中学校・高等学校数学科教育課程開発に関する研究(13)
発行：筑波大学数学教育学研究室、pp103-112、2006年3月

数学史を用いた解釈学的営みとしての授業研究

—円積問題を題材とした螺線の教材開発—

筑波大学大学院修士課程教育研究科
石井　寿一

章構成

1. はじめに
2. 研究目的・研究目的
3. 教材開発
4. アルキメデス螺線の数学的解説
5. 授業概要
6. 議論
7. おわりに

要約

本研究では、数学史を用いた授業において、円積問題解決のために研究された螺線を教材化し、原典解釈を通した授業実践を行った。これにより、生徒が数学を人の営みとして捉え、数学への興味・関心をもつことができるかを考察した。その結果、生徒は数学において論理的に考えることの重要性を認識した。さらに、数学を人の営みとして捉えることにより、数学に対する興味・関心をもたせることができた。

キーワード：原典解釈、解釈学的営み、数学的活動、螺線、円積問題

1. はじめに

文部省(1999)は高等学校学習指導要領の中で、高等学校における数学教育の意義の一つとして、「数学を用いた他者とのコミュニケーションと通して、客観的・論理的に物事を説明できる力が育成される」(p.20)ことを挙げ、「このような力は、国際化や情報化が進展する今日のような時代にあってとりわけ重要な力である。」(1999,p.20)としている。しかしながら、「高等学校では、数学に興味・関心などを持たない生徒が少なからずいることも事実である。」(1999,p.21)と生徒の数学に対する興味・関心の低さを問題にしている。実際に、平成 14 年度高等学校教育課程実施状況調査報告書(2004)によると、特に証明問題は全体として無回答の反応率が高く、生徒の証明の学習状況は好ましい状態にあるとはいえない。この状況を受けて、「数学を学習する意義、数学的な見方や考え方のよさ、数学の美しさ、文化や社会生活において数学が果たしている役割などを理解させることにより、数学への興味・関心をもたせ、学習への意欲を高めること」(1999,p.21)を今回の学習指導要領改訂の趣旨としている。

文部省は数学への興味・関心をもたせるために、「文化や社会生活において数学が果たしている役割」の理解を挙げているが、それに対し礒田は「実際の歴史上の原典を開き、その原典を記した人の立場や考えを想定し、その人の心情を重ねて解釈すると、今、自分たちの学ぶ数学が、異なる時代・文化背景に生きた人々によって、まるで異なる思考様式

で研究され、表現されていたことが体験できる。それによって自分たちが学ぶ数学も生き生きとした人間の営みとして改めて認めなおせるのである。」(2002)と、歴史上の数学史原典を解釈する活動を数学教育の中に入れる意義について述べている。

このことより、筆者は「客観的・論理的に物事を説明できる力」に着目した。本研究では、数学史上の原典を用いて、数学への興味・関心をもたせるとともに、原典の中に書かれた数学を解釈することをテーマとした授業が「客観的・論理的に物事を考える力」の育成につながるかを考察する。

また、筆者は、歴史上の原典としてアルキメデスの『螺線について』と『円の計測』から、螺線とそれを用いてのギリシア時代の三大難問の１つである円積問題の解法を取り扱う。先行研究では、解釈学的営みの授業実践として、同じくギリシアの三大難問である角の三等分問題を扱った仁田原(2004)が挙げられる。先行研究との相違点として、仁田原は角の三等分器の構造の理解を中心としているのに対し、本研究では同じく角の三等分も扱うが、解釈学的営みにおいて、螺線についての理解に焦点をあて、授業実践を行う。

２．研究目的・研究方法

(1)．研究目的

本研究では、数学史における原点解釈を通し、論理的に事象を考察することの重要性や楽しさを実感することで数学への興味･関心を高めることができるかを考察する。

上記の目的を達成するために、以下の課題を設定し考察する。

課題１：数学の学習は暗記や計算だけでなく、論理的に考えていくものであると捉え、その活動の重要性や楽しさを認識することができるか。

課題２:数学史を題材とした解釈学的営みの授業実践によって生徒の数学に対する興味･関心を高めることができるか。

(2)．研究方法

アルキメデス螺線を題材とした教材を作成し授業を行い、事前･事後アンケートや授業後の感想、授業の様子などを撮影したビデオ等によって上記の課題が達成されたかどうかについて考察する。

