礒田正美,”関数の思考水準とその指導についての研究”，日本数学教育学会誌，vol.69，no.3, pp. 2-12, 1987，日本数学教育学会

参考文献

１)’English Translation of Selected Writings of Dina van Hiele=Geldof and Pierre M.van Hiele’ , 1983
2)Alan Hoffer, “van Hiele-Based Reseach”’Acquisition of Mathematical Consepts and Processes’Academic Press, 1983
3)H.Freudenthal’DidacticalFenomenology ofMathematical Structures’, D.Reidel, 1983
4)K.Lovell, ”SomeAspectsoftheGrowthofaFunction”’PiajetianCongnitive-developmentResearchandMathematicalEducation’, N.C.T.M
5)中村幸四郎, “近世数学の歴史”，日本評論社
6)ガリレオ, “新科学対話”，岩波文庫
7)吉田耕作, “わたしの微分積分学”，講談社
8)四方実一, “関数概念の発達”, “数学学習の心理学”，金子書房
9)木村益己，“数学教育における先行オーガナイザーの意義と役割”，筑波大学教育研究科 MC 論文抄録 S.57
10)三輪辰郎, “数学教育におけるモデル化についての一考察”，筑波数学教育研究 vol.Ⅱ
11)拙稿, “数学化の見地からの創造的な学習過程の検討”，筑波数学教育研究 vol.Ⅱ～Ⅴ

関数の思考水準とその指導についての研究

磯　田　正　美

A Study of Reasoning Level on Function and its Teaching Method

M. ISODA

1987

日本数学教育学会誌　第 69 巻　第 3 号　別刷

論　　説

関数の思考水準とその指導についての研究

磯　田　正　美*

1. は　じ　め　に

（1） 本研究の目的と課題

関数指導が，F. Klein 以来注目され採り上げられてきたおもな意義のひとつには，関数が実世界や数学の現象の多くの場面を記述する点があるといえる．これは，さらに広くは，関数概念が事象の考察や代数・幾何等の諸概念，諸現象との関連において多様に論じられることにかかわっている．このような意義は，関数が記述の対象や意図に応じた多様な表現を備えていることに基づいている．このような関数の備える性格は，逆に小・中・高における関数指導の難しさ，子供にとっての理解のしづらさを生み出すひとつの原因といえる．この理解のしづらさの背景には，関数に対する子供の思考の仕方と，関数の多様な表現のひとつとしての教材や指導の間のギャップがあると考える．

本研究の動機はこのギャップにある．定時制での一般の2次関数の指導におけるギャップの経験を述べる．学力の不十分な生徒でも，点をプロットする指導によって $y=x^2$ のグラフを描くことができるようになるし，グラフの平行移動も直観的に理解できると考えた．しかし，ある生徒の答案にはグラフを指して「線」という言葉が用いられていた．この生徒の理解している2次関数はいわば折れ線グラフであり，学力の高い生徒の理解する2次関数とは異なるものと思われた．振り返ってみると，筆者の指導はこの生徒にとって，点と点を線で結ぶこと，その点と線をずらすことなどの行為を意味しており，理解し難いものであったように思われる．そこで筆者は，生徒の思考の仕方に見合った，生徒が自ら考えたくなるような教材や提示の仕方の必要を感ずるとともに，生徒が関数についてどのような思考の仕方をしているのかを知る必要を感じた．そして，関数に対しての生徒の思考の仕方を踏まえて意図する水準まで生徒の思考を高めていく指導を構成する必要があると考えた．

このような動機の基に，関数指導を考えるとき，生徒の関数に対しての思考の仕方の階層を水準として踏まえて，多様な表現をもつ関数から生徒の思考に応じた関数教材や指導過程を構成する必要があると考える．そこで，本研究では，生徒の関数の思考の仕方の水準に基づいた関数指導を構成することを目的として，次のような課題を設定した．

Ⅰ．関数の思考水準を探り，生徒のいまいる水準と指導により高めていくべき水準について考察する．

Ⅱ．生徒のいまいる水準を踏まえて，さらに高位の水準へと高めていく指導について考察する．

以上の2点についての模索の一端を今回の報告とした．

（2） 関数の思考水準の設定に際して

関数の思考水準を設定するに際して，その水準が関数に対する生徒のどのような能力の層を記述するのかが問題である．すでに述べたように，関数は数学を含む様々の現象とのかかわりの中で考察され，たとえば，数・表・式・グラフなどによる多様な表現をもつ．この立場で先行研究を見るとき，先行研究では関数のある側面に焦点を当てたものが多いように思われる．

たとえば，NCTM の9年報では関数概念のもつ共通の要素を示している．四方実一氏はこれらの要素について子供の発達の調査を試みているが，要素ごとの分析であるため関数の様々の側面に対して有効でないように思われる．生徒のもつ発達段階についての研究としては，J. Piajet の研究や，Piajet を踏まえた S. Lovell の研究を挙げることができる．たとえば Lovell は一意対応による関数の定義に基づく子供の理解段階を記述した．Lovell の段階は一意対応に関する学習指導へ適用できよう．しかし，われわれの直面する学習指導は，定義よりもむしろ関数についての諸現象自体を考察の対象とする局面が多いと考える．

多様な表現をもつ関数の性格に対して，本報告では，生徒がどのような言葉を用いて関数を論ずるかに焦点を当て水準を設定することにした．生徒の用いる言葉に，関数と現象のかかわりや関数の多様な表現を見ることができるとともに，その言葉に見合った教材というものを考えられるからである．この水準の設定に際して，子供

* 筑波大学附属駒場中高等学校

の用いる言葉の観点から思考の階層を記述した van Hiele 夫妻による思考水準論が参考になると考えた．

本報告では，課題Ⅰ．に対して，思考水準論を参考に関数の思考水準を本研究の仮説として２章で設定し，生徒の実際の思考，とくに言葉でその水準を評価する．次に課題Ⅱ．に対して，思考水準を踏まえた指導について３章で検討する．

