中学校・高等学校数学科教育課程開発に関する研究(13)
発行：筑波大学数学教育学研究室、pp123-138、2006年3月

『宇宙の神秘』を題材とした空間図形の教材開発

―空間図形を題材にした授業実践に関する一考察―

筑波大学大学院修士課程教育研究科
楊　彬・太田　一茂

章構成

1. はじめに
2. 研究目的・研究方法
3. 『宇宙の神秘』の教材化
4. 教材の数学的解説
5. 『宇宙の神秘』を題材とした授業概要
6. 議論
7. おわりに

要約

本研究では、ケプラーの『宇宙の神秘』という原典の中に取り上げられている空間図形を中心に教材化し、平面図形と空間図形をリンクさせた授業を実践した。これにより生徒が空間図形に対する新しいものの見方・考え方を身に付け、さらに原典解釈によって数学の重要性や必要性を感じ取ることまでできた。

キーワード：空間図形、正多面体、平面図形、解釈学的営み、原典解釈、追体験

1．はじめに

2003 年に実施された OECD「生徒の学習到達度調査」（PISA）の国際結果によると数学的リテラシーの中の「量」、「空間と形」、「変化と関係」、「不確実性」の 4 領域の中でわが国の「空間と形」領域の平均得点は香港についで 2 番目に高く、1 位グループに属しているという結果が得られた。しかし、学習指導要領の改訂では「空間認識」に関する内容は減少傾向にある。空間図形の学習指導への示唆として熊倉（2003）は「空間図形の学習と平面図形の学習とを適切につなげる指導が必要である」と述べている。平成 10 年に改訂された高等学校数学の学習指導要領では中学校から平面図形が移行されているのに対し、空間図形に関する問題は多く取り扱われていない。

そこで、本研究では高等学校における平面図形と空間図形をつなげた指導の一つとして、数学史上の原典を用いて、原典の中に書かれた平面図形の理解を深め、更には空間図形を解釈することをテーマとした授業を提案する。

礒田（2002）は他者の立場を想定し、他者へ共感するとともに他者の考えを鏡に自らの考えを明らかにする数学的活動を「解釈学的営み」という言葉で表現し、提案している。具体的な活動例としては、「実際の歴史上の原典を開き、その原典を記した人の立場や考え方を想定し、その人に心情を重ねて解釈すると、今、自分たちの学ぶ数学が、異なる時代・文化背景に生きた人々によって、まるで異なる時代様式で研究され、表現されていたことが体験できる。」と、歴史上の原典を解釈する活動を挙げ、奨励している。

このことから筆者は歴史上の原典ケプラーの『宇宙の神秘』から中世ヨーロッパの宇宙観を解釈する授業を行う。そして、この原典を書いた人の考え・文化に共感することを通し、自分たちの考え・文化を明らかにする。筆者はこの授業を通して今回の学習指導要領改訂で重点が置かれていることの一つである「文化や社会生活において数学が果たしている役割」を生徒に感じさせることができるだけでなく、空間図形に対する認識を深めることができるのではないかと考え、実践した。

2. 研究目的・研究方法

（１）研究目的

生徒は、自然現象の分析をテーマとした原典を解釈する活動を通して、数学観、特に空間図形に対する見方が変容するかを考察する。

目的達成のため、以下を課題とする。

課題１：生徒は、ケプラーの『宇宙の神秘』という原典を通して空間図形を扱う活動の中で数学の自然科学における数学の重要性・必要性を感じ取ることができるか。

課題２：平面図形から空間図形へと視野が広がっている原典を用いることで空間図形を平面図形と関連づけた見方、考え方ができるようになるか

（２）研究方法

『宇宙の神秘』などを元にオリジナルな教材を作成し、授業を行う。授業テキストとビデオによる授業記録、及び事前・事後アンケートを元に考察する。

3. 『宇宙の神秘』の教材化

今回の授業では、数学史の原典としてヨハネス・ケプラーが 1596 年、25 歳の時に出版した『宇宙の神秘』を取り上げる。その理由は以下の 2 点である。

① この原典では、宇宙空間について平面図形での考察から空間図形での考察へと移行しており、平面図形の学習と空間図形の学習とが結びついている。

② 扱っている空間図形が正多面体で実際に正多面体の外接球と内接球の半径の計算をユーリッド原論を用いて行い、その結果が宇宙の法則（惑星の軌道半径の比）と一致しているのではないかというケプラーの予測とその検証作業を追体験することができる。

ケプラーは自伝の中で太陽を中心とするコペルニクス系を真理であると考えていることを述べている。この系を弁護するためにこの本の中で惑星の太陽からの距離について大きな発見と考えたことを報告した。この発見は私達に、ケプラーの考えの中にピタゴラス学派の伝統がいかに深く根を下ろしていたか、また彼が数学的な規則性と結びついた自然界の規則性をいかに探し求めていたか、ということを示している。コペルニクス系には水星、金星、地球、火星、木星、土星の六つの惑星があった。ケプラーは天文学の講義中に大会合（木星と土星が最も接近する時）の説明をする際に図１を書いた。これは、木星と土星

中学校・高等学校数学科教育課程開発に関する研究(13)
発行：筑波大学数学教育学研究室、pp123-138、2006年3月

の黄経が等しくなるところをプロットし、順番に線で結んだ絵である。この時に彼はこの絵の内側の円と外側の円がほぼ正三角形の内接円と外接円になっていることに注目し、内接円の半径に対する外接円の半径の比の値が２でこれは当時の木星の軌道半径に対する土星の軌道半径の比の値にほぼ近かったので、正多角形の内接円の半径に対する外接円の半径の比の値が惑星の軌道半径の比の値と一致しているのではないかと考えた。