３．教材開発

古代ギリシア時代の数学は定木とコンパスを有限回使用して作図するという数学として発展してきた。このギリシア時代の数学の大問題として、任意の角の三等分を作図するという角の三等分問題と与えられた円と等しい面積の正方形を作図するという円積問題が存在する。この２題に立方倍積問題を加えたものが古代ギリシアの三大作図問題である。これらの問題に対して多くのギリシア人が挑んだが、ギリシア人の定める定木とコンパスを有限回用いて作図するという数学では解くことができなかった。結局、後の時代に定木とコンパスの有限回使用では作図することができないことが証明された。現在は角の三等分問題と立方倍積問題は Wantzel(1814-1848)により、３次方程式を解かなければならないことが示され、円積問題は Lindemann(1852-1939)により、π が超越数であることが示され、三題とも不可能であることがわかっている。

中学校･高等学校数学科教育課程開発に関する研究(13)
発行：筑波大学数学教育学研究室、pp103-112、2006年3月

本研究では、円積問題と角の三等分問題を取り上げるためにアルキメデスの『螺線について』と『円の計測』を参考に教材開発を行った。アルキメデスも他のギリシア人同様、三大作図問題に関心を持ち、彼の研究したアルキメデス螺線によって円積問題と角の三等分問題に解法を与えた。螺線は１平面内で端点の周りを一様に回転する半直線上を、端点から出発して一様に遠ざかる点の動く軌跡である。『螺線について』は７つの定義と２８の命題からなり、その中で螺線の接線を考え、命題１８において「もし直線が第１回転で描かれた螺線に、螺線の終端で接し、そして螺線の原点である点から回転の原線に垂直にある直線がひかれるならば、ひかれた直線は接線と交わり、接線と螺線の原点との間の線分は、第１円の円周に等しいであろう」と述べ、螺線とその接線を用いて円と同じ長さの直線を求めている。また、『円の計測』は３つの命題からなり、その中の命題１で「すべての円は、直角を挟んでいる二つの辺のうちの１辺が直径の半分に等しく、もう一つの辺が円を囲む線に等しいような直角三角形に等しい」と述べ、円の面積に等しい直線図形の存在を示している。これらの事実から、螺線を用いて円積問題を解決することができる。さらに､螺線の定義より､動点の直線上の移動距離と直線の回転角は共に時間に比例する。この性質を用いると任意の角の三等分を作図することができる。

４．アルキメデス螺線の数学的解説

(1)．定義

アルキメデスが研究した螺線は『螺線について』定義１により、

「もし直線が平面に引かれ、その一端が固定されたまま、その直線が一様な速さで何回か回転して、それが出発した位置に再び戻ってくるとし、そして直線が回転すると同時に、ある点が固定された端点から、その直線上を一様な速さで運動するならば、その点は平面上に螺線を描くであろう」

