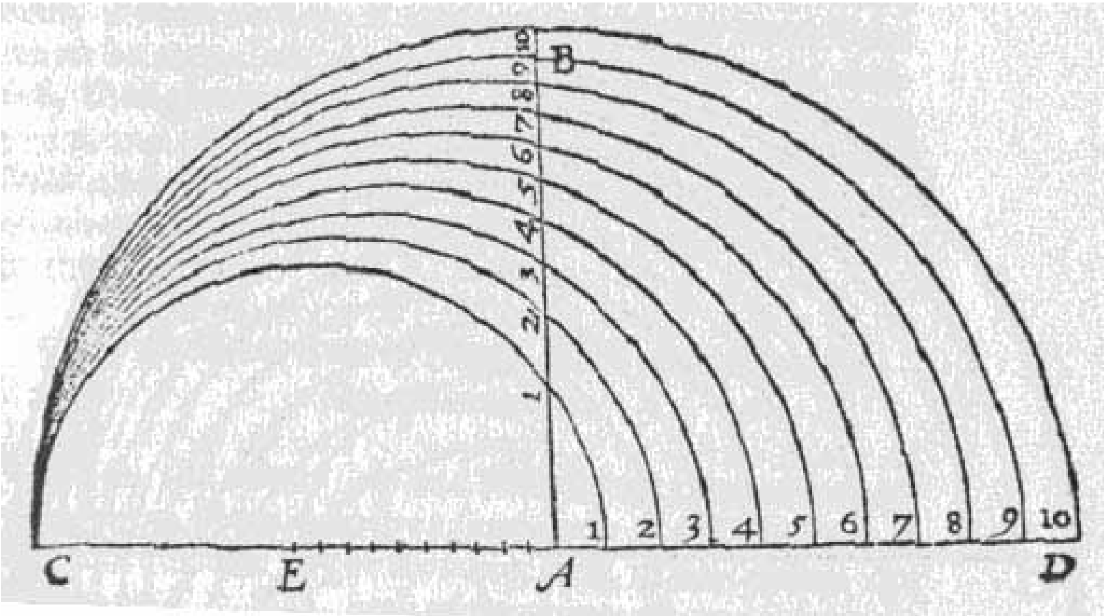
授業資料

〜セクターと比例(2 日目)〜



授業者：堀内　大介
（筑波大学大学院修士課程教育研究科１年）

2 年　　組　　番
氏名：

０．昨日の復習

昨日の授業では

- ・セクターが発明された理由は計算効率を上げるため
- ・line of Line の使用例
- ・セクターの原理は三角形の相似を用いている
- ・line of Superficies の使用例

を学びました。

今日の授業では line of Superficies の目盛りがどのように打たれているのかを証明します。

１．line of Superficies の目盛りはどうやってうたれているのか？

原典では目盛りを次のように打つと説明されている。

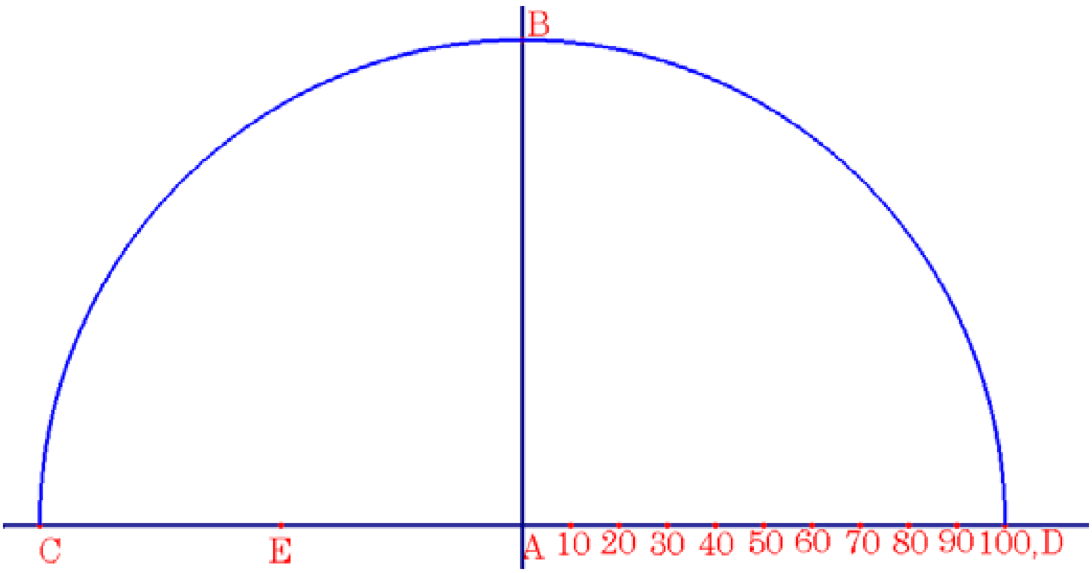
3 *To diuide the lines of* Superficies.