2.　関数の思考水準についての検討

はじめに関数の思考水準について述べ，続いて設定の背景およびその妥当性について検討する．

（1）　関数の思考水準

関数指導の実態に対する反省，関数の歴史と関数のもつ多様な数学的表現の検討，実態調査と思考水準論からの分析から次の関数の思考水準を仮説として設定する．

第０水準；事象（対象）を，２つの数量間の関係，事象間の依存関係で考察できる．

第１水準；数量間の関係（対象）を，変化や対応の性質で考察できる．

第２水準；変化や対応の性質（対象）を，関数の式やグラフで考察できる．

第３水準；関数の式やグラフの変化の性質（対象）を，関数（導関数·原始関数）で考察できる．

第４水準；汎関数（対象）を用いて関数空間で考察できる．

第４水準は大学や研究のレベルで，汎関数の理論に限らず作用素の理論等も挙げることができる．

ここでは，各水準をその水準に可能な思考型態で特徴づけている．各水準の思考型態の違いは，水準に特有な言葉と研究方法の違いとして位置づけられる．思考水準を言葉と研究方法で位置づけるのは，思考が用いる言葉と考察の方法に強く依存するからである．ここで研究方法とは，関数を考察したり理解したりする際に見られる特徴的な認識方法·考え方を意味している．ここでは変化や対応を中心に水準を記述したが，各水準は様々の考えを含んでいる．各水準の思考を見る上で，各水準の研究方法と言葉の特徴をまとめると表-１のようにまとめられる．表-１から各水準の思考で利用する言葉をひとことで特徴づければ，第０水準は日常用語，第１水準は「数」を中心とした用語，第２水準は「式とグラフ」を中心とした用語，第３水準は「微積分」を中心とした用語を用いているといえる．各水準に共通する言葉はあるが，その質的な意味は変わっている．たとえば，表は第１水準で変化や対応を探るための手立てであるが，第２水準では式やグラフを導くための手立てとしての性格も備える．

表-1　各水準の研究方法と言葉の特徴

水準	研究方法	言葉の特徴
0	数量間の関係 事象間の依存関係	ここで言う関係は日常用語の域を出ない。例えば重いものが早く落ちるという考えや雨が降ると水かさが増す等は、数量間の関係、事象間の依存関係についての日常的な用語からなる。数量も扱うが十分な考察は次の水準でできる。
1	変化や対応の性質	変化や対応の性質は具体的な数量関係を表す表や、言葉、言葉の式、点を結んだ折れ線グラフなどの用語で考察される。変化や対応の性質を特徴付ける典型的な用語は比例・反比例である。「2倍3倍すると‥」というような数を基にした関数の性質の表現はこの水準からである。
2	関数の式・グラフ	式やグラフを見て変化や対応の性質が考察できる水準である。変化や対応の性質の考察は、式やグラフを基に記述される。表は、前の水準ではｘが１増えるとｙは２増えるというように変化や対応を探る際にも用いられるが、ここではむしろグラフを描く際の対応表という性格を持つ。式やグラフについての考察が中心となるが、数による変化の具体的な考察も可能である。
3	関数 導関数・原始関数	関数の変化の性質を他の関数により理解してゆくことができる水準である。微分積分の用語が含まれる。

（2）　思考水準設定の背景と妥当性の検討

ここでは，関数の思考水準の仮説設定の背景および妥当性を検討する．はじめに本報告で参考にした思考水準論との関係について述べる．次に生徒の実態と数学の歴史から見た妥当性を検討する．本研究では関数の思考水準を生徒の思考と数学の両方から位置づけたいからである．本研究の目的において生徒の実態に基づくことが前提である．しかし生徒の思考をどのような水準へ高めるべきかという問題は，生徒の実態とともに数学に関与する問題である．そこでは教育課程が参考となるが，前回の指導要領改定で中学の関数の扱いが一変したことに見るように妥当性の検討の十分な足場といえない．数学の側からの検討として，ここでは関数の歴史的な系統発生の類比として個体発生である関数の思考水準の妥当性の考察も進める．関数の歴史は，関数的思考の発展を示すからである．

①　思考水準論と関数の思考水準

van Hiele 夫妻は思考水準論の中で子供の用いる言葉と研究方法に注目して，次の幾何の思考水準を設定した．

第零水準；事物（対象）を形（方法）で考察できる．

第一水準；形（対象）を形の性質（方法）で考察できる．

第二水準；形の性質（対象）を性質間の論理的順序関係（命題，方法）で考察できる．

第三水準；論理的順序関係を示す命題（対象）を証明（方法）で体系化できる．

第四水準；命題の証明体系（対象）を形式論理（方法）

で形式化できる．

A. Hoffer や筆者は，夫妻の思考水準論から一般的な水準を抽出し学習過程を検討している．とくに Hoffer は，次の5つの水準を設定した．

第０水準；研究領域の基本的な要素を考察できる．

第Ⅰ水準；基本的要素を解析するための性質について考察できる．

第Ⅱ水準；性質を関連づける命題（文章）について考察できる．

第Ⅲ水準；命題の半順序系列について考察できる．

第Ⅳ水準；半順序系列を解析する性質について考察できる．

各水準はひとつの研究領域に対する可能な思考形態を記述している．この研究領域を幾何（図形）とした場合が，夫妻の幾何の思考水準論である．Hoffer の一般論と関数の思考水準との対応を述べる．ここでは関数が研究領域である．関数領域の研究ではじめの基本要素というべきものは，事象間の依存関係である（第０水準）．この依存関係を解析するための性質は，数量関係における変化や対応の性質（たとえば比例）である（第Ⅰ水準）．関数の式やグラフは，変化や対応の性質を考察したり示したりする際の言葉であり，比例や反比例などの性質を明確に示す命題（文章）にかかわる（第Ⅱ水準）．式やグラフに見る変化の諸性質は，微積分で組織される（Hoffer の用語では「順序系列」；第Ⅲ水準）．たとえば $h(t)=1/2gt^2$ を微分すれば，$h'(t)=gt$, $h''(t)=g$ である．これは微分することで関数の変化を組織したもの，落体の運動では落下距離と速さと加速度の関係を組織したものといえる．このような組織化を一般に解析する性質としては作用素の議論等が挙げられる（第Ⅳ水準）．