と定義している。

つまり、１平面上で端点の周りを一様に回転する半直線上を、端点から出発して一様に遠ざかる点の描く軌跡であり、極座標では、螺線の方程式はｒ＝ａθとなる。

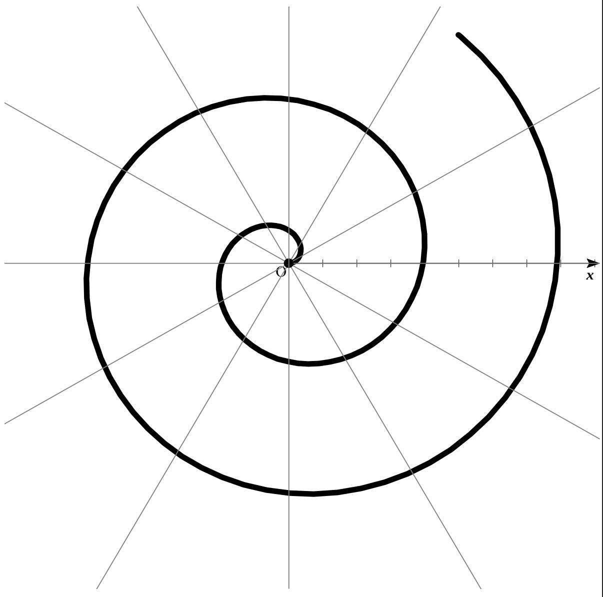

図１　アルキメデス螺線

(2)．性質

この定義より、動点の直線上の移動距離と直線の回転角は共に時間に比例するので、図２のような場合、

$$OP_1 : OP_2 = \theta_1 : \theta_2$$

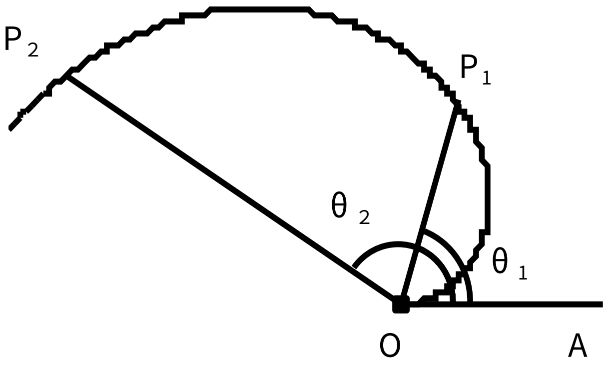

図２　螺線の性質

となる。

　さらに、この性質を利用すると、以下の手順で任意の角の三等分線の作図をすることができる。まず三等分する角の頂点と１辺とを、それぞれ螺線の原点Ｏと回転する半直線の基線ＯＡとに一致させてとる。その角の終辺と螺線との交点をＰとして、線分ＯＰを点ＱとＲとで三等分し、さらにＯを中心とする半径ＯＱ、ＯＲの円を描く。それらの円と螺線との交点をＱ′、Ｒ′とすると、半直線ＯＱ′とＯＲ′は角ＡＯＰを三等分している。

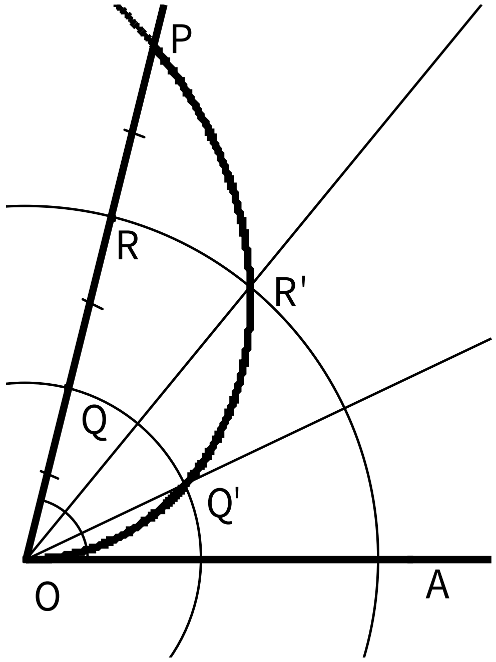

図３　角の三等分

(3)．螺線の接線

　また、アルキメデスはこの中で螺線の接線というものを考えているが、接線そのものの定義を述べていない。しかし、他の命題で与えられている推論から、アルキメデスは接線を、曲線と１点を共有し、その点の近くにおいてその曲線全体がそのどちらか一方の側にあるような直線と考えていたと思われる。

　この螺線の接線を用いることで、円の求長が可能となる。それを示す命題１８は「もし直線が第１回転で描かれた螺線に、螺線の終端で接し、そして螺線の原点である点から回転の原線に垂直ある直線がひかれるならば、ひかれた直線は接線と交わり、接線と螺線の原点との間の線分は、第１円の円周に等しいであろう」と述べている。つまり、下図において、線分Aθを半径とする円の円周の長さは、線分ＡＺの長さに等しい。アルキメデスはこの命題を二重背理法によって証明している。

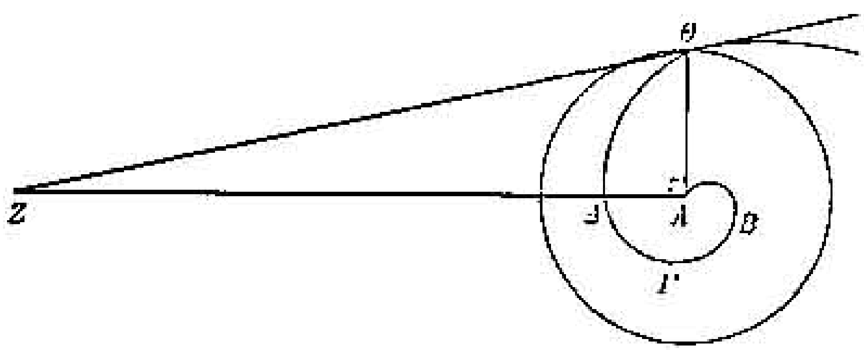

図４　螺線とその接線

５．授業概要

(1)．授業環境

日時：平成 17 年 10 月 25 日、26 日、27 日、28 日（65 分×３回）
対象：埼玉県立高校　第 2 学年（2 クラス）
準備：コンピュータ(Windows)、作図ツール(Cabri GeometryⅡplus)、Microsoft Power Point、プロジェクタ、実物投影機、授業研究用ビデオカメラ、コンパス、分度器、事前・事後アンケート、授業資料