SEeing like *Superficies* doe hold in the proportion of their *homologall* ſides duplicated, by the 29 Pro. 6 lib. *Euclid.* If you ſhall find meane proportionals between the whole ſide, and each hundred part of the like ſide, by the 13 Pro. 6 lib. *Euclid.* all of them cutting the ſame line, that line ſo cut ſhal conteine the diviſions required. wherefore vpon the center *A* and Semidiamiter equall to the line of *Lines*, deſcribe a Semicircle *A C B D*, with *A B* perpendicular to the diameter *C D*. And let the Semidiameter *AD* be divided as the line of *Lines* into an hundred parts, & *A E* the one halfe of *AC* diuided alſo into an hundred parts, ſo ſhall the diuiſions in *A E* be the centers from whence you ſhall deſcribe the Semicircles *C* 10 . *C* 20 . *C* 30. &c diuiding the lin *A B* into an hundred vnequall parts: and this line *A* B ſo diuided ſhall be the line of *Superficies*, and muſt be transferred into the *Sector*. But let the numbers ſet to them be onely 1. 1. 2. 3. vnto 10. as in the example,

(和訳)

line of Superficies の分割

Superficies は Euclid 原論第 6 巻系 29 によって相似な辺の比を保つ。もし第 6 巻系 13 により全体と 100 等分された辺の間の比例中項が見つけられるなら、求める分割が含まれるように線分が分割される。なぜかというと、中心が A で半径が line of Lines と等しいとき、半円 ACBD が直径 CD と AB が直交するようにする。半径 AD は line of Lines のように 100 等分されたとする。AC の半分である AE もまた、次のようにすると 100 等分される。半円 C10、C20、C30…を中心が AE の分割点となるように描くと線分 AB は 100 個の等しくない部分に分割される。この線分 AB の分割は line of Superficies となり、セクターに転送されなければならない。しかし目盛りは 1.　1．2.　3 から 10 までうたれる。
※C10,C20,C30 は点Ｃと点 10(line of Lines の目盛りでは 1 のこと)を結ぶ線分を直径とする半円。



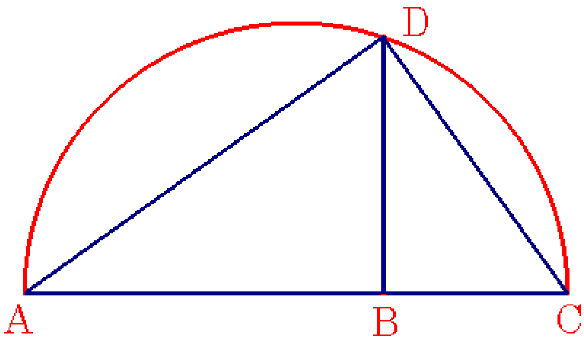
なぜこのような分割の方法で line of Superficies の目盛りがとれるのだろうか？

証明の前に事前課題を振り返ってみよう。

問. 下の図で線分 AC は半円の直径で、点 B が線分 AC 上に与えられている。点 B を通り線分 AC に垂直な直線と円弧との交点を点 D とする。このとき、線分 AB, BC の比例中項は線分 BD であることを証明せよ。

(確認)比例中項とは与えられた 2 線分の長さを a,b とするとき、$a:x=x:b$、つまり $x^2=a\cdot b$ となる x のこと。つまりこの問題では $AB:BD=BD:BC$、つまり $BD^2=AB\cdot BC$ を示せということ。