夫妻の思考水準論は，各水準の思考を研究方法と言葉で特徴づける．この点に関連して，「下位水準の方法は次の水準において考察の対象となる（教材となる）」という夫妻の主張は，思考水準を特徴づける重要な観点であると筆者は考える．関数の水準では，第０水準における数量間の関係という研究方法は，第１水準の考察の対象となる．そして，数量間の関係がどのようなものかという変化の性質を研究方法とした考察がなされる．たとえば，「２倍３倍すると……」とか「１増えると……」というような考察である．それに対して，第２水準では式やグラフによってその変化の性質を対象とした考察ができる．たとえば，「１増えると」という１次関数の性質はグラフで認識される．さらに，第３水準では式やグラフを対象として，その変化の特徴を記述する微積分という研究方法による考察がなされる．

高位水準の思考をする子供は，下位水準の考察を理解するが，その考察はその子供にとって本質的でないと夫妻は指摘している．たとえば第３水準の子供は，「１増えると」という１次関数についての下位水準の議論を理解する．しかしその理解は，微分係数が一定という意味も含んでいる．これは下位水準の子供の理解とは質が異なることを示す，水準間のギャップを示す例である．このようなギャップは，筆者の動機と一致する．

② 生徒の実態から見た妥当性

ここでは本校生徒の思考の実態から関数の水準の妥当性を見る．中学校については２次関数（２乗に比例する関数）の指導前後の実態，高等学校では高１の一般の２次関数および分数関数指導後，高２の基礎解析の微分法指導前後の実態を見る．本稿での調査問題は，表-２の落体の事例である．ただし，指導後の課題は，指導においてこの事例を扱ったため，表ではなく式を与える形式で出題した．その結果を，解答の記述の仕方（言葉の使い方）から類型すると表-３のようになる．解答例（表-４）に見るような記述と水準との対応が認められた．なお，表-３の数字は人数である．

表-３から逆に生徒の実態を述べる．生徒の思考は指

表-2 調査問題

物を高い所から力を加えずに落とすと、落としてからの時間と落下物の初めの位置から落ちた距離は、次の表のような関係になることがわかった。式、グラフ、表などを利用して、時間と距離の関係、変化の様子を、できるだけ詳しく様々の観点で書きなさい。

落としてからの時間（秒）	0	1	2	3	4	5	6	…………
落ちた距離（M）	0	5	20	45	80	125	180	…………

表-3 解答の記述の仕方と思考水準

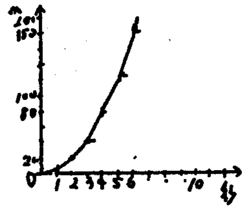
水準	二次関数 前	二次関数 後	一般の二次関数 後	微分法 前	微分法 後	解答の記述の仕方
1	34	23	5	1	0	表、数を基にした記述、グラフは折れ線で描かれている。式を導く者もいる。ただし、式やグラフがわかってもそれ以上の考察はない。
2	6	17	36	34	11	上記の議論に加え、式やグラフから変化等を考察した者。グラフは折れ線に限らない。
3	0	0	0	3	28	上記の議論に加え、微分法を用いて考察した者
合計	40	40	41	38	39	

注；数字は人数を、「前」とは「指導前」を、「後」とは「指導後」を表す。高位水準の者の記述には、多くの場合下位水準の内容の記述も同時に認められた。

表-4

解答例(指導前)

第1水準

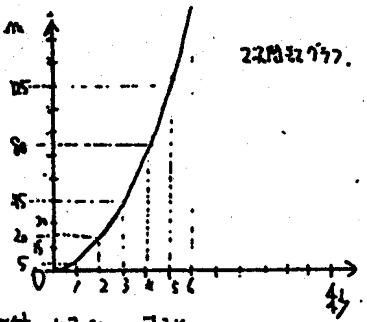


1秒ごとに、どれだけ落ちたか考えてみると、

0-1秒	5	10
1-2	15	10
2-3	25	10
3-4	35	10
4-5	45	10
5-6	55	
	180	

となる。つまり、同じ割合で、時間にともなって速さが増していることがわかる。
したがって、時間と距離の間には、あまり簡単な関係はない。

第2水準



2次関数グラフ。

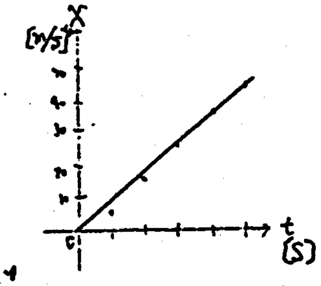
x秒のときy mとすると、
xとyの関係は
$y=5x^2$　となっている。

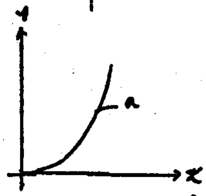
・時間がたつにつれて、カーブが急に――つまり、増え方が大きくなっている。物を落とすと、落ちるに従って加速度的に、落下量が大きくなっていくことがわかる。前述したように、式から、$y=5x^2$なので、10秒たった時の落ちる距離は500mである

第3水準

0-1秒間の速さ	5m/s
1-2	15m/s
2-3	25m/s
3-4	35m/s
4-5	45m/s
5-6	55m/s

・だんだん速くなる
・時間と速度は比例している
・加速度は 10[m/s²]である。





・時間と距離の関係は左図のようになっており、ある時刻tの瞬間の速さは a曲線の方程式を微分することによっても求められる。

a: $y=5x^2$　$y'=10x$

これよりt秒後の瞬間の速さは10t[m/s]である

導によって顕著な違いが認められる．中学校では2次関数を学んだ後でも第1水準の思考をする者が多い．それに対して高校では，第2水準の思考をする者が増加している．一般の2次関数の指導に見るような式やグラフの扱いを中心とした指導を受けることで，第2水準へおおむね達するといえる．微積分指導以前では，基礎解析の三角関数や指数･対数関数の指導後であっても，思考水準に変化はない．微積分の指導によって，生徒の思考は第2水準から第3水準へ移行するものといえよう．なお，表-3で指導前にできた者はすでに自習した者である．

ここで述べた生徒の実態から見た妥当性の評価は，この調査問題によっている．十分とはいえないものの，生徒の関数に対する思考の一端が，関数の思考水準に対応していることは少なくも認められよう．実際，高校では類題を出したが同じような結果であった．