(2)．授業展開

＜1 時間目＞

【ねらい】

定木とコンパスで可能な作図、不可能な作図について考え、古代ギリシアの 3 題作図問題を紹介する。その上で「螺線について」を読み、その定義に基づいてアルキメデス螺線の概形を描くことでその性質を理解する。

【授業の流れ】

事前課題として、定木とコンパスのみ使用の作図できるか否かを考える問題を5題課した。その課題に対する議論を今回の授業の導入とした。作図が可能である 5 題中 3 題の内容はａ)与えられた直線上の点において与えられた角に等しい角の作図、ｂ)平行線の作図、ｃ)直線図形の等積変形とした。ａ)とｂ)が可能であることを示すことで、定木とコンパスに基づいていた古代ギリシアの幾何学を取り扱うこの授業でも分度器と三角定木の使用を認める。ｃ)はできないと回答した生徒も多かったので、Cabri GeometryⅡplus などを用いてわかりやすく手順を説明した。この 3 つの作図が可能であると古代ギリシア人が知っていたことをユークリッド原論と共に紹介した。作図できない 2 題はｄ)任意の角の三等分、ｅ)円積問題とした。これら 2 つに立方倍積問題を加えた 3 問題が古代ギリシア時代に多くの数学者が取り組んだ 3 大難問であると紹介し、この授業でその解決法を探っていくという目的を明示した。

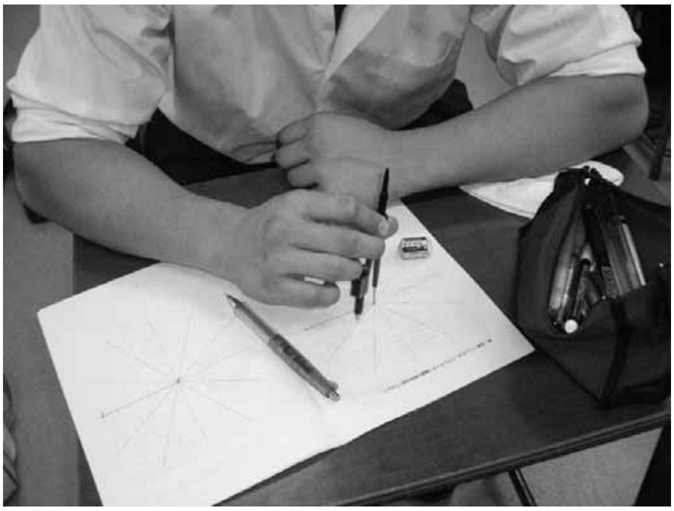

写真１　螺線を描く様子

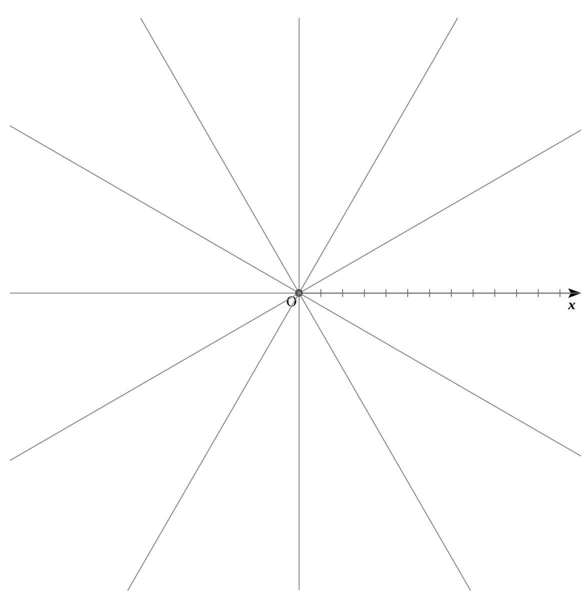

図５　螺線を描く活動に用いた座標

次にこの 3 大難問に取り組んだ数学者の一人であるアルキメデスと彼が研究した螺線を紹介し、原典「螺線について」の解釈を行う。まずはアルキメデス螺線を定義している定