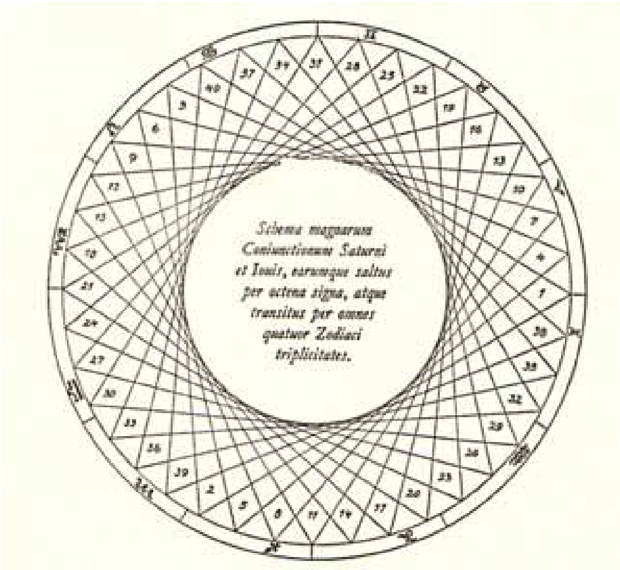


図１

　ここで、平面図形の基本的な性質、特に高等学校の数学Ａで学習する三角形の性質を見ることができるのではないだろうかと考えた。

　しかし、無数にある正多角形について六つという有限個しかない惑星の軌道半径の関係を表すのには無理があった。結局、この考えは失敗に終わったのであるが、ケプラーは幾何学的な方向で思案を巡らせた。そして、宇宙の軌道は 2 次元のモデル内で考えるよりも 3 次元のモデルを使う方が自然であると気がついた。無限個にある正多角形に対して正多面体は五つしかなく、六つの惑星の間の空間の数と一致している。まず、正多面体を第一次立体（立方体、正四面体、正十二面体）と第二次立体（正八面体、正二十面体）の二種類に分類し、地球の軌道を境界にして第一次立体を外側に、第二次立体を内側に並べた。このようにしてできたモデルが図２の模型のようなものとなった。この模型の序列は表１の通りである。そして、このモデルが実際の惑星軌道の半径比と一致しているかを検証した。この検証の際に各正多面体の外接球と内接球の半径をユークリッド原論を用いて求めている。ここで、生徒は中学校で学習した正多面体についてその外接球や内接球の半径を求めることを通じて各正多面体の性質をつかむことができると考える。

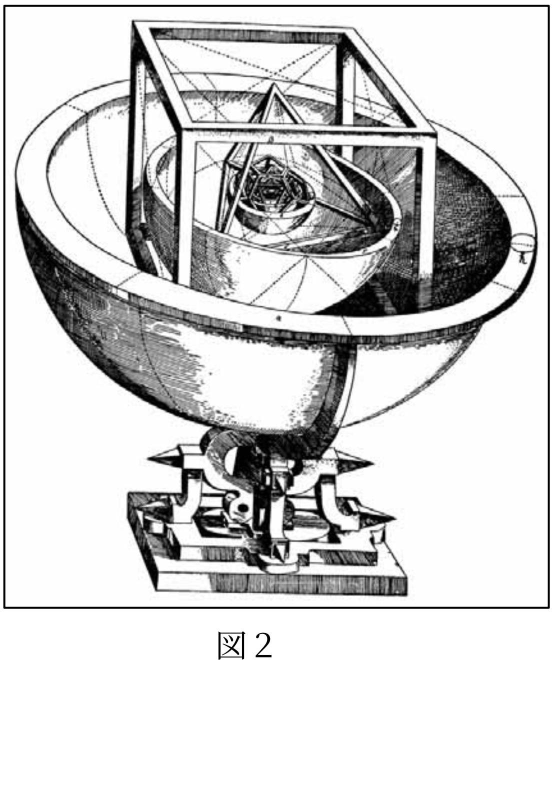


図２

<table>
<tr><td>土星の球面</td><td rowspan="2">立方体</td><td rowspan="6">第一次立体</td></tr>
<tr><td rowspan="2">木星の球面</td></tr>
<tr><td rowspan="2">正四面体</td></tr>
<tr><td rowspan="2">火星の球面</td></tr>
<tr><td rowspan="2">正十二面体</td></tr>
<tr><td rowspan="2">地球の球面</td></tr>
<tr><td rowspan="2">正二十面体</td><td rowspan="4">第二次立体</td></tr>
<tr><td rowspan="2">金星の球面</td></tr>
<tr><td rowspan="2">正八面体</td></tr>
<tr><td>水星の球面</td></tr>
</table>

表１：惑星の軌道と正多面体の関係

この惑星モデルを考えたのは数学的な原理を見出し、創造者（神）が宇宙を構成した際の計画を見極めたかったからである。しかし、このモデルが幻想であり、誤っていることは、ケプラーの死後、天王星と海王星という新しい惑星の発見によって明らかになった。結果的に失敗に終わったのであるが、この研究の後にケプラーは天文学においてケプラーの三大法則と呼ばれる有名な法則を発見し、数学においては多面体の諸性質を発見した。オーウェン・ギンガリッチはこの研究を「歴史の中で、これほど間違った書物がこれほどまでに未来の科学躍進を方向づけたのは、稀なことである」と述べている。

このように『宇宙の神秘』を教材として取り上げることにより、ケプラーの大発見に至るまでの「苦労」の追体験ができると考える。

また、授業の際に補助教材として様々な模型と Cabri3D を利用して視覚的に理解できるようにした。

4. 『宇宙の神秘』の数学的解説

まず、正多面体が５つしかない理由について述べ、各正多面体の外接球と内接球の半径を求めるために各正多面体の稜と直径の関係をユークリッド原論を用いて求めている。

（１）正多面体が５つしかない理由について

まず、正多面体の定義について原典では「形と大きさの等しい①稜、②面、③角だけをもたなければならない」と述べている。

その上でいくつの同一正多角形で立体角を作れるかについて述べている。つまり、一つの頂点に正 n 角形を m 枚集めたとすると、頂点に集まる多角形の内角の和は 360°よりも小さくなければならない。これを数式で表すと以下のようになる。

正 n 角形の内角は $\frac{2(n-2)}{n}\times 90^\circ$ であるので、

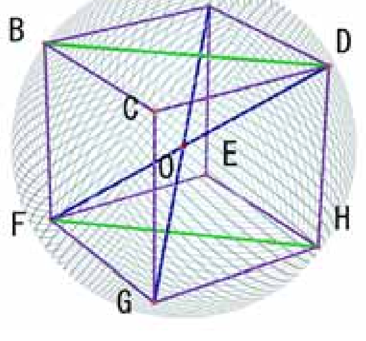
$\frac{2m(n-2)}{n}\times 90^\circ < 360^\circ$（ただし、$m \geq 3$ である。$m \leq 2$ では立体角は構成されない。）となる。これから $(n-2)(m-2) < 4$ が得られる。

