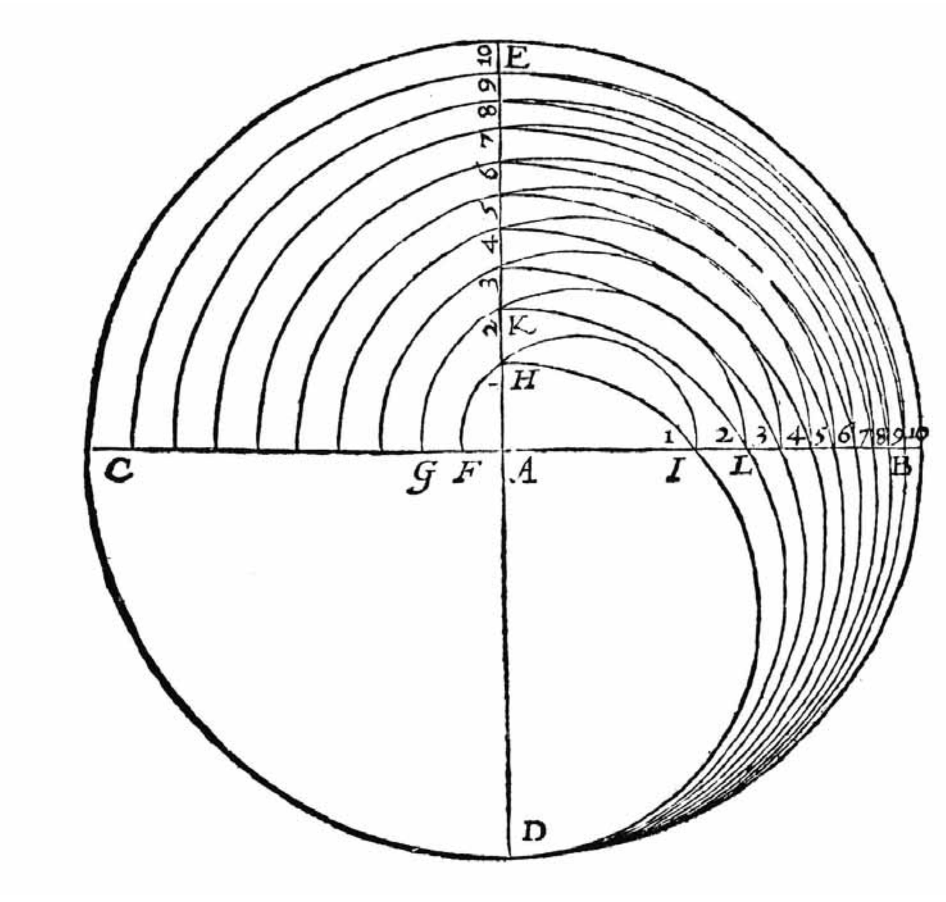
授業資料

～セクターと比例(３日目)～



授業者：堀内　大介
（筑波大学大学院修士課程教育研究科１年）

２年　　組　　番
氏名：

０．前回の復習

昨日の授業では

・line of Superficies の目盛りの仕組み

・比例中項を使った証明

・line of Superficiesの目盛りには__________が関係している

を学びました。

今日の授業では新しい目盛りの line of Solids がどのような問題に利用できるか考えます。

１．line of Solids の使用

今回は line of Solids を使うことでどんな問題を解くことができるか考えてみよう。

線分 A をコンパスでとり、セクターを line of Solids の１－１で広げる。角度を保ち、そして２－２の点での長さをコンパスでとる。その長さを線分 B の長さとする。このとき線分Ａと線分Ｂの長さの関係を考えてみよう。