③　関数の歴史的事例から見た妥当性

ここでは系統発生からの類比として個体発生である関数の思考水準の妥当性を評価する．関数の歴史については中村幸四郎氏による定義を中心とした研究があるが，関数的思考は定義以前に存在している．しかし，ひとくちに関数的思考といっても広範で考察し難い．ここでは発生的な見地から，関数で現象を考察することについての始源的研究として典型といえる，落体の理論の変遷を例に水準の妥当性を見る．落体の理論の変遷における関数の扱いは，次のように思考水準に対応していると考える．

落体の実験はガリレオで知られる．ガリレオ以前には，重い物が早く落ちるというアリストテレス流の考えが主流であった．それに対して，ガリレオは落下時間は高さに関係なく早さに関係すると考えた．これらは第0水準の考察である．ガリレオは実験データから「落下距離は時間の2乗に比例する」というガリレオの法則を発見した．これは第1水準の考察といえる．さらに彼は，落体の速さが落下の過程でどのように変化するかなどを考察した．法則を式で表すと，$h=Ct^2$ である（ガリレオは幾何的に検討している）．この法則を用いガリレオは，1秒あたりの速さ（落下距離）を考え，最初の1秒間で C，次の1秒間で $3C$，次は $5C$，すなわち，1,3,5,7……というように奇数の比で増大することを検討し，また軌跡がアポロニウスによるパラボラになることを示した．ガリレオの考えを発展させたのはニュートンである．ニュートンは $C=g/2$ であることを調べ，$h(t)=gt^2/2$ を導いた．これらは第2水準の考察である．ニュートンはさらに瞬間の速さに当たる概念を導く．t 秒後から d 秒間の質点の落下距離は $gtd+gd^2/2$ である．d が0に限りなく近づけば，時刻 t における瞬間の速さは gt となる．このようにしてニュートンは，「落体の速さが経過した時間に比例する」ことを確認した．これは第3水準の考察である．第3水準から第4水準への移行期には，ベルヌーイによる変分法の問題「曲面上を，質点が重力の作用のみで落下する際の曲線で，落下時間が最短のものを選べ」などを挙げることができる．以上の対応は，歴史的系統発生の事例から見た個体発生としての思考水準の妥当性を示すものといえる．

3. 思考水準を高めるための指導についての検討

従来の実践において，どのように指導すれば生徒の理解が深まるかという点に多くの努力が払われていると思う．筆者もこの点を大切にするが，思考水準を踏まえた指導の重点は，さらに高次の内容を学ぶときに生徒が困らないようにするにはいまどのような指導が必要かという点にある．思考水準は，生徒がどのような事柄であれば抵抗なく考察できるかを水準としておおまかに示している．動機で述べた授業の失敗は，第1水準の思考を進める生徒に，性急に第2水準の思考に応じた平行移動等の説明を進めたことにあるといえる．そこでは，指導を通じて生徒の思考をどのように高めてゆくか，水準の移行を進めるかが課題といえる．本章では，思考水準を踏まえ高める指導について考察を進める．はじめに高位水準への移行のための指導および水準を踏まえた教材について検討し，次に中学校・高等学校の関数指導の試みを述べて，移行のための指導（思考を高めるための指導）について検討する．

（1） 思考水準の移行のための指導についての検討

① 思考水準と教育課程との対応と指導目標の検討

先の生徒の実態に見るように，指導によって生徒の思考は高位水準へ移行するものといえる．このことは思考水準論でも指摘されている．先の調査と現行指導内容の検討から，現行の教育課程における学習指導は水準の移行と次のようにおおまかに対応していると考えられる．小学校の関数指導は，第0水準から第1水準への指導として位置づけられる．これは小学校指導要領解説でも指摘されている．実際小学校では，たとえば比例・反比例の学習において表を基にして関数の変化や対応の学習をする，すなわち，第1水準までの学習をするといえる．これを前提として，中1の文字式の扱いに始まり中3までに式を基にして関数を学ぶ第2水準への指導が進められる．そこではグラフの幾何的な見方も育成される．高1では，2次関数の一般形・分数関数・無理関数の指導を進める中で，第2水準の考察ができるようになるといえる．高等学校の関数指導は，指導要領解説から見ると，第2水準から第3水準への指導として位置づけられる．中学校で式やグラフについての考察にかなり慣れてきており，高校では教育内容の上ではじめから第2水準の典型的な考察である式やグラフを基にした関数指導がなされている．数Ⅰの平行移動による一般の2次関数の学習はその例である．解析幾何的な扱いはこの水準の重要な考え方である．そして，微分積分法を学ぶことを通して関数の変化を関数で考察することができる第3水準に達すると考える．以上の対応は，先に示した生徒の実態に認められるところである．ただし，これは本校の場合であって，実際の水準移行のための指導は，生徒の実態に即して考える必要があることを指摘しておく．

以上の教育課程との対応から水準移行のための指導目標について述べる．中学校では第2水準へ向けての指導が目標といえる．そこでは関数を式やグラフで考えるという第2水準の思考を育成する必要がある．式やグラフという第2水準の研究方法による考察が，第1水準の思考を第2水準へと再組織化すると考えられるからである．高等学校では，第2水準の思考を充実させる現行指導とともに，基礎解析の微積分指導以前でも第3水準へ向けての指導が目標といえる．微積分の指導を含めて，関数の変化を関数で解析する第3水準の思考の育成は，高等学校の重要な目標である．

② 思考水準論からの検討

次に思考水準論を参考にその指導について検討する．

思考水準論によれば，下位水準の生徒は高位水準の思考を特殊な文脈で局所的にできるという．この意味で思考に水準の区別はない．たとえば，運動の速さと距離，加速度と速さの関係は，数学的には微積分によるが，理科では微積分を用いずにグラフの面積を用いて実際に説明されている．また，微積分以前でも変化の割合がどのように変化するかということを実際に考察できる（中学の指導参照）．このような文脈は生徒自身の思考で進められる文脈である．しかし，このような特殊な文脈による局所的な思考は，その思考を一般的なものとする言葉の習得なくして，一般的な思考にならない．微積分の用語を習得してはじめて微積分による運動の一般的議論ができるのである．思考水準論によれば，生徒の思考を高める水準の移行は，生徒自身の特殊な文脈に基づく局所的思考を利用して，言葉の習得とともに進められるといえる．したがって，水準の移行は1時間の授業で達せられるものではなく，長期にわたる組織的な指導が必要である．次に，生徒自身の文脈を作る上での筆者の指導上の工夫と言葉の指導について述べる．