この不等式を満たすの n,m の組み合わせは $(n,m) = (3,3),(3,4),(3,5),(4,3),(5,3)$ の５つしかない。

これは順に正四面体、正八面体、正二十面体、正六面体（立方体）、正十二面体を表している。

（２）各正多面体の外接球の半径について

①立方体



ユークリッド原論　第１３巻　命題１５

立方体をつくり，与えられた球によってかこみ，そして球の直径上の正方形が立方体の辺の上の正方形の３倍である。

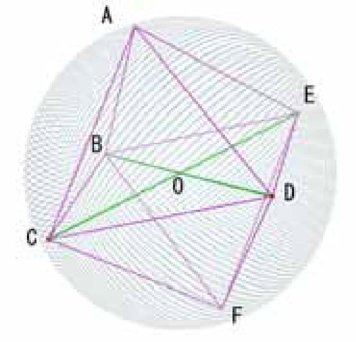
〈説明〉

四角形 BFHD に注目する。

$FH^2 = 2FG^2$ より $FD^2 = 3FG^2$

中学校･高等学校数学科教育課程開発に関する研究(13)
発行：筑波大学数学教育学研究室、pp123-138、2006年3月

②正八面体



ユークリッド原論　第１３巻　命題１４

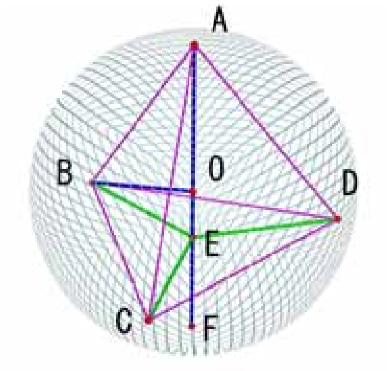
正八面体をつくり，与えられた球によってかこみ，そして球の直径上の正方形が正八面体の辺の上の正方形の２倍である。

〈説明〉

四角形 BCDE に注目すると

$BD^2 = 2BC^2$

③正四面体

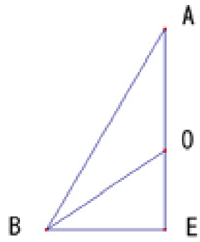


ユークリッド原論　第１３巻　命題１３

角錐をつくり，与えられた球によってかこみ，そして球の直径上の正方形が角錐の辺の上の正方形の２分の３である。

〈説明〉

三角形 ABE に注目する。（右図参照）

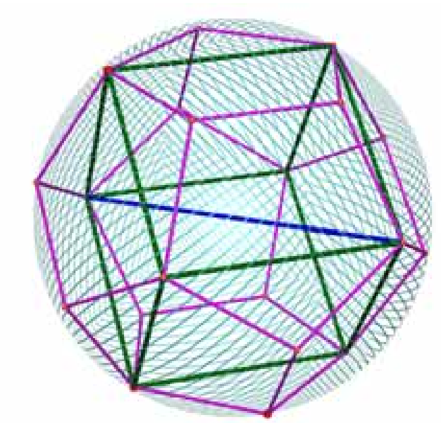


点 E は三角形 BCD の重心なので、

$BE = \dfrac{\sqrt{3}}{3}AB$ となり、 $AE = \sqrt{\dfrac{2}{3}}AB$ となる。ここで、 $OA = OB = x$ とおき、三角形 OBE に注目する。すると、三平方の定理より $OB^2 = OE^2 + BE^2$ が成り立つので、

$x^2 = \left(\sqrt{\dfrac{2}{3}}AB - x\right)^2 + \left(\dfrac{\sqrt{3}}{3}AB\right)^2$ となり、$x = \dfrac{\sqrt{6}}{4}AB$ となる。よって、$AF^2 = \dfrac{3}{2}AB^2$ となる。

④正十二面体



ユークリッド原論　第１３巻 命題17　系

立方体の辺が外中比に分けられるならば、その外中比に分けられるならば、その大きい部分は正十二面体の辺である。

※外中比･･･黄金分割のこと

〈説明〉

正十二面体の中には左図のように立方体が入っている。この立方体の一辺の長さは正十二面体の正五角形の対角線の長さと一致している。

つまり、図 3 の BE の長さが正十二面体に内接する立方体の一辺の長さになる。

$AB : BE = 1 : \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$（三角形 AFB と三角形 EAB の相似を利用して求められる。）が成り立つ。

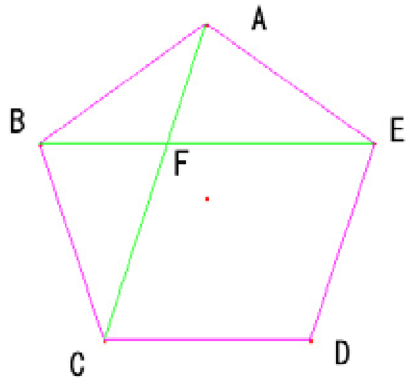
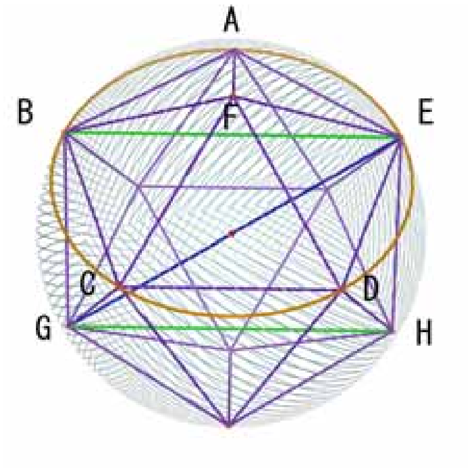


図３

よって、線分 AB の長さは線分 BE の長さを黄金分割した時の大きい部分の長さにあたることが分かる。
さらに、この立方体の対角線の長さは正十二面体の外接球の直径にあたっているので、稜の長さが分かれば、正十二面体の外接球の半径も分かる。

⑤正二十面体

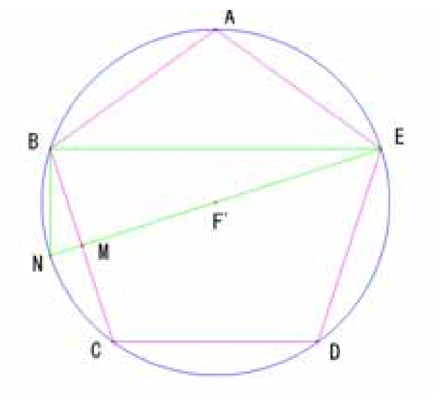


ユークリッド原論　第１３巻　命題１６の系（要約）

　正二十面体を上から見たときの正五角形の外接円の半径の 2 乗が正二十面体の外接球の直径の 2 乗の 5 分の 1 に等しい。

ユークリッド原論　第１３巻　命題１０　（要約）

　正五角形が円に内接しているとき、この正五角形の辺の 2 乗は同じ円に内接する正六角形の辺と正十角形の辺の 2 乗の和に等しい。



〈説明〉

この二つを使えば正二十面体の外接球の直径と稜の長さの関係が導かれる。

　まず、ユークリッド原論第１３巻命題１６の系について説明する。正十二面体の説明のところでもあるように、$BE = \frac{1+\sqrt{5}}{2}AB$、$BM = \frac{1}{2}AB$ より $EM = \frac{\sqrt{5+2\sqrt{5}}}{2}AB$ が得られる。