A

B

このことは次の古代ギリシアの 3 大問題(3 大作図問題)に深く関連しています。

(1)示された立方体の体積を 2 倍にするような辺の長さを作図せよ。
(2)示された角の 3 等分線を作図せよ。
(3)示された円と同じ面積の正方形を作図せよ。

(1)～(3)に挙げられた問題は実はすべて定木(目盛りのない定規)とコンパスでは作図できないことが証明されています。

しかしセクターを使うと(１)の問題は解くことができる。確かめてみよう。

示された立方体の体積を 2 倍にするような辺の長さを作図することができたということは元の立方体の一辺を a とおくと、その体積は a^3 となる。その 2 倍の体積となる立方体の一辺を b とおくとその体積は a を用いると $b^3 = 2a^3$ となる。

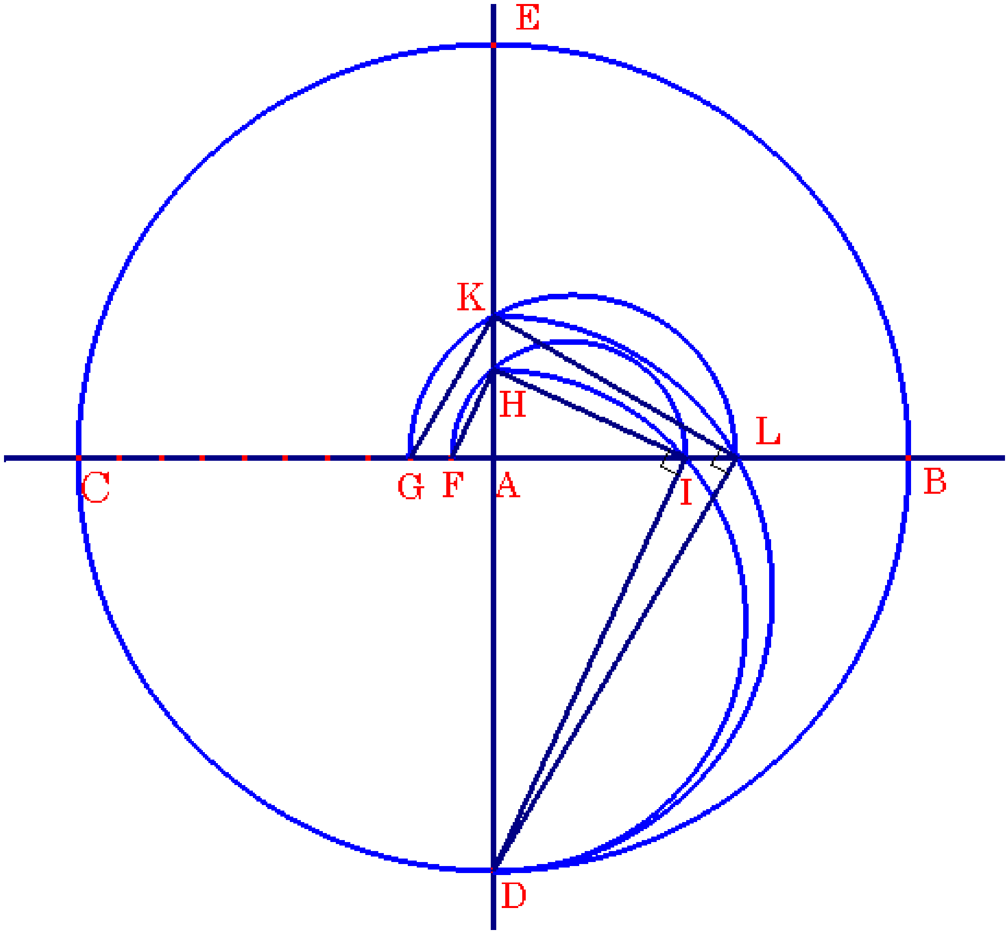
つまり $b = \sqrt[3]{2}a$ を作図していることになる。定木とコンパスでは不可能だと証明された作図が line of Solids を使うことで可能となるのはなぜか考えてみよう。

(ヒント)

line of Superficies の目盛りの謎は比例中項を用いて証明することができました。

$AI:AL=1:\sqrt[3]{2}$ となることを証明しよう。

(証明)