第2水準の思考をする生徒に，突然微分の定義をして微分法を導入したとすれば，生徒は何を始めたのか分からない．分からなければ丸暗記をするという生徒がいるが，これは生徒の思考と指導の間にギャップがあることを示している．思考水準を踏まえた水準の移行のための指導では，このような弊害をなくし生徒の思考で始めることを目指している．そこで，移行のための指導は生徒自身の文脈から始める導入が大切と考える．中学校では，生徒は数を用いた表で関数を論ずる第1水準の思考が可能であり，現象を扱うことに興味を示すことから，数学的モデル化の過程を利用して現象を考察することによる導入が適切と思われる．高等学校でも同様なことがいえるが，多くの生徒の思考は第2水準にあり，数学的な内容にも興味を示すことから，現象の扱いとともに数学的にも意味のある導入が必要と考える．ギャップのある内容を学ぶに当たり，そのギャップを埋めるような数学的な考え方を示す先行オーガナイザーを利用した導入は，そこで有効と考える．実践的な検討は後述する．

言葉の指導は，次の水準の思考を局所的に進める生徒の文脈においてなされることが重要であると考える．定義で始める指導はこの原則に反するものである．この原則は，水準の移行のための言葉の指導が同時に次の水準の思考の仕方の指導であることにかかわっている．この観点から，水準の移行のための指導を言葉の指導によって特徴づける．第1水準への移行は，「数」を用いて変化や対応についての関数の性質を考察することに関しての言葉の指導といえ，第2水準への移行は，「式とグラフ」で変化や対応をはじめとした関数の諸現象を記述したり考察したりすることに関しての言葉の指導といえる．第3水準への移行は，変化の性質を「微積分」を用いて関数によって論ずることができるようにしていく言葉の指導といえる．このような思考の仕方・言葉の使い方の指導では，生徒自身が自ら考える動機をもつことが大切である．単純なパターン暗記のみでは高位水準の思考における真の理解がなされないからである．生徒自身の動機は，生徒の直面する教材にかかわるものである．次に教材について述べる．

③　思考水準を踏まえた教材

思考水準を踏まえた教材の提示は，生徒自身の文脈から関数を考察し，次の水準の思考を達成する上で重要である．しかし，水準を踏まえただけでは，生徒は高位水準の思考を進める必然性を感じない．水準の移行のためには，水準を踏まえて提示される教材は，生徒をコンフリクト（Conflict）な状況におき生徒の思考を活性化させ，次の水準の思考を必然的にもたらす教材である必要がある．そしてその教材を，最終的に次の水準の思考が達せられるように系列化することが必要といえる．

このような教材やその系列の作成は容易な問題ではなく，われわれ教師が日々直面する課題である．ここではその手始めとして，2次関数を例に水準に応じた教材の特徴を述べる．第0水準は，数量関係を認めることができても数量関係の分析が十分できない水準であるから，2次関数を特定することが困難といえる．その意味で適当な教材はない．第一水準では，表や折れ線グラフ，言葉の式を利用して様々の関係の中で2次関数を特定することができる．その意味で，表やグラフ，式に表すことのできる2次関数の事例で，生徒にとって真実性のある教材であれば教材化できよう．振り子・とよを作る，図形の面積などの現象を扱った教材はその事例である．中学校の多くの教材は，この水準かもしくは生徒に局所的な文脈を与える意味で第2水準へ向けての教材といえる．第2水準では，式やグラフによる考察ができるので，平行移動，1次関数との和などの教材が考えられる．最大最小や変化の割合に焦点を当てた教材は，生徒に局所的な文脈を与える意味で第3水準へ向けての教材といえる．第3水準では，たとえば2次関数の局所的な変化を扱う微分係数や接線の教材などがある．以上のように各水準に応じた2次関数の教材を考えることができる．

（2）　関数の思考水準から見た中学校の関数指導

①　中学校の関数指導の留意点

すでに述べたように，中学校の関数指導は，内容から

モデル2以外は比例・1次関数の発想である．どれが正しいか批判・検討し合った結果，モデル2と3が残った．実験によりモデル2が残り，実験を振り返って $y=25x^2$ を導き，10/7 でも成り立つことを確かめた．最後にこれは2次関数であり，振り子の現象が周期と長さについて2次関数で表せることを確認した．生徒の反応はよく，ところどころで歓声が上がっていた．

イ．$y=2x$ と $y=x^2$ の比較

プレテストや第1時のモデルに見るように，1次関数や比例の考えの延長でとらえようとする者が多かった．そこで次に，1次関数との比較を通じて2次関数の概念形成を図ることにした．授業は，$y=2x$ と $y=x^2$ の表とグラフをそれぞれかき比較する課題プリントを出し，考えを発表する形式であった．$y=x^2$ の基本性質は出そろい，共通点として y/x を基に比例に結びつけ，y は x の2乗に比例することを確認した．

ウ．$y=ax^2$ のグラフの特徴

前時の $y=x^2$ の性質についての概念を $y=ax^2$ の場合へ拡張していく．ここではとくにグラフの特徴について考察する．はじめに，$y=x^2$ のグラフが折れ線グラフではなく x 軸に接する曲線であることを実際に認識させる．続いて，$y=\pm x^2$，$y=\pm x^2/2$，$y=\pm 2x^2$ のグラフを描かせ，それぞれの比較を通し $y=ax^2$ のグラフの特徴を学んだ．