　三角形 EBM と三角形 ENB の相似を利用すると

$BE : NE = EM : EB \Leftrightarrow \frac{1+\sqrt{5}}{2}AB : NE = \frac{\sqrt{5+2\sqrt{5}}}{2}AB : \frac{1+\sqrt{5}}{2}AB \Leftrightarrow NE = \sqrt{\frac{10+2\sqrt{5}}{5}}AB$ となる。

よって、正五角形 ABCDE の半径 EF ’ は $EF' = \frac{1}{2}NE = \sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{10}}AB$ となる。一方、正二十面体の直径である EG の長さは長方形 BGHE に注目することによってできる。$BG = AB$ で $BE = \frac{1+\sqrt{5}}{2}AB$ となる。よって、$GE = \sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{2}}AB$ となる。以上より $GE^2 = 5AF'^2$ が成り立

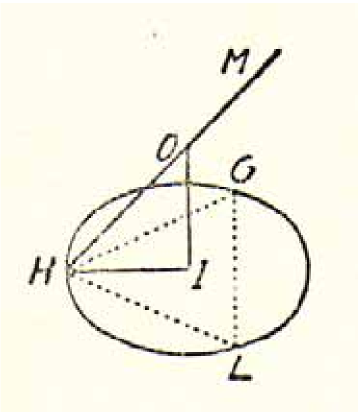
つことが示せた。

次にユークリッド原論第１３巻命題１０について説明する。この命題で述べている正六角形の一辺の長さは EF ' に相当する。また、正十角形の一辺の長さはユークリッド原論の第１３巻の５および９より EF ' を黄金分割した時の大きい部分の長さである。

つまり、(正十角形の一辺の長さ)$=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}EF'=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\times\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{10}}AB$ となっている。これより $(\text{正十角形の一辺の長さ})^2+(\text{正六角形の一辺の長さ})^2=AB^2$ が導かれる。

（３）各正多面体の内接球の半径について

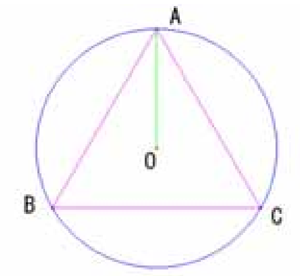
カンパヌス版のユークリッド原論の第１５巻の最後の命題では、「立体図形の中心と基底面の中心を結ぶ直線は内接球の半径である」とある。



左図の場合、OI が内接球の半径にあたるが、三角形 OHI に注目して、三平方の定理を使えば直ちに求められる。OH の長さは正多面体の外接球の半径と一致し、HI の長さは基底面の外接円の半径と一致している。外接球の半径についてはもうすでに求めているのであとは、基底面の外接円の半径を求めれば良い。

５つの正多面体の基底面の形は正三角形、正方形、正五角形の３種類しかない。基本的には正弦定理を用いることによって求まる。正五角形の場合は

・正三角形の場合

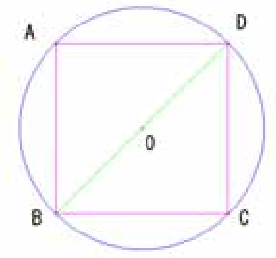


三角形 ABC に正弦定理を用いると

$$\frac{BC}{\sin 60^\circ}=2AO$$

となる。

・正方形の場合



$BD=\sqrt{2}AB$

となっている。

・正五角形の場合

正五角形の外接円の半径については正二十面体の外接球の半径を求めるときにもうすでに求めている。正五角形の一辺の長さを a とおくと $\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{10}}a$ となる。

5. 「宇宙の神秘」を題材とした授業概要

（１）授業環境

日時：平成１７年１０月２５日、２６日、２７日、２８日（６５分×３回）

対象：埼玉県県立高等学校　第２学年（２クラス計）
準備：コンピュータ（Windouws）、作図ツール（Cabri 3D、Cabri GeometryⅡ）、Microsoft PowerPoint、プロジェクタ、実物投影機、授業記録用ビデオカメラ、ケプラーの宇宙模型、正多面体の模型、事前・事後アンケート、授業テキスト、授業ワークシート

（２）授業展開
＜１時間目＞
【目標】ケプラーが各惑星軌道の半径比と正多面体の内接球と外接球の半径比がいっちしているのではないかと考えるところまでの過程をたどる。また、正多面体が５つしかない理由を考察する。
【授業の流れ】
①導入（『宇宙の神秘』の紹介）
　まず、これから扱う原典『宇宙の神秘』の読者への序を引用し、ケプラーが『宇宙の神秘』で何を示したかったかを説明した。また、この原典が出版された当時の宇宙観として、ケプラーが強く支持していたコペルニクス系についての説明をした。この時は水星、金星、地球、木星、土星の六つしか知られていなかったことを強調した。
②惑星の軌道と正多角形の関係について
　ケプラーが惑星の軌道半径と正多角形の関係について知るきっかけとなった図１を見せ、実際に正三角形の内接円の半径と外接円の半径の比を生徒に求めてもらった。
以下の６枚の写真は実際に黒板で解いているときの様子である。