義１を解釈し、その概形を座標上に作図した。座標系は直線上を点が運動した距離と螺線の原線の回転角の比が一定であることに着目しやすいように図５を用いた。作図方法と Cabri GeometryⅡplus を用いて描いた螺線の形を全員で確認した後、比の関係式で表現することによってその妥当性も確かめた。さらに、点の運動距離と回転角の比が一定であることは命題１２として証明されている。ここでは数式表現の無い証明になれる意味でも、穴埋めをしていく形式で証明を行った。

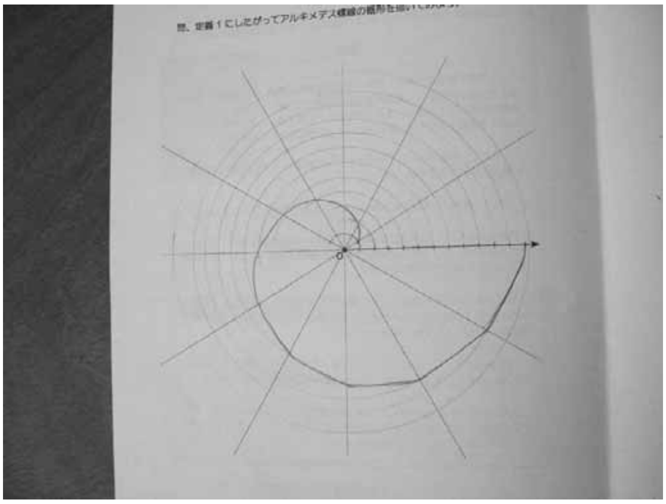

写真２　生徒が描いた螺線

最後にこの性質を用いて３大難問の一つである任意の角の三等分を行えることを説明し、作図方法を考えてくることを次の授業までの課題とした。

<2 時間目>

【ねらい】

アルキメデス螺線の性質を利用して、任意の角の三等分を作図し、その妥当性を論理的に示す。加えて、3 時間目に必要な知識として、アルキメデス螺線の接線の存在とその性質を理解する。

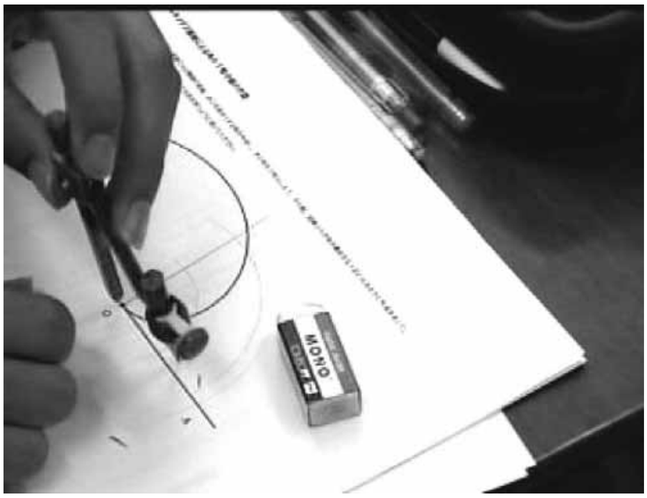

写真３　角の三等分を考える

【授業の流れ】

まず前回の復習として、アルキメデス螺線の定義、概形と回転した角度と、直線上を運動した距離の比は一定という性質を振り返った。

そしてその性質を用いて、任意の角の三等分の方法を考えた。このとき「線分は定木とコンパスだけで三等分できますか」との質問が多くあがった。これは回転運動を直線運動との比で考える螺線の性質を理解した上で利用しようとしているといえる。三等分線の作図をした後に、証明を行い、作図された三等分線の妥当性を確かめた。

写真４　説明する生徒

授業の後半では３時間目に必要となるアルキメデス螺線の接線を取り扱った。アルキメデスは「螺線について」のなかで、接

中学校･高等学校数学科教育課程開発に関する研究(13)
発行：筑波大学数学教育学研究室、pp103-112、2006年3月

線を明確に定義していないので、ユークリッド原論の円の接線の定義をもとに共有点を持ちその近くでその曲線全体が直線のどちらか一方であるような直線とした。この螺線と接線との接点は１つであることを述べている命題１３は背理法で証明されている。証明において仮定している部分と、生じる矛盾の部分に注目して解釈していった。

