礒田正美,”関数の水準の思考水準としての同定と特徴付けに関する一考察”,Masami Isoda,’A Resarch of the Characteres of Children’s Development in Function from the Viewpoint of van Hiele Levels’,数学教育学研究, vol.49, pp. 34-38, 1988.

参考文献

1)礒田正美,日数協会誌「数学教育」, vol.69, no.3

2)筑波数学教育研究, no.3~5, 1984-86

3)日数教第 18 回論文発表会要項, pp. 73-76, 1985

4)小山正孝,日数教会誌「論究」, no.47・48, pp. 48-52, 1987

5)小関照純・家田晴行・国宗進, 日数協会誌「論究」, no.47・48, pp.3-23, 1984

6)Dina van Hele-Geldof, ”The Didactics of Geometry in the Lowest Class of Secondary Schoo.”, ’English Translation of Selected Writings of Dina van HieleGeldof and Pierre M.van Hiele’by Brroklyn Project, 1984

7)P.M.van Hiele, ‘Structure and Insight’Academic Press’, 1986

8)W.Bureger J.Shaughnessy,”Characterizing the van Hiele Levels Development in Geometry”, J.R.M.E., vo..17, pp.31-4, 1986

関数の水準の思考水準としての同定と
特徴付けに関する一考察

礒　田　正　美

A Research of the Characteres of Children's Development in Function from the Viewpoint of van Hiele Levels

Masami Isoda

1988

数学教育学論究 49, 50 別刷

論文発表会発表論文抄録

関数の水準の思考水準としての同定と特徴付けに関する一考察

礒　田　正　美*

1. 研究目的と方法

本研究の最終目的は，生徒の思考の発達を踏まえて生徒が高次の数学を達成する為の学習過程を，関数領域において構成することにある。その為には生徒の発達を記述する必要がある。この目的に対する研究方法として van Hiele 夫妻（以下夫妻と呼ぶ）による思考水準論[1]を利用することにした。というのは，思考水準論が，生徒の理解の立場から，特定領域の学習に際しての思考水準という発達段階を記述し，その水準をふまえた学習過程を構成する為の基礎理論であるからである。思考水準論を視点に現行の学習過程を反省すると，関数領域での思考水準の存在が予想された。その水準が明らかにできれば，理論を利用して目的の学習過程が基礎付けられると考えた。そこで，筆者は先に関数領域の学習についての発達水準の仮説を設定し，学習指導による水準の移行について報告した[2]。この報告では，理論的側面を中心に思考水準としての妥当性を検討したが，生徒の発達の実態からの関数の水準の仮説の実証が課題に残った。今回の報告はこの課題を究明することを目標とする。

具体的な課題は次の２点である。

課題Ⅰ．生徒の発達における実際の思考の変容を探ることで，発達水準の仮説を思考水準として同定する。

課題Ⅱ．実態調査を基に各水準の思考の特徴を，重要な能力である表・式・グラフの利用の仕方と思考の文脈について実態に即して記述する。

2. 仮説実証の為の調査方法

2-1. 思考水準としての実証の為の条件

先に報告した関数領域の学習についての発達水準の仮説（礒田 1987）は，以下の５つの水準からなる。

第０水準；事象を，事象の依存関係（数量間の関係等）で考察できる；「日常用語」で考える水準

第１水準；数量間の関係を変化や対応の性質で考察できる；「数」で考える水準

第２水準；変化や対応の性質を，関数の式やグラフで考察できる；「式・グラフ」で考える水準

第３水準；関数の式やグラフの変化の性質を，別の関数（導関数・原始関数）で考察できる；「微積分」で考える水準

第４水準；汎関数を用いて関数空間で考察できる；大学や研究の水準

この仮説は理論的分析を中心として設定された。設定に際して，思考水準の特徴として各水準が思考の対象と方法を備えた言語水準である点を意識した[3]。各水準で用いられる言葉を特徴付けたのが上記の「　」内である。

この仮説を思考水準とみる為には，生徒の発達における実際の思考の実態と変容を探る必要がある（課題Ⅰ）。その実態が思考水準の特徴を備えていれば，水準の仮説を思考水準と認められよう。それには，各水準の思考とその変容の特徴を示す思考水準の条件が必要である[4]。