エ．変化の割合

最後の授業では $y=ax^2$ の変化の割合について扱い，2次関数の変化の特徴を考察した．比例や1次関数の性質としての変化の割合を，関数の変化の様子を探る道具として扱うことを目指した．ここではできるだけ式やグラフで考える第2水準の場面を工夫した．はじめに，$y=x^2$ で x が1増えると，y は 1,3,5,7……というように奇数の並びで増えたことを復習し，変化の割合の定義を復習する．$y=ax^2$ の変化の割合について簡単な練習をした後，変化の割合が一定でないことを表とグラフで確認した．次に，$y=x^2$ で x の増加量1のときの変化の割合が奇数で増えている規則性を問題にして，一般に変化の割合の変化の仕方に規則性があるのかどうか調べさせる．x が 0.3 や 0.5 から1ずつ増えるときの表を書かせる．表から x の増加量1のとき，変化の割合が2ずつ増えることを見出す．このことをグラフで確認する．グラフで確認しながら，グラフは曲線であるのに本当にどの点でもそうなるかと疑問を投げかける．どのようにすれば証明できるかを問う．時間を与えると，文字を使って示せばよいという意見が出る．x が $l-1$，l，$l+1$ ($l \geqq 1$)のときの表を書き，変化の割合の変化の仕方を調べればよいことに生徒は気づいた．この表から生徒は2ずつ増えることを理解した．そして逆にこの性質を基に $y=x^2$ のグラフを描いた．最後に x が2増える場合，一般の $y=ax^2$ の場合どうなるかを生徒の課題として授業は終わった．

ポストテストの結果は，第1水準ではAが6名，Bが17名の計23名，第2水準が17名であった．ポストテストの結果は，2次関数を学んだ後のこの問題に対しての思考の変容・水準の移行を示すといえる（表-2,3参照）．

③ 思考水準を踏まえた指導の考察

はじめに数学的モデル化の過程を用いた導入の有効性について述べる．概要で示した対象クラスのほかにア．の導入のみを違えた比較クラスを置いた．比較クラスの導入は，現象を直接扱わずに現象を記述した表から始める授業であった．比較クラスの実態は，プレテストでは第1水準のAが15名，Bが16名の計31名，第2水準が9名であり，ポストテストでは第1水準のAが10名，Bが18名の計28名，第2水準が12名である．個別に見ると，対象クラスは第1水準34名中22名の思考の変容が認められるのに対し，比較クラスの思考の変容は31名中8名に過ぎない．このことから現象をモデル化により扱った対象クラスの方が思考の変容が認められる者が多いといえる．理由は次の2点にあると考える．1つはモデル化の過程で現象を扱ったことが生徒の現象を扱う力を養ったと考えられる点，2つは現象を導入で扱ったことが生徒の文脈として適切であり以後の学習の動機づけとなった点である．とくに動機づけとなったことは感想文に認められた．対象クラスでは17名の者が現象を扱った導入が「面白かった，驚いた」と感想を述べたのに対して，比較クラスで導入の感想を述べた者はなかった．現象を扱う指導で数学的モデル化の過程を生徒が踏むことは，生徒自身の真の思考・実際の文脈から始める導入のための重要な手法といえる．

次に対象クラスのプレ・ポストテスト間の水準の移行について個別に見る．思考の変容した者は，第1水準のAからBへ変容した者11名，Bから第2水準へ移行した者5名，Aから第2水準へ移行した者6名という実態であり，計22名が思考が変容したといえる．授業によってAから第2水準へ移行した者が6名なのに対し，AからBへは11名である．この結果から，Aから直接第2水準へ移行した者は少なかったといえる．移行しなかった者は，第1水準のAで23名中6名，Bでは11名中6名である．第1水準のAで移行しなかった者の多くは，ポストテストでグラフの定義域を負まで含めた者であ

見て第1水準から第2水準へ向けての指導として位置づけられ，式やグラフに関する言葉の学習や考えることの指導が重要である．次の3点は，水準の移行の観点から見た従来の指導に対する留意点である．

• 集合と関数

前回の指導要領では，関数は中1から集合を用いて一意対応によって定義された．そのためブラックボックスが利用された．現行指導要領では，関数の概念形成を次第に進め，中3でこれまで学んだ関数の考えを反省する形で集合を用いて定義される．第2水準への移行に際して，関数に対する生徒の考え方は第2水準の研究方法と言葉に応じて改められる必要があり，現行の扱いが適切と考える．また，ブラックボックスの過度の多用は，関数の他の多様な側面に対する生徒の理解を損なう恐れがあるといえよう．

• 事象・実際の現象を扱う．

現行指導要領ではこの点は強調されている．各水準には事象・現象を扱う水準に応じた数学的モデルがあるといえ，水準に応じた事象・現象の扱いを学ぶ必要がある．

• 文字式の導入

中1の文字式の導入で関数の考えは重視されるべきである．第2水準への移行のひとつの契機となる．これまでの数の議論を文字式で考え直す反省の機会を与えるからである．

次に，筆者の試みについて述べる．

② 思考水準を踏まえた2乗に比例する関数の指導

ここでは2乗に比例する関数の指導を例に思考水準を踏まえた指導の試みを述べる．なお，本校の中高一貫教育と第2水準への移行の観点から，筆者はこの教材を「2次関数」と呼んで扱っているので，以下でも2次関数と呼ぶ．指導要領では，この教材は1次関数以外の関数の存在を示すことに視点があるようだ．ここでは水準の移行の観点で扱う．はじめにプレテストの結果を述べ，続いて実践の概要，ポストテストの結果を述べ，最後に水準の移行と指導について検討する．

プレテストの結果は，すでに示した表-2, 3の調査の通りである．第1水準の記述が多いが，その記述には次の2通りある．

A；表・数を基にした記述，グラフは折れ線でかかれている．

B；Aに加えて，$y=5x^2$まで導いた者．式の導き方は，比例や1次関数の延長でとらえようとして比例定数aが$5x$であるとした者が多い．ただし，式やグラフができた段階で考察は止まっている．

Aは表からワンステップの考察で可能な記述であり，Aの記述を前提としたBの記述はより高次の考察である．ただし，式やグラフができればもう考える事柄はないとするのは第1水準の思考である．第2水準の思考では式やグラフを基にした考察もなされるといえる．対象クラスの実態は，第1水準34名中Aは23名，Bは11名である．第2水準は6名であった．プレテストを踏まえて次のような指導計画を作成した．

