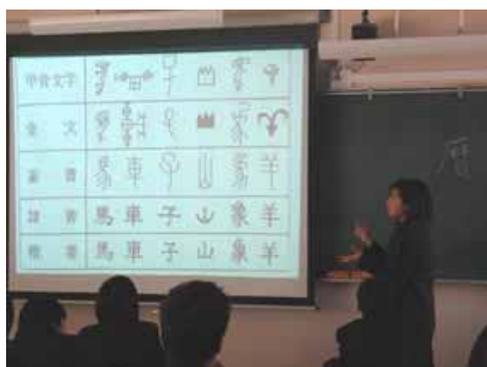
準備：Laptop (Windows XP)、Power point、Video Camera、
事前・事後アンケート、授業資料、ろうそく、線香、中国暦の本、算木、さしがね。

授業展開

〔一時間目〕

授業内容：

漢字の原型から秦漢の歴史に入る。中国の数学において、計算するのに使用した道具の算木とそろばんの使い方、また、文字と数字のつながりを紹介する。重差術の源流と意味を紹介する。



【写真1】漢字とは？

教師：日本は中国の文字を借りて自分の文字を作りました。日本の文字は3種類あって、その中の一つは漢字です。しかし、なぜ漢字と名づけたでしょう？

生徒1：漢の時代に創った文字だから。

生徒2：ひらがな、カタカナがあるため、それと区別するため。

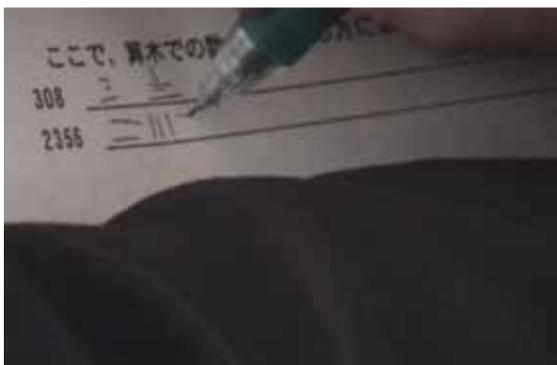
生徒3：お母さんに教わったから。

教師：答えは、中国人の漢民族がそれを作り、使用しはじめたからです。

日本で使っている文字は三種類があり、ひらがな、カタカナと漢字である。そこで、生徒に「何故『漢字』と呼ぶのでしょうか？『文字』や『中国字』でも良かったではないですか」という問いをかけ、生徒に漢字の歴史の由緒を考えてもらうようにきっかけを与えた。

【写真2】算木での数字の表わし方

を書いている生徒

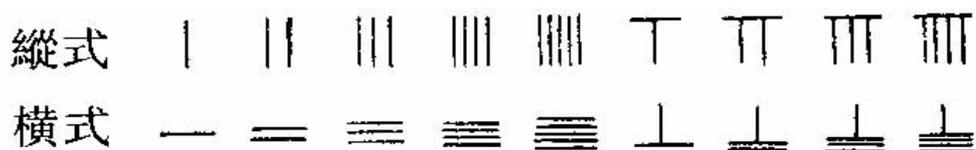


ここでは、三国時代の海島算経を育んだ基盤である秦漢時代の数学に絞り、紹介をする。

中国の数学書《九章算術》の内容を簡単に紹介し、海島算経とのつながりも授業の中で説明した。また、劉徽が中国の数学に与えた影響と貢献も授業の内容に取り入れた。

現在は、電卓などのハイテクな道具を使い、数学をするが、当時には、紙も発明されていないため、大自然の力を借りて砂や布に文字を書き、平らな地面かテーブルの上で数学の計算をした。ここで、算木で掛け算の計算を行い、それを事前にビデオで撮影する。ビデオを通し、生徒に算木を用いてどのように計算されていたかを教える。その後、算木で数字を並べ、生徒に数字を認識してもらう活動をした。

【図4】算木での数字の並べ方



〔二時間目〕

授業内容：

作図を行うために、古代の中国で使ったコンパスと矩さしがね（直角を書く道具）に似せ、作った教材を生徒に提示した。それらの使い方を認識させ、影の原理を用いた重差術の計算に取り組みさせる。また、影で方向を判断する方法も紹介した。



【写真3】生徒が答えている様子

教師：古代の中国では、どのように真東と真西を判断したか、考えて下さい。

生徒：地面に日時計を立てて、それを中心にして円を書く。朝の時に影が円の線上と交わる部分を記録して、午後影がまた線上と交わる所を描いて、二点を結んで線になる。その線の真ん中に発する垂線は真南と真西を指す。