＜3 時間目＞
【ねらい】
任意の円の面積が、直角を挟む 1 辺が円の周囲に等しく、他の 1 辺が円の半径に等しい直角三角形の面積に等しいことを「円の計測」を解釈することで論理的に説明できることを学び、そのような直角三角形をアルキメデス螺線とその接線でつくることで円積問題解決の手順を理解する。
【授業の流れ】
前回の復習としてアルキメデス螺線の接線の存在と、その性質として円の接線と同様に、接点が１つであることを振り返った。螺線の接線を使って円積問題の解決手順を探る。まずはどのような方針をとるかを議論した。
【やりとり１】
授業者「円積問題を解くには、事前課題で考えたことがポイントになるよ。」
生徒「？」
授業者「事前課題のｃ)はどんな問題だった？」
生徒「与えられた直線図形に等しい面積の正方形を作ること、です。」
授業者「そうです。つまり、円と同じ面積の直線図形を作れれば円積問題は解決です。」

アルキメデスが円と同じ面積を持つ直線図形の存在を知っていたかをみるために「円の計測」命題１の解釈を行った。証明は背理法を用いており、議論の過程を不等式で表す問を設置し、生徒がお互いの考えを発表しあうようにした。

写真４　自分の考えを説明する生徒たち

【やりとり２】
授業者「この背理法の矛盾している部分はどこですか？」
生徒「…下線部ｂですか？」
授業者「どうしてそこがおかしいと思いましたか？」
生徒「え～…（しばらく考えて）あっ、下線部ａとｂが矛盾している！」

そして、そのような直線図形は螺線とその接線により作られることを述べた「螺線について」命題１８を紹介した。証明は多少難解であるため数式表現の穴埋め問題として読んでいった。最後に３時間で学んだ内容を振り返って授業を締めくくった。

６．議論

課題１：数学の活動は暗記や計算だけでなく、論理的に考えていくものであると捉え、その活動の重要性や楽しさを認識することができるか。

事後アンケートより抜粋
①問題を考えて解く過程が楽しかった。
②楽しかったです。ダラダラ計算するばっかりの数学ではなかったから。
③公式などもなんで成り立つのかということを考えようと思った。
④数学は難しいけど証明はやってて楽しかった。理論的に考えるのも必要だし、それを養うのは大変だけど、大切だと感じた。数学をこれからもがんばりたい。
⑤数学は今までほぼ暗記だったが改めて数学は証明などを通して、考え方を覚えることが大切だと感じた。
⑥特に何かの定理を使うこともなく、他の人ができるような証明をしていたことがすごい。
⑦論理的に考える学問だった。
⑧なんか文学的だった。
⑨自分で考える時間が多くて、自分で答えを出す難しさなどがわかった。

授業後に行った生徒へのアンケートの内容（上記）をもとに課題１について議論していく。

授業前に行った事前アンケートによると、数学をどのような学問と捉えているかという問いに、「いろいろな計算の方法を学ぶこと」と答えるなど、生徒は数学の活動が論理的思考を伴う活動であるとの認識を持たない傾向が見られた。これに対し、授業後のアンケートでは、①、②、③のように、証明の多いこの授業実践において、おもしろさを感じている。このことから、興味・関心をもって、論理的に考える数学的活動を行えたといえる。また、④、⑤、⑥では、証明を通して論理的な考え方の重要性、特に④では論理的な考え方を育成することの重要性も認識していることがわかる。そして、⑦、⑧、⑨では、数学を論理的に考える学問であると認識し、生徒の数学観の変容が伺える。