(証明) 線分 AD, DC をひく。$\angle DAB=\theta$ とおく。



ΔABD と ΔDBC において、

条件から $\angle DBA=\angle CBD=$______…①

三角形の内角の和は 180° だから $\angle BDA=90°-$________…②

$\angle CDA$ は直径に対する________だから $\angle CDA=$______

また $\angle CDB=90°-\angle BDA$…③であるから

③に②を代入すると $\angle CDB=$________

よって $\angle DAB=$__________…④

①、④より(相似条件)______________________________、

$\Delta ABD \backsim \Delta DBC$

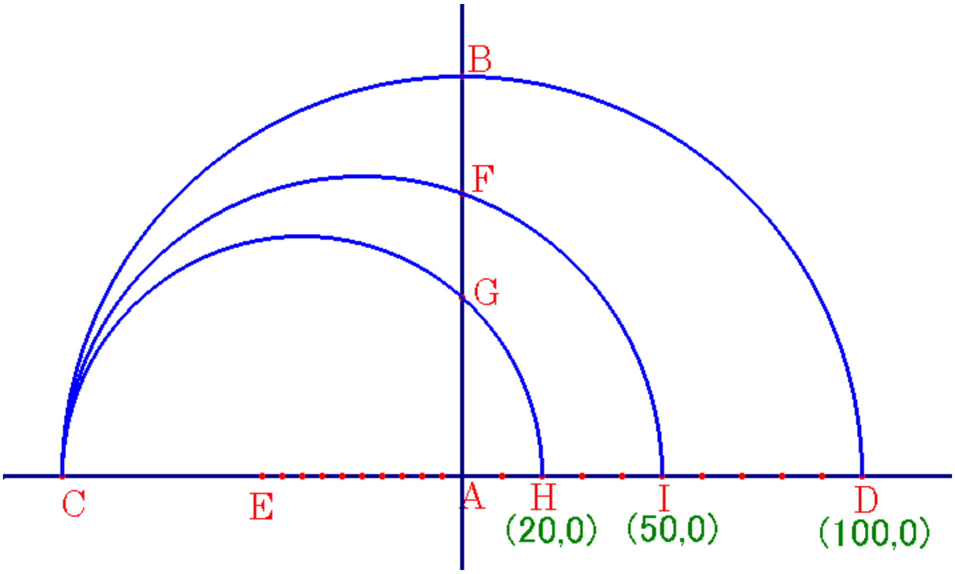
よって $AB:BD=$________:________

________＝________ (証明終わり)

☆平方根の作図が可能になる。

$\boxed{AG : AF = \sqrt{2} : \sqrt{5}\ \text{となることを証明しよう。}}$

(証明)



ΔHCG において辺 AC と辺 AH の比例中項は______となるので

$AC : AG = AG : AH$ より____________

$(AG)^2 = 20AC$ となるから $AG =$__________

同様に ΔICF において辺 AC と辺 AI の比例中項は______となるので

$AC : AF = AF : AI$ より____________

$(AF)^2 = 50AC$ となるから $AF =$__________

つまり

$AG : AF =$_______ : _______

$=$_______ : _______

(証明終わり)

5．line of Solids の使用例

2 *To augment a Solid in a giuen proportion.*
3 *To diminiſh a Solid in a giuen proportion.*

Take the ſide of the Solid giuen, and to it open the *Sector,* in the points of the number giuen: then keeping the Sector at that angle, the parallell diſtance betweene the points of the number required, ſhall giue the like ſide of the Solid required.

If it be a *parallelepipedon,* or ſome irregular Solid, the other like ſides may be found out in the ſame manner, and with them the Solids required, may be made vp with the ſame angles.

Let *A* be the ſide of a cube, to be augmented in the proportion of 2 to 3. Firſt I take the ſide *A,* and put it ouer in the lines of *Solids* in 2 and 2, ſo the parallell betweene 3 and 3, doth giue me the ſide B, on which if I make a cube, it will haue ſuch proportion to the cube of *A,* as 3 to 2.

In like manner, if B were the diameter of a Sphere, to be diminiſhed in the proportion of 3 to 2. I would take out B, and put it ouer in the lines of *Solids,* in 3 and 3, ſo the parallell betweene 2 and 2, would giue me *A*: to which diameter if I ſhould make a Sphere, it would be leſſe then the Sphere, whoſe diameter is B, in ſuch proportion as 2 is leſſe then 3.

Here alſo for variety of worke, may the like caution be obſerued to that which we gaue in the third *Prop.* of *Lines.*

(和訳)

与えられた比で立体を拡大・縮小する

与えられている立体の一辺をコンパスで測り、与えられた数字の点でセクターをその長さだけ広げる。その角度を保ったままにし、求めたい数字の点での長さを測る。それが求めたい立体の一辺である。

(途中省略)

立方体の一辺を A とおき、2：3 の比に拡大する。最初に辺 A をとり、line of Solids の 2-2 で広げる。そして 3-3 の点での平行線分が辺 B であ

り、もし辺Ｂで立方体を作れば、Ａの立方体の比が３：２となる。
　同じ方法で、もしＢが球体の直径であれば、それを３：２の比に縮小させる。辺Ｂを line of Solids 上の 3-3 でセクターを広げ、2-2 の点での平行線分をＡとする。Ａで球体を作れば、Ｂで作った球体との比が２：３となる。

　このことは次の古代ギリシアの３大問題(3 大作図問題)に深く関連しています。

　(1)示された立方体の体積を２倍にするような辺の長さを作図せよ。
　(2)示された角の３等分線を作図せよ。
　(3)示された円と同じ面積の正方形を作図せよ。

　(1)〜(3)に挙げられた問題は実はすべて定木(目盛りのない定規)とコンパスでは作図できないことが証明されています。

　(1)において元の立方体の一辺を a とおくと、その体積は____となる。求める立方体の一辺を b とおくと、その体積は a を使って________という式で表せる。このことから結局は b＝______を作図できればよいが、上に述べたようにこの作図は不可能であることが証明されています。

Line of Solids の目盛はどうやって作られるのか考えてみよう。