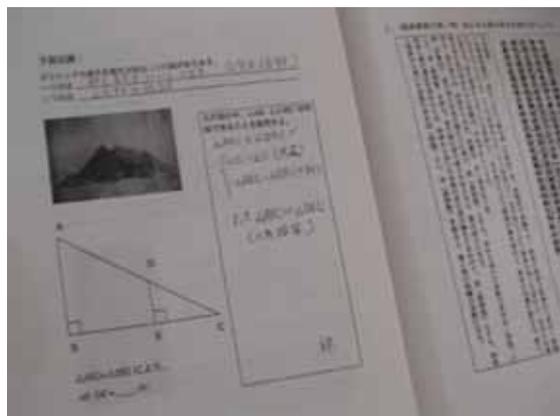
教師：その通りです。

海島算経の問題に入る。ここで質問の原典を読みながら、生徒に考えてもらいたいこと

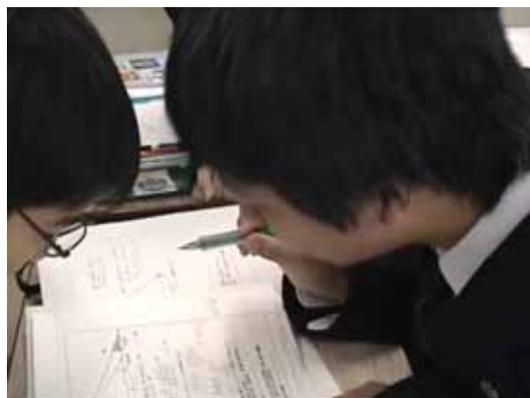
がいくつかある。それは、原典の中にも出てきた東、南、西、北という方向を指す言葉があるが、当時の人々はどのように方向を判断したかということである。生徒は日が出る所は東で、日が没する所は西だと答えた。しかし、東、西だけではなく、真東と真西の判断法も考えてもらうこととした。

続いては、三角形の相似比の証明を行う。この定理を用いて海島算経の質問を解いていた。また、劉徽の重差術を用いて計算を行った。両者の比較をしながら、古代中国人が考えこなした方法と現在の数学の解き方を味わった。

しかし、ここで、当時の中国で使われていた単位はかなり複雑で、生徒は、相似比の式を立てることができたが、単位の換算することに行き詰まった。最後に正しい答えを求めた生徒は 15 人もいた。



【写真 4】生徒が書いた証明



【写真 5】生徒が討論している様子

〔三時間目〕

授業内容：二時間目の学習内容を復習した。さらに影の原理を使っての時間の測り方も紹介した。昼間には、影で時間を判断できるが、夜になると、当時の中国人は線香、ろうそく、敲鑼（鑼という楽器をたたく）で時間を判断したと伝わってきている。それらを簡単に紹介し、また重差術応用の問題に取り組む。



【写真 5】時刻の 12 支

古代の中国は一日を左の図のように、12 時間帯に分けていた。昼間には、影の長さにより、時間を判断し、それぞれの時間を子時、丑時、寅時、と読んでいた。線香に火をつけ、燃え始めるから燃え尽きるまでの時間が一定であり、ろうそくも同じの使い方、夜の時に時間の判断の道具と使われていた。敲鑼で時間の判断というのは、夜に時間帯が変わる度に、敲鑼をする職人が町中を歩き回り、鑼をたたいて時間を知らせた。

【写真6】正午とは？



教師：日本でも、中国でも、台湾でも、正午という言葉を使っているが、それはどういう意味ですか？

生徒：図を見てわかったが、午時とは実際11時から13時の間で、12時はちょうど真ん中で、正午という。

教師：その通りです。

三時間目では、重差術を使い、谷の深さを測った。これは二時間目に行った山の高さを測る問題と似ているがやや異なる。二時間目の問題では、二ヶ所で日時計を垂直に地面に立て、その影を測り、重差術に基づいて山の高さを測った。しかし、ここで、谷は地面よりも低いので、日時計は不適用である。したがって、古代の中国人はさしがね矩がねを持ち、一回地面に置き、また地面より高いところにもう一回さしがね矩がねを置き、谷の一番低い所に当たる影はそれぞれさしがね矩がねをどれくらい通り、その距離を測って重差術に基づいて谷の深さを測った。ほかに、ここで、注意しなければならないことは、谷の中に水が入っていないことを設定しなければならない。それは、谷の中に水が入っていると、光の進行は水に入ると屈折の現象が現れてくることである。したがって、正確的に谷の深さを測れなくなってしまう。