以上から、課題１は達成できたと考えられる。

課題２：数学史を題材とした解釈学的営みの授業実践によって生徒の数学に対する興味・関心を高めることができるか。

事後アンケートより抜粋

①定木とコンパスだけで色々な難問に挑戦した昔の人はすごい。
②疑問を絶対に解決しようという執念を感じた。
③今、自分たちがわかっていることがこんな昔から考えられてきて完全に証明されているということはすごいと思った。
④螺線という曲線からいろいろなことが求められるなんてすごい。
⑤日頃ふれることのできない数学の難しい証明問題を解けたのは楽しかったです。
⑥「これ入試出るぞ」「覚えろ」ばかりの授業とは違ってとても新鮮なものでした。
⑦今までは数学のことを全く知らずに嫌いになっていたので少し自分から数学のことを知って好きになろうと思った。
⑧最後の授業の証明の後半部もじっくり考えてみようと思ったり、図形の見方もだいぶ変わったと思う。
⑨もうちょっと詳しく知りたかったです。
⑩これからもっと数学を勉強しようと思います。
⑪数学については大学入試以外では必要の無いものという捉え方だったけど、問題を解く楽しさがわかって、数学に対して興味がわいた。

授業後に行った生徒へのアンケートの内容（上記）をもとに課題２について議論していく。

①、②では異文化を体験することで当時の人の営みを、他者の立場を想定したうえで解釈し、共感していると考えられる。そして、③、④では現代ではわかっていても、当時から螺線が考えられていたことや螺線を通して証明できたことに感動している。また、⑤、⑥、⑦では、数学史を題材とした授業において楽しさや新鮮味を感じたと述べられている。そして、⑧、⑨、⑩、⑪では、この授業実践を通して、今までよりも数学に対して興味・関心を抱き、今後の数学の学習に意欲を持つようになった様子が見られる。

以上から、課題２は達成できたと考えられる。

７．おわりに

本研究では、数学史的な話題として円積問題を取り上げ、解釈学的営みに基づき教材開発・授業実践を行った。その結果、生徒は数学を、論理的に考えていくものであることと、その重要性を認識する様子が伺えた。同時に、生徒が他者の考えに共感し、自ら学んでいく姿勢が見られた。

しかし、「楽しい授業だった」という感想だけでなく、「文章が難しかった」という感想も多くあった。やはり生徒にとって、原典を読むことは容易ではなく、分量、内容も多かったことは否めない。依然として、数学史に触れるという機会は少ないままである。このため、今回の授業実践での教材を、より多くの生徒に提供するために、今後はいかに内容を精選し改善を加えていくかが課題である。

謝辞

授業研究の実施に際して、埼玉県立春日部高等学校の早乙女勤先生、野村秀雄先生をはじめ、数学科の先生方、その他多くの先生方から多大なるご協力と共に、貴重なご指導をいただきました。厚くお礼申し上げます。

注

本研究は、文部科学省科学研究費特定領域研究(2)課題番号 17011014「代数・幾何・微積分の動的理解を促す「使える数学」教材サイトの開発に関する研究―数学用機械とJAVAによる移動・変換と関数・微積ハンズオン教材のWEB化研究（II）―」（研究代表者礒田正美）による研究の一環として行われた。

参考・引用文献

彌永昌吉(1979). *数学の歴史:現代数学はどのようにつくられたか*. 共立出版

Euclid(1971). *ユークリッド原論(中村幸四郎ほか訳)*. 共立出版

ボイヤー(1983). *数学の歴史　(加賀美鉄雄、浦野由有訳)*. 朝倉書店

カジョリ初等数学史. (小倉金之助補訳). 共立出版

文部省(1999). 高等学校学習指導要領解説　数学編　理数編.　 実況出版

国立教育政策研究所教育課程研修センター(2004). *高等学校教育課程実施状況調査報告書―数学Ⅰ―*. ぎょうせい

礒田正美(2002). *数学的活動を楽しむ心を育てる. 課題学習・選択学習・総合学習の教材開発.* 明治図書

礒田正美(2001). *異文化体験からみた数学の文化的視野の覚醒に関する一考察―隠れた文化としての数学観の意識化と変容を求めて―*. 筑波数学教育研究第 20 号，p.39－48

仁田原史明(2004). 解釈学的営みとしての数学授業に関する一考察―角の三等分問題を題材として―. *「確かな学力」の育成と道具を用いた数学教育　中学校・高等学校数学科教育課程開発に関する研究(11)*. 筑波大学数学教育研究室，p.43 ‐ 54.

松崎大輔(2005). 解釈学的営みによる生徒の数学観の変容―日時計の影の扱いにみる古代の宇宙観―. *Nymeracy の規定の諸相と歴史文化志向の数学教育―新しい教育課程へのアプローチ―　中学校・高等学校数学科教育課程開発に関する研究(12)*. 筑波大学数学教育研究室，p.85－97