線分ＡＢ上に $\angle DIH=\angle IHF=90°$、$\angle DLK=\angle LKG=90°$ となるような点ＩとＬをうつ。

ΔHFI においてＡＩとＡＦの比例中項はＡＨとなるので

$$AH^2=\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ \cdots ①$$

ΔIHD においてＡＨとＡＤの比例中項はＡＩとなるので

$$AI^2=\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_$$

よって　$AH =$ ＿＿＿＿＿＿＿＿$\cdots$②

②を①に代入すると　$\left(\dfrac{AI^2}{AD}\right)^2 =$ ＿＿＿＿＿＿＿＿＿

$\dfrac{AI^4}{AD^2} = AI \cdot AF$ 、 $AI \neq 0$ より　$AI^3 =$ ＿＿＿＿＿＿＿＿$\cdots$③

ΔKGL においてＡＧとＡＬの比例中項はＡＫとなるので

$AK^2 =$ ＿＿＿＿＿＿＿＿$\cdots$④

ΔLKD においてＡＫとＡＤの比例中項はＡＬとなるので

$AL^2 =$ ＿＿＿＿＿＿＿＿

よって　$AK =$ ＿＿＿＿＿＿＿＿$\cdots$⑤

⑤を④に代入すると　$\left(\dfrac{AL^2}{AD}\right)^2 =$ ＿＿＿＿＿＿＿＿＿

$\dfrac{AL^4}{AD^2} = AG \cdot AL$ 、 $AL \neq 0$ より　$AL^3 =$ ＿＿＿＿＿＿＿＿＿$\cdots$⑥

③と⑥から　$AI^3 : AL^3 = AD^2 \cdot AF : AD^2 \cdot AG$

$=$ ＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿($AD \neq 0$ だから)

今、 $AF : AG =$ ＿＿＿＿＿＿＿＿であるから

$AI^3 : AL^3 =$ ＿＿＿＿＿＿＿＿

ゆえに　$AI : AL =$ ＿＿＿＿＿：＿＿＿＿＿　(証明終わり)

line of solids の目盛りのうちかた

Wherefore vpon the center *A* & Semidiameter equall to the line of *Lines*. deſcribe a circle and diuide it into 4 equall parts *C E B D*, drawing the croſſe diameters *C B*, *E D*. Then diuide the ſemidiameter *A C*, firſt into 10 equall parts, and betweene the whole line *A D* & *A F* the tenth part of *A C*, ſecke out two meane proportionall lines *A I* and *A H*. againe betweene *A D* and *A G* being two tenth parts of *A C*, ſeeke out two meane proportionals *A L* and *A K*, and ſo forward in the reſt. So ſhall the line *A B* be diuided into 10 vnequall parts.

(和訳)

中心がＡで半径が line of Lines と等しい円を描き、四等分する点をCEBD とする。直径 CB、ED が交差するように描く。そこで半径 AC を分割する。最初に 10 等分する。そして線分 AD と AC の１０分の１である AF の間に <u>2 つの比例中項 AI,AH</u> を探し出す。再び AD と AC の１０分の 2 である AG の間に 2 つの比例中項 AL,AK を探し出す。これを続けると、AB は等間隔にない 10 個の部分に分割される。