5. 考察

(1) 課題1に対する考察

課題1：中国の数学原典を用いたことで、数学に対する見方・考え方の変容が見られるか、数学への興味を高めることができるか。

数学の原典を勉強し、数学の歴史を学ぶことで、生徒が数学に対する見方・考え方を再認識でき、勉強の意欲を引き出すことを目指すので、「今回の授業を受けて、中国の数学原典を用いたことによって、数学に対する見方・考え方が変わりましたか、数学への興味が高まりましたか。また、その理由を書いて下さい」という問いを授業後に行ったアンケートの中に取り入れ、生徒の変容を観察した。

この課題について考察に当たり、生徒の回答の一部を以下に示す。

数学への意欲が高まった。

また数学が好きになりました。

今回の授業を受けて数学をきちんと勉強しようと意欲が高まった。

昔の中国数学を勉強することによって、物事を様々な角度から見ることができ

た。

中国と日本の数学の考え方を両方考えられるようになった。

数学の考え方が変わったと思う。ただなんとなく公式を当てはめるだけではなくて、なぜその答えに行きつくのかわかなくて初めて考えた。

数学の接し方や見方が少し変わった気がする。

比などの問題で最初はなぜ $a:b=c:d$ なのかわからなかったが今回の授業を受けてやっとわかった。数学の見方がすこし変わったような気がする。

以上の回答より、～ は生徒が今回の授業を受け、数学の原典を用いたことにより、数学への興味が高まったと示したものである。～ より、数学の原典を用いたことで、数学の考え方・見方が変わったと読み取れる。

さらに、次のような歴史・文化への共感を得た生徒の答えも見られた。

いろいろな数学があるのだと感じることができ、考え方に幅ができたと思う。

数学の歴史が分かってよかった。

異文化の教育に興味をもった。

数学は数学ばかりが並ぶものだと思っていたのに、「歴史」というものがあるのだなぁと実感した。

～ の答えより、生徒は数学の勉強が数学の式を計算するだけではなく、歴史や文化もその中に潜んでいるということに気づいた。つまり、今回の授業研究の目標である「数学の授業に歴史を取り入れることによって、文化・歴史への共感を呼び、数学を学び考えることの面白さを吟味すること」を達成したと言えるだろう。

(2) 課題2に対する考察

課題2：課題1を通して、数学の原典《海島算経》と追体験をし、身近なものを使っての数学の解きかたを学習することで、生徒は数学がいかに生活において大切かを実感する事ができるか。

生徒はつねに数学の勉強は、試験のために存在すると思いがちである状況を省みて、生活の中で数学がどのように応用されているか、生徒に自発的に意識できるような数学教育の大切さを感じてもらいたいため、授業後に行ったアンケートの中に「中国の数学原典《海島算経》と追体験をし、身近なものを使っての数学の解きかたを学習することで、数学は生活において大切だと思いますか。また、その理由を述べて下さい」という問いを取り入れ、生徒の答えを求めた。

この課題について考察に当たり、生徒の回答の一部を以下に示す。

昔の中国人やいまの人々にとって、数学はどこでも、いつでも生きていけるようになった。普通に生活している中で、絶対に数学が使われて、またやうくに立つと思う。

買い物をするときだけ、普通の生活に数学が応用されていると思ったが、昔の中国の事例を知って、山の高さも谷の深さも、身近なものを使って測れることにびっくりした。数学は、生活の中で大切だと思った。

昔、学校に行ける人は少なかったので、ちゃんとした数学を勉強できなくて、ごく普通の計算だけをしていたと思い込んでいたが、今回の授業を受けて、違うなあと思った。生活の中で、数学はやはり重要だね。

数学はとても抽象的、実際の生活にはあまり使う必要がないとずっと思った。でも、中国の話聞いて、感じたことは、数学は数学式の計算だけではない、いろいろなところで必要だ。山の高さは影で測れるんだ！数学は生活の中に存在しているんだと思わせた。

以上 ~ の回答から、生徒は、日常生活の中で、単に買い物をするだけではなく、自分の思考に力をつけることも、各々の事象に応ずる準備においても、数学は様々なところで使われていると感じるようになっていく。数学は実生活において大切だと認識することができたと読み取れる。