ア．2次関数の存在　(1時間)
イ．$y=x^2$と$y=2x$の比較　(1時間)
ウ．$y=ax^2$のグラフの特徴　(1時間)
エ．変化の割合　(1.5時間)
オ．問題練習と感想　(2.5時間)

ア.～エ.の指導の流れは，第1水準的な現象の扱いから2次関数の存在を示し，1次関数との比較を含めて2次関数の概念形成を進め，最後に変化の割合の指導で第2水準の式やグラフからの考察を進めるというものであった．次に概要を述べる．

ア．2次関数の存在

プレテストに見るように，多くの者が第1水準の発想をしている．そこで，第1水準の表を扱う議論を中心に2次関数を導くことにした．ここでは，題材として振り子の実験を選んだ．授業の流れは数学的モデル化の過程にしたがった．はじめに糸と硬貨で作った振り子を振って見せ，伴って変わる量はないかを問いた．そして振り子の長さと時間の関係を考えることにした．実験では30秒間に何往復するかで周期を求めることにした．周期が1秒のとき振り子の長さが25 cmであることを実演し，周期が2秒になるのは何cmかを問いた．生徒の予想した長さで実験したところ，周期は表-5のようになった．周期が3秒になるのは長さが何cmのときか問いた．モデルとして次の4つが出た．

モデル1；長さの増し方は25 cmより175 cm

モデル2；長さは周期の2乗に比例して増えるから400 cm

モデル3；0.5秒のときの長さは1秒の長さの1/4であり，2秒では1秒の長さの4倍より，周期3秒では長さは6倍で225 cm

モデル4；2秒100 cm，4秒400 cmより，3秒では中間の250 cm

表-5

周期	0.5	1	10/7	2	3
長さ	6.25	25	50	100	?

り，Bで移行しなかった者の多くはプレテストと同じことをポストテストで記述している．これは，筆者の作った教材系列・指導過程では，学んだ2次関数を現象へ応用する場面が不足していたことに起因しており，その後治療的な指導をした．以上の実態では，第1水準から第2水準への移行が数時間の授業では達せられないことが示唆され，移行には中学校から高等学校への組織的な指導が必要といえよう．

（3） 関数の思考水準から見た高等学校の関数指導

① 高等学校の関数指導

高等学校の関数指導は，指導内容の上から第2水準から第3水準へ向けての指導として位置づけられ，第2水準の思考を充実させることと，第3水準へ向けての変化に注目した指導や微積分等の用語の指導が重要といえる．次の3点は，水準の移行の観点で見た従来の関数指導に対する筆者の留意点である．

• 関数の変化を解析する．

微積分へのつながりを考えるとき，数Ⅰや微分法以前の基礎解析で関数の変化の様子を直観的な扱いに留めていることは問題と考える．直観的な扱いでは変化の様子を解析しようとする微積分の必要性が生じないと思われる．たとえば，微分法へつながる平均変化率は，小学校から中学校にかけて比例定数“1次関数の変化の割合は一定”という議論において，特殊な関数の性質として第1水準で導入される．この性質としての変化の割合は，中学校の指導例に見るように第2水準にかけては関数の変化を記述する道具として扱うことが可能である．数Ⅰや微積分以前の基礎解析においても，変化の割合を関数の変化を記述する道具として扱うことは有効と考える．しかし実際にはあまり活用されずに，微分法の導入において平均変化率として突然考察の対象となる．これは教材と生徒の思考のギャップを生む基と考える．この例に限らず，微積分以前で関数の変化を意識させるさらなる教材が必要と考える．

• 事象・実際の現象を扱う．

指導要領ではこの点は重視されていない．しかし，水準に応じた事象の扱いを学ぶことは必要と考える．ただし高等学校では式やグラフを基にした指導が中心となるので，実際の現象の扱いに際しては他教科との関連・連携を生かすことが重要と考える．

• 写像と関数

中3で関数が集合間の一意対応であることを学ぶ．高等学校では第4水準への配慮から，関数の考えを写像の考えへと拡張していく指導が重要と考える．

次に筆者の試みについて述べる．

② 思考水準を踏まえた微分法導入の指導

基礎解析の微分法の導入を例に思考水準を踏まえた指導の試みを述べる．ここでは，現象に対する変化の考察をすること，数学の形成史に学ぶこと，生徒の考え方から出発してその限界を乗り越えこれまでの考え方との違いを知ること，微積分の考え方を先行オーガナイザーとして示すこと等に焦点を当てた．

プレテストの結果は表-2, 3 の通りである．微分法の指導以前では，生徒の解答の多くが第2水準の記述である．その記述には次の2通りあった．

α；表・グラフ・式から分かることを述べた者

β；αの記述でとくに数列を用いて，表のyの第2階差が 9.8 であることを基に x を n，y を a_n として一般項 $a_n=5n^2$ を導き，$y=5x^2$ を示そうとする者

βの解答をした者は第2水準 34 名中8名いた．しかし，一般に数列の次に微分法に入ることを考慮すれば，生徒のこの発想は注目に値する．この発想に極限の考えが加われば，微分積分法にほかならないからである．微分積分学の形成史においても数列が重要な役割を担ったことは中村幸四郎氏等の指摘するところである．この数列を用いた発想は，第2水準から第3水準へと移行する上でのひとつの重要な契機と見ることができそうである．

プレテストを踏まえて次のように微分法の導入を設定した．

ア．運動の記述　（1時間）

イ．運動の記述の仕方の限界と克服（1時間）

プレテストに見るように多くの者が第2水準の考察を進めており，そこでの運動の記述をしている．ア．では生徒のもつ運動の記述を採り上げ，数列による記述について考察する．イ．ではその記述の仕方の限界を指摘し，極限の発想を基に微分係数を導いた．授業の文脈は先に述べた落体の理論の変遷を参考に構成した．

ア．運動の記述

場面設定として，ガリレオの新科学対話の落体の運動についての記述「静止状態から落下する物体の等しい時間間隔ごとに通過する距離が，1に始まる奇数の比を成すということは未だ何人も証明していない．……放射体の曲線がすでにアポロニウスによって論じられたパラボラにほかならぬことは何人も指摘していない」を採り上げる．そして，ガリレオはどのようにしてこの記述を見出したかを考察の課題とし，落体の運動を表すプレテストの表を示し，この表について考えることにした．生徒の考察は，式（$y=4.9x^2$）グラフをかく者，表から落