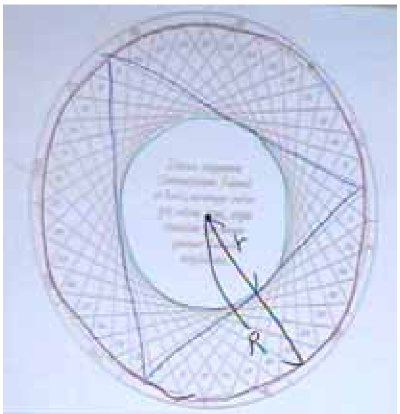
写真１


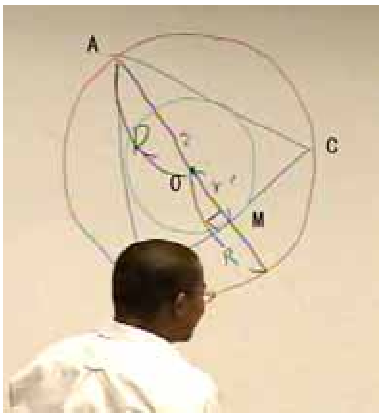
写真３


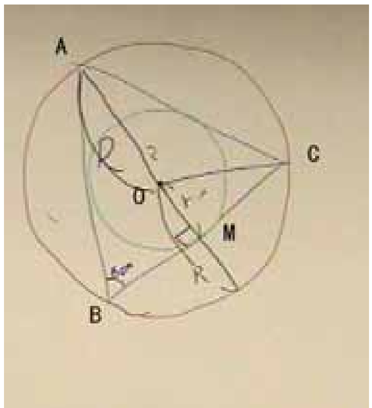
写真５


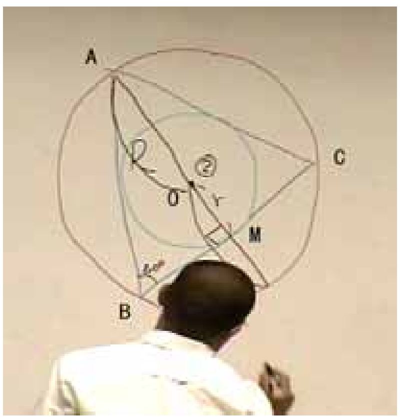
写真２


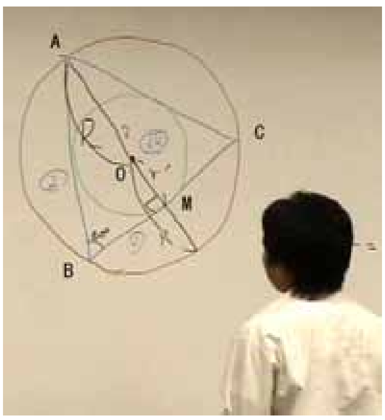
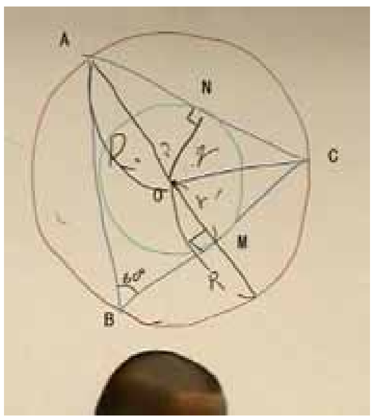
写真４


写真６


まず、授業者が図１の上に正三角形の内接円と外接円を写真１のように書いた。その図の上で生徒１に解いてもらった。写真２で三角形 ABM に注目し、BM：AM＝1:2 と書いたが、複数の生徒から「えー」という声があがり、「R がとにかく２」と発言した後、写真３のように AO：OM＝2:1 と書き直した。この時点でなぜそうなるかという問いかけをしても「塾で習ったような気がする」という答えにとどまり、数学的な解説が得られなかった。そこで、生徒２に説明を求めた。生徒２はまず、「さっきので方向性は合っているのですか」と授業者に確認した上で生徒１が最初に注目した三角形 ABM の各辺の比について説明した。（写真４）この行動は生徒１の考えの間違いを修正し、発展させせようとしていると見られる。しかし、生徒１が書いた AO：OM＝2:1 の説明がうまくつかないために線分 CO を書き加えるのにとどまった。（写真５）この図を見た生徒１がひらめき写真６のように線分 ON を書き加え、三角形 AON に注目し、∠AON が 60°であることから ON：OA＝1:2 を導いた。

この一連の活動から最初から生徒は正三角形の外接円と内接円の中心が重心であることに気づいていたが、その説明ができなかったために$1:2:\sqrt{3}$の直角三角形に注目して求めたことが分かる。しかも、複数の生徒の考えの融合によって求められたことは非常に大きな意味をもっている。

③ケプラーの考えた宇宙構造のモデルの解説

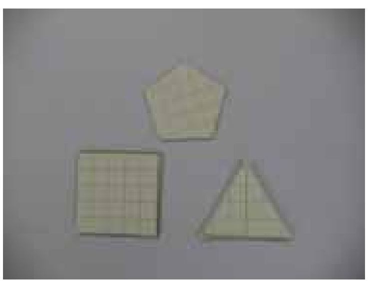
②で見たように正多角形では有限個の惑星間の関係を説明するのが困難であったので、ケプラーは 3 次元で宇宙構造を表そうと考えたことを説明した。そして、図 2 に基づいて作成した模型を見ながら正多面体がどのような順序で入っているかを確認した。

写真７（宇宙模型の概観）

写真８（分解して模型の構造を見ている様子）

④正多面体が５つしかない理由

写真９



③で正多面体が原典ではユークリッド原論を用いて正多面体が５つしかない理由を述べているので、その日本語訳を穴埋め形式にして、写真９のような厚紙で作られた正三角形（６枚）、正方形（４枚）、正五角形（３枚）を使って実際に立体角を作る活動をしながら答えてもらった。ここで、立体角が作れる場合に限らず、作れない場合についても考えている。

写真１０

写真１１

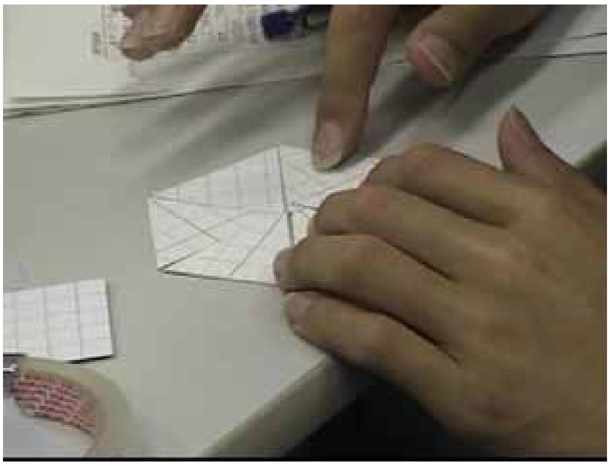


写真１２

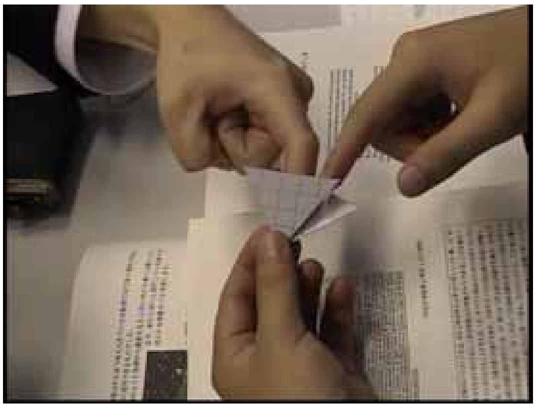


写真１０：実際に立体角を作っている様子。
写真１１：正三角形を６枚並べ、立体角が作れない場合を作っている様子。
写真１２：複数生徒が立体角を指さしている様子。

＜２時間目＞

【目標】宇宙模型が実際の惑星の軌道半径を表しているかどうかを検証するために各正多面体の稜と外接球の半径の関係をユークリッド原論の日本語訳を参考に求める。

【授業の流れ】

①立方体、正八面体の外接球の半径を求める。

写真１３

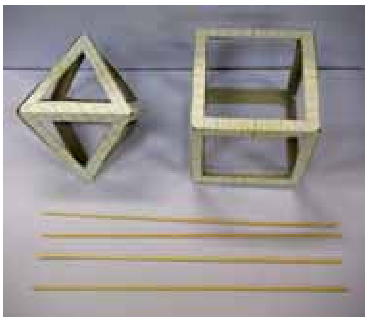


写真１４

ユークリッド原論の日本語訳を解釈してからそれが正しいかどうかを現在の方法で調べた。理解の一助として生徒２人に１組写真１３のような模型を用意した。立方体についてはほとんどの生徒が模型を使わずにテキストの見取り図だけを用いて考えていた。このことから立方体が生徒にとって構造が単純で今までの教育課程で最も理解しやすいものとなっていることを示している。正八面体になると半数以上の生徒が模型を使いながらテキストの見取り図に対角線を描いていた。さらに模型を見ながら写真のようにすべての対角線を描いた生徒と一本だけ対角線を描いた生徒とでは解答の仕方が異なっていた。対角線すべての対角線を描いた生徒は写真のように多くの線の長さを図に書き込んで求めているのに対し、後