6. 終わりに

本研究では、中国の歴史・数学史と、それにかかわった計算の道具を使い、生徒が数学への興味・関心を引き出すとともに、数学観の変容をはかることを目的とした。

教え込みの授業だと、生徒は問題を解くことに応じ、計算の公式を理解せずに暗記をさせがちであり、より早いスピードで問題を解けるように、つねに計算の練習をさせているが、それはテストで高い点数を出すためには良い授業方式かもしれないが、数学教育の本質とはいえないと私は考える。そこで、授業の中に数学に自発的、能動的に取り組ませる活動を入れ、数学の実用性を伝えようとした。今回の体験は生の体験だったため、私には非常に興味深く、また参考になった。これからのさらなる研究に役立てたいと思う。

謝辞

最後になりますが、授業の研究に際して、茨城県私立茗溪学園の永田眞裕先生と島一史先生と生徒の皆さんをはじめ、多くの方々から貴重なご指導をいただいたことをこの場を借りて厚く御礼申し上げます。

注

本研究は平成 16 年度科学研究費、特別領域研究(2) 課題番号 15020214 「数学用機械と JAVA による移動・変換と関数・微積分ハンズオン教材の WEB 化研究」(研究代表者 磯田正美)において開発された歴史的道具を前提にして、平成 16 年度科学研究費、基盤研究(B) (2) 課題番号 14380055 「数学の文化的視野覚醒と新文化創出のための教材・指導法開発研究」(研究代表者磯田正美)の一環として行われた。

引用文献

- 1 . 李迪 (1984) . 中国数学史簡編 . 遼寧人民出版社 , pp. 62 .
- 2 . 李迪 (1984) . 中国数学史簡編 . 遼寧人民出版社 , pp. 82 .
- 3 . 李國偉 (1994) . 科学月刊 . 科学月刊雜誌社 , 第 16 卷第 2 期 .
- 4 . 李迪 (2002) . 中国の数学通史 (中国数学史簡編) (大竹茂雄 & 陸人瑞訳) . 東京 : 森北出版 , pp. 94 .
- 5 . T.L. ヒース (1998) . ギリシア数学史 (平田寛 & 菊池大沼訳) . 共立出版 , pp. 66 - 73 .

参考文献

- 1 . アリー・A・アル＝ダッフア (1980) . アラビアの数学 (The Muslim contribution to mathematics) (武隈良一訳) . サイエンス社 .
- 2 . アン・パールダン (2000) . 中国皇帝歴代誌 (月森左知訳) . 創元社 .
- 3 . Kazim, M. M. (1983) . The Use of History of Mathematics in the Teaching of Mathematics in Secondary Education. Proceedings of the Fourth International Congress on Mathematical Education / edited by M. Zweng. Birkhäuser. pp. 176-179 .
- 4 . 磯田正美 (1987) . 数学学習における数学史の利用に関する 考察 . 筑波大学附属駒場中高等学校研究報告 , 26 , pp . 157 - 174 .
- 5 . 鳥山喜一 (1972) . 中国小史 : 黄河の水 . 角川書店 .
- 6 . 塚原久美子 (2002) . 数学史をどう教えるか . 東洋書店 .
- 7 . 劉徽・李淳風注釋 (1975) . 九章算術 (四庫全書珍本) (王雲五編) . 台北 : 商務印書館 .
- 8 . 劉徽 (1975) . 海島算經 (四庫全書珍本) (王雲五編) . 台北 : 商務印書館 .
- 9 . 李儼 (1931) . 中算史論叢 . 上海 : 中華學藝社 . 上海 : 商務印書館 .
- 10 . 李儼・杜石然 (1976) . 中國古代數學簡史 . 香港 : 商務印書館 .
- 11 . 李繼閔 (1992) . 九章算術及其劉徽注研究 . 台北 : 九章出版社 .
- 12 . 李迪 (2002) . 中国の数学通史 (中国数学史簡編) (大竹茂雄 & 陸人瑞訳) . 東京 : 森北出版 .
- 13 . 藪内清編 (1980) . 中国天文学・数学集 . 東京 : 朝日出版社 .
- 14 . 文部省 (1999) . 高等学校学習指導要領解説数学編理数編 . 東京 : 実教出版 .
- 15 . 矢代淳 (2004) . 算木と天元術を用いた実践研究 : 証明のない数学による証明観の変容 . 筑波大学数学教育学研究室 . 中学校・高等学校数学科教育課程開発に関する研究 (11) : 「確かな学力」の育成と道具を用いた数学教育 . pp . 191 - 202 .
- 16 . 山田奈央 (2003) . 「矩」を題材とした創造性の基礎を培う授業について : 中国数学史原典「周髀算經」の解釈を通して . 筑波大学数学教育学研究室 . 中学校・高等学校数学科教育課程開発に関する研究 (10) : 「確かな学力」の育成と歴史文化志向の数学教育 . pp . 41 - 53 .