この和訳と５,６ページでの証明を比較して下線の意味を考えてみよう。

ここで AD,AF,AI,AH の長さの関係は次のような比の関係にある。

<u>　　　　：　　　＝　　　　：　　　＝　　　　：　　　　</u>

結局、立方根は<u>　　　　　　</u>を 2 回使うことで作図が可能になる。
しかし特殊な器具が必要になる。

まとめ

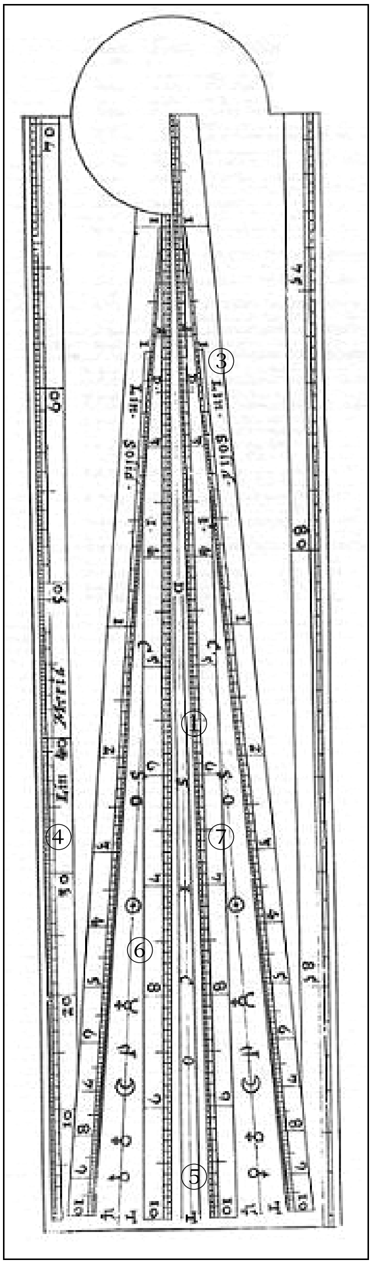
3 回の授業では以下のような流れでセクターという器具が発明された経緯とその使い方、目盛りの持つ数学を学んできました。16 世紀から 17 世紀にかけてこの道具はガリレオ・ガリレイなど様々な人によって発明され、そのうちの一人が授業で取り上げたエドモンド・ガンターです。

セクターに用いられている数学とその歴史を学ぶことを通して、今まで皆さんが持っている数学に対する考え方に何かしらの影響を与えることができたらいいなと思いながら授業を行いました。

以下のページでは、授業で扱うことができなかった line の紹介をしています。セクターにはまだまだ多くの数学が含まれていて、私自身よくわからない点があります。そこには当時の人々がどのような思いでこのような目盛りを刻むことになったのかを知るきっかけになります。皆さんもセクターだけでなく、身の回りにあって何気なく使っている多くの道具に込められた思いや数学に対する考え方を探ってみることもおもしろいと思います。

最後に

3 回の授業では①line of Lines、②line of Superficies、③line of Solids の 3 本を取り上げました。しかし実際、セクターには 12 本の line がひかれています。