中学校・高等学校数学科教育課程開発に関する研究(13)
発行：筑波大学数学教育学研究室、pp123-138、2006年3月

者はすぐに結果を導いている。

②正四面体の外接球

立方体と正四面体の外接球の半径を求めた時と同様にしてまずユークリッド原論の日本語訳を解釈してからそれが正しいかどうかを現在の方法で調べた。また、補助教材として写真のような模型を用意した。この模型は外接球の中心がどこにあるかを明確にしており、位置関係がはっきり見えるようになっている。ここでは立方体や正八面体とは違い、様々な方法で導いていることが分かった。まず、ほとんどの生徒が正四面体の頂点から向かい合う面へ垂直に下ろした垂線の足は底面の重心となっていることに気づき、断面図で考えるところまではできている。この時に模型を使って生徒同士が議論している姿が見られた（写真１６）。

写真１５

写真 16

写真１７（生徒の解答）

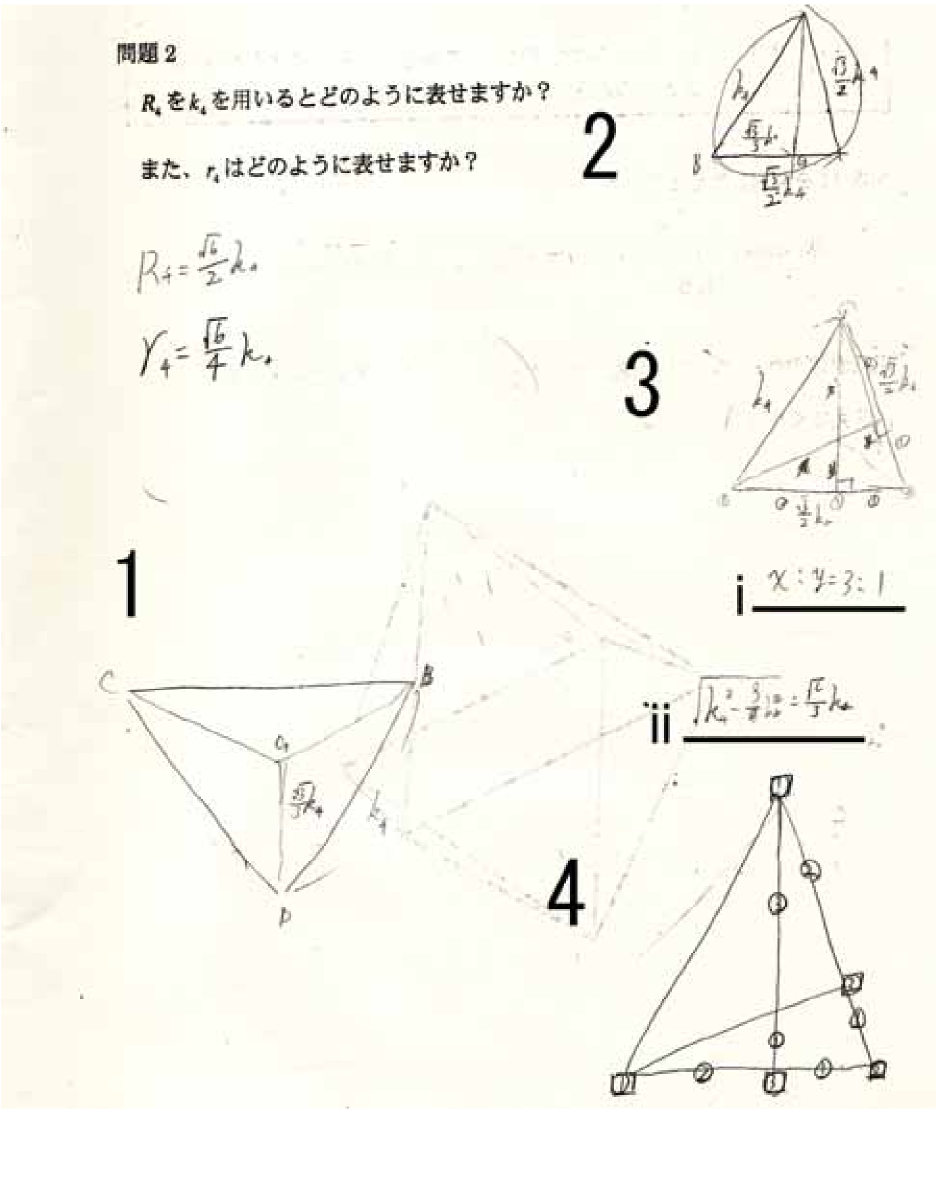
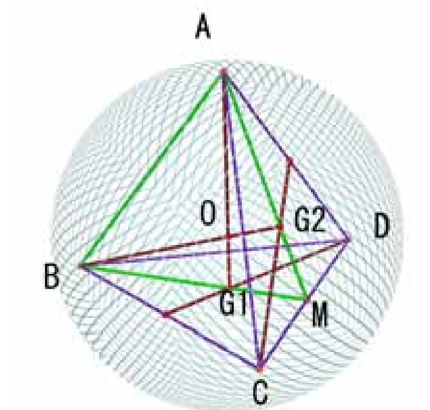


図４



しかし、そこから先は様々な方向性で解いていた。大きく二通りに分けられる。一つ目は原典の数学的解説にある方法で、もう一つの方法は図４のAO：OG1を求めてから導く方法である。写真１７の生徒の解答を見ながら後者の方法について見ていく。