下距離の変化を第1階差（平均の速さ），第2階差（加速度）をとることで加速度が一定であることを見出す者，さらに階差数列の和を求め，加速度から平均の速さ，平均の速さから距離を求める者などである．生徒の解答を採り上げる．数列で運動が統一的に記述できる点は生徒にとくに興味深かったようで歓声が上がっていた．次にガリレオの話題に戻る．「奇数の比」の記述の意味が分かった生徒はいなかった．そこで新科学対話の記述を見て，ガリレオが時計の代わりに水量の比を用いたことからその意味を理解した．そして考察の方法が数列の代わりに幾何によったことを見た．最後に，運動の数列による記述，ガリレオの考察には限界があることに触れ，それを課題として授業を終えた．

イ．運動の記述の限界と克服

数列による運動の記述の限界は，瞬間の速さではなくて1秒ごとの平均の速さ（平均変化率）についての記述にあることを指摘し，それを1秒ごとに点をとった折れ線グラフ（折れ線の傾きは平均変化率）と $y=4.9x^2$ のグラフの違いで確認した．その原因は数列が離散量を扱い，連続量を扱わない点にあることを指摘した．そして1秒ごとではなく，さらに微小な区間からなる折れ線グラフによる近似によって，この限界が克服されることを説明した．そして教科書にあるような，ある点における平均の速さの極限による近似的扱いを示して，平均の速さに対する瞬間の速さ，平均変化率に対する変化率の概念を導入した．この極限の発想が，連続量を扱うことを可能にすることを確認し，数列による記述・ガリレオの考察の限界を乗り越えることを指摘した．そして，この発想が微分積分学の誕生におけるネックであったことやニュートンにより導入されたことを指摘した．そこで，極限についての考察を課題に授業は終わった．

微分法の応用の接線の議論まで進めたところで（計8時間），ポストテストを行った．結果は，第2水準は α が9名，β が2名の11名で，第3水準は28名であった．微分法を用いた第3水準の運動の考察をする者が増え，28名中11名が導入の授業と同じ議論をしており，それ以外の者は y' を用いていた．

③ 考察

プレテストに見る生徒の考え方と数学の形成史とを対応づけた導入は，微分法の考え方を示す先行オーガナイザーとして有効であったと考える．理由は指導によって第3水準へ移行した者を見ると，この授業の影響が強く認められるからである．実際，プレテストで β であった8名の内6名が移行している．β の者は授業で自分の発想の限界を知った者である．また，移行した25名中11名が導入と同じ議論を進めたことはこの授業の印象の強さを物語っている．このことから，生徒の思考と高位水準の思考とのギャップを埋めるために，ギャップとなる数学的考え方を生徒自身の立場に立って示す先行オーガナイザーは，生徒自身の真の思考・実際の文脈から始める導入のための重要な手法といえる．

4. まとめと今後の課題

今回の報告では，1章で述べた課題に対して，関数の思考水準の設定と水準を高めるための（水準移行のための）指導を中心に考察した．課題Ⅰ．に対しては，2章で関数の思考水準を仮説として設定し，その妥当性を検討した．3章では課題Ⅱ．に対しての指導を，生徒の思考水準および考察の仕方を踏まえて生徒自身の考察の文脈から始め，思考を次の水準の思考へと高めていく指導によって検討した．そこでは，数学的モデル化や先行オーガナイザーによる手法が生徒自身の文脈で始める導入において適切といえることを指摘した．また，中学校・高等学校の指導を水準の移行の観点から考察し，指導目標および指導上の留意点を述べ，2つの事例で検討した．

本稿の考察において次の3点は不十分でありさらなる課題としたい．1つは，本稿で示した関数の思考水準の仮説に対して，小・中・高にわたる子供の思考の様相の実態を探りさらに検討を進めることである．この課題に関連して，2つは，思考水準よりさらに細かな生徒の能力の層を探る必要がある．とくに今回の報告では，関数指導の系統と生徒の思考の関連を十分検討していない．たとえば高1の調査では，高2の β は認められず α のみであった．これは生徒の能力が指導歴に強く依存していてさらに細かな層が存在することを示唆している．このような層を探ることは，現行教育課程の評価の問題にもかかわっており，とくに検討を要する問題といえる．3つは，それぞれの水準の特徴をさらに明確にして，それぞれの水準の移行に必要な条件および移行のための指導について検討することである．以上の課題についてさらに実践的に検討を進めたい．

関数指導についての研究は，藤本成（埼玉県入間高），山中和人（東京都国立二中）氏等と始めたものである．関数の思考水準の仮説については，筑波大附属中の中学校数学教育研究会の方々から貴重なご意見をいただいた．また，三輪辰郎（筑波大学）・能田伸彦（同）・古藤怜（上越教育大学）・栗原幹夫（富山大学）・長野東各先生をはじめ筑波大附属駒場中高の方々からご指導をいただいた．

参考文献

1) 'English Translation of Selected Writings of Dina van Hiele-Geldof and Pierre M. van Hiele' 1983
2) Alan Hoffer "van Hiele-Based Research" 'Acquisition of Mathematical Concepts and Processes' Academic Press 1983
3) H. Freudenthal 'Didactical Fenomenology of Mathematical Structures' D. Reidel 1983
4) K. Lovell "Some Aspects of the Growth of a Function" 'Piajetian Congnitive-development Research and Mathematical Education' N.C.T.M.
5) 中村幸四郎「近世数学の歴史」日本評論社
6) ガリレオ「新科学対話」岩波文庫
7) 吉田耕作「わたしの微分積分学」講談社
8) 四方実一「関数概念の発達」「数学学習の心理学」金子書房
9) 木村益己「数学教育における先行オーガナイザーの意義と役割」筑波大学教育研究科 MC 論文抄録 S.57
10) 三輪辰郎「数学教育におけるモデル化についての一考察」筑波数学教育研究 Vol.Ⅱ
11) 拙稿「数学化の見地からの創造的な学習過程の検討」筑波数学教育研究 Vol.Ⅱ～V