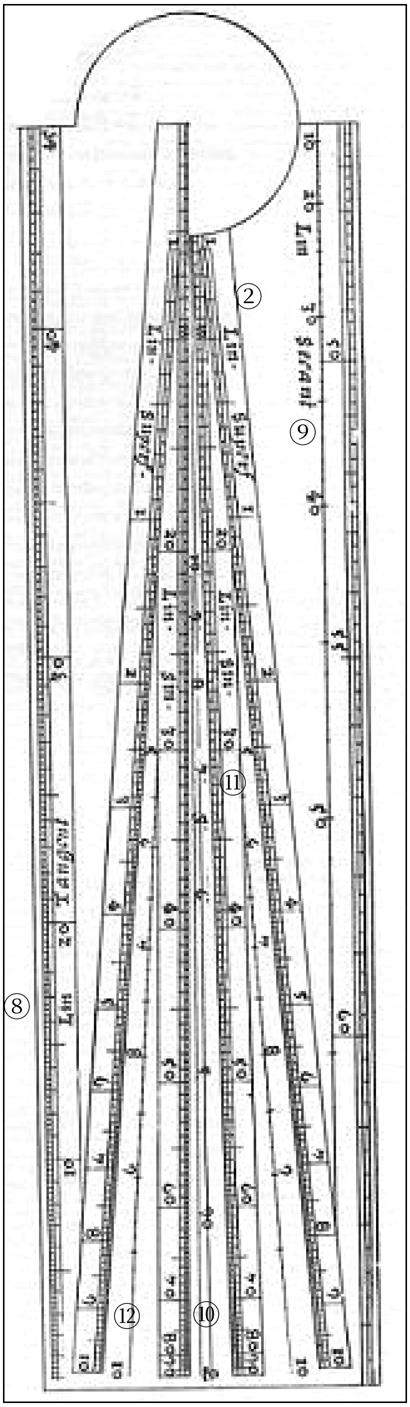


左図において

セクター　の端にある目盛りは④line of Meridian(漸長緯度目盛)と呼ばれ、Edmund Gunter が初めてセクターに刻んだと言われている線です。

セクターの真ん中にある D,S,I,C,O,T という目盛りは⑤line of Inscribed bodies と呼ばれ、Dは 12 面体、Sは球体、Ｉは 20 面体、Cは立方体、Oは八面体、T は四面体を表します。

line of Solids と line of Lines の間には2本のlineがあります。それは⑥line of Mettals と呼ばれ、金属の配合を表していて、黄金、水銀、鉛、銀、銅、鉄、スズといった金属を記号で表しています。また⑦ line of Equated Bodies と呼ばれる線もあり、これは D,I,G,S,O,T の記号で表され、意味は⑤と同じですが、球体の直径が与えられたとき、その球体と等しい正n面体の一辺を求めることができます。



左図において

セクターの端にある目盛りは⑧line of Tangentです。

⑧の隣にある線は⑨line of Secantと呼ばれる線です。

セクターの真ん中にある10,9,8,7,S,6,5,90,Q という目盛りを持った線は⑩ line of Quadratureと呼ばれ、正n角形の一辺の長さを求めることができます。

②line of Superficies の内側にある線は⑪line of Sinと呼ばれる線です。

最後に②と⑪の間にある線は⑫line of Segmentsと呼ばれ、5,6,7,8,9,10 の目盛りがうたれています。円弧を与えられた比で分割することができます。

補足

３回の授業で取り上げたセクターは主に航海術において利用されていました。この補足では航海における使い方を紹介します。

ここでは等間隔(line of Line)、sin、tan、sec、漸長緯度目盛(line of Meridian)の線を使い、針路と航程から緯差と経差を求める方法を述べます。北緯 50°の地を発し、北東微北(NEbN)の針路で進み、航程 6°における緯差を求める。

※用語解説

・line of Sin：sine の値を 100 倍した位置にその角度を刻む。末端は 90°である。

・line of Tangent：定規の長さを 100 とし、tangent の値を 100 倍して目盛りをつける。

・line of Meridians：定規の長さを 1/100 を、赤道の 1°とした時の長さで約 70°まで、左右の定規を一杯に開き、さらに右の定規に続き 86°まである。

・針路：船の進むべき方向をいい、真北から東まわりに 360°まで測る。

・航程：航程線に沿って測った距離をいう。

・航程線：地球面上の２点を結ぶ線が各子午線と常に同一の角度をなす曲線で一種の螺旋となる。すなわちコンパス上一定の方位を保って航海するときの航路の線をいう。

セクターの line of Lines の目盛り上中心から 60 までの長さをコンパスでとり、sin の目盛りの 90 と 90 との間隔としてセクターを開く。NEbN の余角 65°15’を sin 目盛り上にとりＡとＢとするとき、ＡＢの長さを line of Lines の目盛りにあて 50 を得る。すなわち緯差は 5°であると知る。要するに、

sin 針路：１＝緯差：航程

をセクターで作図していることになる。

次に経差を求める。要するに

tan 針路：１＝経差：航程

を作るのである。コンパスでとられた 0〜33°45’の長さを 90 と 90 の間隔とする。コンパスを漸長緯度目盛り(line of Meridian)の 50 と 55 の間の長さに開き、OA とＯＢにあてＡとＢの点を得る。ＡＢの長さを line of Lines の目盛りにあて、5,5°であることを知る。