この生徒は１でのＧ１が三角形 BCD の重心であることを示している。次に２で三角形ABM に注目し、AB の長さと各

辺との関係を示している。（ただし、問題では $AB=k_4$、外接円の直径を R_4、外接円の半径を r_4 とする）さらに３では２で書いた図形に線分 BG２を付け加え、AO：OG1 を求めようとしている。その際に、４でメネラウスの定理を適用して求めている。（ｉにはその結果が書いている。）ⅱで AG1 の長さを求めてから外接球の半径を求めている。このような導き方の生徒はこの生徒の他に何人かいた。これよりこの活動を通じて高等学校１年の平面図形で習った内容を使って、新たな問題解決を行っている様子がわかる。

③正十二面体と正二十面体の外接球の半径を求める

これは、授業時間内では取り扱えなかったので、ユークリッド原論の簡単な解説をテキストに掲載しておくにとどめた。

＜３時間目＞

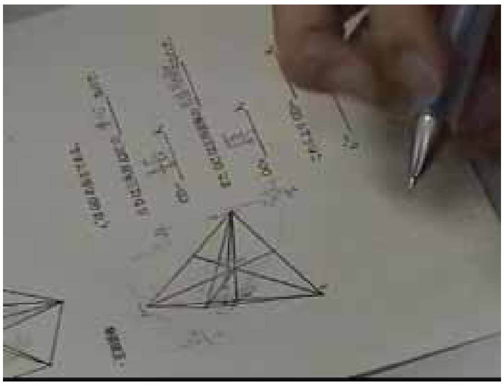
【目標】２時間目に引き続き、正多面体の稜と内接球の半径の関係をユークリッド原論の日本語訳を参考にして求める。そして、宇宙模型と現在の惑星の軌道半径の比の値とのずれを検証する。

【授業の流れ】

①各正多面体の内接球の半径を求める。

2 時間目で扱った立方体、正八面体、正四面体の内接球の半径を求めた。2 時間目ですでに 3 つの正多面体について扱っているだけでなく、誘導形式にしたのでどの生徒も取り組みやすかったようである。（写真１８）

写真１８



②宇宙模型と実際の惑星の軌道半径の比の値を比較、検証する。

写真１９のワークシートを使って立方体、正四面体、正八面体の外接球と内接球の半径の比の値を生徒に出してもらい、これを実際の惑星軌道半径の比の値（表１）と比較する。

隣り合う惑星同士の軌道半径比の値と外接球と内接球の半径比を見比べて、近い値を探していた。ここで

写真１９（ワークシート）

正多面体	外接球の半径	内接球の半径	外接球と内接球の半径の比 →	小数値で表示	隣り合う惑星の軌道半径の比
立方体	$r_6=\frac{\sqrt{3}}{2}k_6$	$r_6'=\frac{1}{2}k_6$	$\frac{r_6}{r_6'}=$ →		$\frac{\text{の軌道半径}}{\text{の軌道半径}}$
正四面体	$r_4=\frac{\sqrt{6}}{4}k_4$	$r_4'=\frac{\sqrt{6}}{12}k_4$	$\frac{r_4}{r_4'}=$ →		$\frac{\text{の軌道半径}}{\text{の軌道半径}}$
正八面体	$r_8=\frac{\sqrt{2}}{2}k_8$	$r_8'=\frac{\sqrt{6}}{6}k_8$	$\frac{r_8}{r_8'}=$ →		$\frac{\text{の軌道半径}}{\text{の軌道半径}}$
正十二面体	$r_{12}=\frac{\sqrt{15}+\sqrt{3}}{4}k_{12}$	$r_{12}'=\frac{\sqrt{10(25+11\sqrt{5})}}{20}$	$\frac{r_{12}}{r_{12}'}$ →	1.25841	$\frac{\text{の軌道半径}}{\text{の軌道半径}}$
正二十面体	$r_{20}=\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}k_{20}$	$r_{20}'=\frac{\sqrt{6(7+3\sqrt{5})}}{12}k_{20}$	$\frac{r_{20}}{r_{20}'}$ →	1.25841	$\frac{\text{の軌道半径}}{\text{の軌道半径}}$

表１

土星の軌道半径 ÷ 木星の軌道半径	1.8334
木星の軌道半径 ÷ 火星の軌道半径	3.4146
火星の軌道半径 ÷ 地球の軌道半径	1.5237
地球の軌道半径 ÷ 金星の軌道半径	1.3825
金星の軌道半径 ÷ 水星の軌道半径	1.8625

様々な意見が出た。「実際の値と全然違う」、「もっと近似なのかと思ったがそ

うでもなかった」などという違和感がある意見が多かった。この体験はケプラーの苦労体験の追体験と言える。

③まとめ

生徒達が②で得た体験をケプラーが何年間もかけて、結果的に現在有名となっているケプラーの 3 大法則の発見に至ったことを紹介した。そして、科学はこのような失敗から立派な法則などが導かれることもあることを伝えた。

6.議論

事前・事後アンケート、ワークシートの結果から考察していく

課題１：生徒は、ケプラーの『宇宙の神秘』という原典を通して空間図形を扱う活動の中で自然科学における数学の重要性・必要性を感じ取ることができるかを考察する。

事後アンケートの「数学は自然科学の中で重要な役割をなしていると思いますか？」について以下生徒の回答を一部抜粋。

① 自然や宇宙の中にも距離の比などの数値が隠れていてその数値を考える上で数学は重要であると思う。
② 今回の「宇宙の神秘」のように他にも数学的比率のものがあるかもしれない（黄金比など）･･･よってある。
③ 今回の授業のように数学的な考え方を用いて､自然の法則を見つけることは必要なことだと思う。だから自然科学において数学はなくてはならないものだと思う。
④ はい。昔から現在に至るまでの様々な科学者が数学を用いることで、今ある数々の常識的なことを発見し、今、僕たちがそれを学んでいるから。
⑤ 宇宙内での法則や物事の計測をする点で重要な役割をなしていると思う。
⑥ 惑星どうしの関係を数学を使って調べようとして、結果的に間違っていたとしても比などで表せた点を考えると、数学は重要な役割をなしていると思う。
⑦ 自然という予測不能・統御不能とされるものに希望の光を与えている。

①、②ではケプラーの中に深く根ざしていたプラトン＝ピタゴラスの伝統を感じ取り、現在有名な比として知られている黄金比と結びつけて、比が重要な役割をなしているという具体的な範囲で数学的な重要性を見つけている。③、④、⑤はさらに範囲を広げて自然法則と数学の関わりから数学の重要性を見つけている。⑥はケプラーの予想は間違っていたが、この予想の検証で正多面体の外接球と内接球の半径比を求めたことに数学の必要性を感じることによって得られた回答である。

以上の結果から今回の授業において自然科学における数学の重要性や必要性が見つかったと考えられ、課題１は達成したと言える。

課題２：平面図形から空間図形へと視野が広がっている原典を用いることで空間図形を平

面図形と関連づけた見方、考え方ができるようになるか

まず、事前アンケートで「空間図形の問題を解く時に工夫していることはありますか？」という問いに対して生徒（81 人）の回答は大きく分けて次の 3 つに分けることができる。

（ｉ）図を書く（26 人）

（ⅱ）頭の中で図形を想像する（21 人）

（ⅲ）ある視点から見た平面図形に直して解く（16 人）

その他は無回答や「なし」と答えている。

（ⅲ）にあたる空間図形を平面図形で考えている生徒は約 20%しかおらず、（ｉ）で言っている図を平面図形と解釈したとしても全体の約半数しかいない。一方、（ⅱ）のように平面図形と関連づけられていない回答が全体の約 26%もいる。

しかし、実際の授業ではすべての生徒がそこで見た図をテキストに書かれた見取り図に書き込んでいく作業をしているのを確認できた。今回の授業では立体的な模型や Cabri3D（空間図形）などを見ながらテキストにある平面上の見取り図に書き込んだ図形（平面図形）で考える場を提供できた。これより今回の教材では頭の中でだけで図形を想像して考えている生徒も含めてすべての生徒に図を書く機会を与え、更には空間図形を平面図形で考える機会を与えたと考えられる。

また、事後アンケートで「この 3 日間の授業を通して空間図形の捉え方は変わりましたか？また、問題を解くときの視点が増えましたか？」という問いに対して生徒（80 人）のうちの約 76%である 61 人が肯定的な回答をした。

肯定的な回答をした理由については以下の通りである。

① 三平方、特別な比の値やメネラウスの定理などが使えて良かった。

② 重心など昔はよく授業でやったが、日常生活から程遠い、そしてとても重要な知識を再確認できたのでとても良かった。

③ 内心で考えたり、外心で考えたり様々な視点から眺めようと思いました。

④ 今まで通り空間図形を平面で捉えようとしたが、切り口が多かったので様々な視点で見れたと思う。

⑤ 空間図形を使えば、平面図形では証明できないことも証明できるかもしれない。

①～④は平面図形の諸性質を再確認できたということであるが、筆者の質問には空間図形という言葉しか入っていなく、授業で空間図形を取り扱う中で平面図形の諸性質を多用した結果として表れていると考えられる。⑤はもともと空間を平面で考えることはできていたが空間を平面で捉える際の見方の変化を体験できた。これより、様々な視点で空間を平面で見ることにより頭の中で空間のイメージが作られたと考えられる。⑥は空間図形を平面図形を介して見る作業を通じて、空間図形が平面図形を介さずに眺められるものではないだろうかという考えにまで至っている。

以上より空間図形を捉えるときに様々な平面図形の基本性質を用いて、新たな見方や考え方ができるようになっており、課題２は達成された。

7.おわりに

本研究では、ケプラーの『宇宙の神秘』を題材とした授業により、数学の自然科学における重要性、必要性を感じ取ることができるか、空間図形の平面図形と関連づけた見方、考え方ができるようになるかを考察した。

礒田（1994）は「生徒自身に、空間を平面で考える場、条件推論を深める場を与えれば、生徒の空間を平面で考える力は、向上すると予想できる。」と述べている。

本研究では原典の平面図形から空間図形への視点の移行を追体験することによって空間を平面で考える場を与えた。また、模型や Cabri3D などの視覚的な補助教材を用意し、生徒同士で議論しながら検証していくという条件推論を深める場を提供した。このようにして空間を平面で考える力が向上したことが分かった。さらに、生徒はケプラーのこの一連の営みが後の科学における大きな発見につながる過程を追体験することによって数学の自然科学における重要性や必要性を感じることができた。

今後はこの教材を空間図形の部分にとどまらず、ケプラーの三大法則の発見にまで拡張し、数学を他教科とリンクさせて実用性を感じることができるような教材作りとその有効性について考えていきたい。

謝辞

研究授業の実施に際して、埼玉県立春日部高等学校の早乙女勤先生、山岸率先生をはじめ、数学科の先生方には、多大なるご協力と共に、貴重なご指導をいただきました。厚く御礼申し上げます。

注）

本研究は、文部科学省科学研究費特定領域研究(2)課題番号 17011014「代数・幾何・微積分の動的理解を促す「使える数学」教材サイトの開発に関する研究―数学用機械 と JAVA による移動・変換と関数・微積ハンズオン教材の WEB 化研究（II）―」（研究 代表者礒田正美）による研究の一環として行われた。

引用・参考文献

文部省（1999）高等学校学習指導要領：財務省印刷局

文部省（1999）高等学校学習指導要領解説数学編理数編：実教出版

礒田正美（2001）異文化体験から見つけた数学の文化的視野の覚醒に関する一考察－隠れた文化としての数学観の意識化と変容を求めて－筑波数学教育研究 20、p39－48

礒田正美（2002）解釈学から見た数学的活動の展望－人間の営みを構想する数学教育学へのパースペクティブ－筑波数学教育研究 21、p157-174

熊倉啓之、中西知真紀、八田弘恵、国宗進（2003）空間図形についての理解に関する研究―授業を通しての検討―第 36 回数学教育論文発表会論文集、p199－204

Johannes Kepler（1963）Mysterium cosmographicum editio altera cum notis de cometis hyperaspistes

ヨハネス・ケプラー（1986）宇宙の神秘（大槻真一郎　ほか　訳）：青土社

ユークリッド原論（1977）（中村幸四郎　ほか　訳）：共立出版

村上一三（1982）美しい多面体：明治図書
P.R.クロムウェル（2001）多面体（下川航也　ほか　訳）：シュプリンガー・フェアラーク東京
一松信（2002）正多面体を解く：東海大学出版
I.B.コーエン（1970）近代物理学の誕生（吉本市　訳）：河出書房
国立教育政策研究所（2005）生きるための知識と技能２OECD 生徒の学習到達度調査（PISA）2003 年調査国際結果報告書：ぎょうせい
国立教育政策研究所（2005）PISA2003 年調査評価の枠組：ぎょうせい
E.J.エイトン（1983）円から楕円へ：共立出版
松崎大輔（2005）解釈学的営みによる生徒の数学観の変容―日時計の影の扱いみる古代の宇宙観―：中学校・高等学校数学科教育開発に関する研究（１２）筑波大学数学教育研究室 p85－97
中村友也（2004）アルマゲストを原典とした弦の表に関する授業実践―天文学とのかかわりを踏まえて―：中学校・高等学校数学科教育開発に関する研究（１０）筑波大学数学教育研究室 p68－80
礒田正美（1994）空間認識（Spatial Reasoning）の発達１－CRECER 中学校数学科教育実践講座第５巻 p162-169：ニチブン