夫妻は次の条件から思考水準を特徴付けた。

a）方法の変容　　b）言語水準

c）水準の階層性　　d）水準の移行

今回の調査では，学習過程のいくつかの時点における生徒の思考の実態を比較し，その変容を調べる為，学習過程における水準の判定が必要である。ところが，条件 a〜c は水準及び水準間の関係を特徴付けたものであり，学習過程に関する特徴は d のみであって不十分である。実際，夫妻によれば水準間の関係は言語水準として不連続であるが，逆に学習過程[5]は，水準の移行の為にその不連続を埋めるものとして，むしろ連続的な様相を呈する。夫妻の指摘によれば学習過程において水準とは高原状態として認められるものであり[6]，水準の移行を進める生徒の学習活動は連続的に展開されると考えられる。学習過程における思考とその変容を明確にして水準の判定をする為に，水準の移行の為の連続的な学習過程を考慮した思考水準の特徴を加える必要がある。そこで，水準の移行の特徴に関する夫妻の議論を検討し次の条件を抽出した[7]。

e）方法の対象化　　f）思考の文脈依存性

g）水準に応じた概念　　h）水準に応じた文脈

特に条件 f〜h が水準の判定にも有効なことを指摘する。

水準の移行は，教師が意図的に文脈を次の水準へ方向

* 筑波大学附属駒場中高等学校

表-1　各問の解答の水準の判定

	A	B	C	D	E		A	B	C	D	E		A	B	C	D	E		A	B	C	D	E		A	B	C	D	E
中①	1	1	1	1	1	中①	1	1	2	2	1	中①	2	2	2	2	1	高①	2	2	2	2	2	高①	2	2	2	2	2
学②	1	1	1	1	1	学②	1	1	2	1	1	学②	2	2	2	2	1	校②	2	2	2	2	2	校②	3	-	3	3	3
一③	1	1	1	1	1	二③	2	1	2	1	1	三③	2	2	2	2	2	一③	2	2	2	2	2	二③	3	-	2	2	3
年④	1	1	1	1	1	年④	2	2	1	1	1	年④	2	2	2	2	1	年④	2	2	2	2	2	年④	3	-	2	3	3

注・①～④は生徒、A～Eは問、数字は各問の解答の水準の判定結果を表す。
・問Bだけでは第2水準と第3水準の区別はできない(高二②～④の生徒の判定)。

付けることにより，生徒の思考の変容を促した結果と言える。というのは，思考は場面の文脈に依存して進められ (f)，適切な文脈において生徒はより高位水準の思考も可能であるからである。水準の移行では，新しい水準の言語及び概念の獲得や変容が不可欠である (g)。移行に際して，生徒の思考は2つの水準間を行き来する為，ある概念は高位水準に達しているのに別の概念はそうでない状態が存在する。その為特定の概念についての水準の判定はその概念について水準を識別したにすぎない。一方，ある水準に達した生徒はその水準に応じた思考の文脈をもち，下位水準の概念をその水準の思考に応じた概念に改めて扱おうとする態度を有すると考えられる (h)。条件hを視点に加えて判定を進めることで，水準の判定はより確実になる。

以上の条件を基に，水準の仮説を生徒の発達の実態において思考水準として同定する。

2-2．調査方法[3]

調査対象は筆者の勤務校の生徒で，中一から高二まで各学年4名計 20 名である。生徒は無作為に抽出した。調査問題は，第1水準から第3水準の生徒を想定して，関数領域で重要な能力と考えられる表・式・グラフを扱う能力に関係する4項目から以下の5題を作成した。

問A；事象の関数関係の考察（項目1）

物体を高い所から力を加えずに落とす。落としてからの時間と初めの位置から物体が落ちた距離を調べると，次の表のようになった。物体の落下の様子についてわかることを考えて，できるだけ詳しく述べなさい。

問B；表からの立式（項目2）

下の表で x と y にはある関係があります。その関係を調べるのにあなたは何をしますか。何をしたらよいかを述べ，x と y の関係を調べなさい。

問C，D；変化の割合（項目3）

下の表は $y=2x+1$ という式を基に作った表です。下の表を調べると x が1増加すると y は2増加することがわかります。このことから $y=2x+1$ という式について一般に何がいえるか考え，説明しなさい。（Dは $y=2x+1$ を $y=x^2$ に代えた問題）

問E；グラフの特徴の認識（項目4）

$y=x^2$ と $y=2x^2$ のグラフを比較して，わかったことを述べ，説明しなさい。

次に，各問ごとに解答の水準を判定するモデルを，水準の仮説を基に設定した。例えば問Aの判定モデルは以下の通りである。

第1水準；表の数量関係を考察して述べる（式やグラフは求めることもある)。
第2水準；式やグラフを用いて説明する。
第3水準；微積分を利用する。

生徒が属する水準の判定は，生徒のもつ概念の違いや水準の移行期の存在から，全問に同じ水準の解答がなされるとは限らないという問題がある。そこで，全問について同一水準の解答に達したか，もしくは水準の条件hを基にして全問について同一水準の解答を試みた場合に，属する水準を判定した。各問ごとの解答の水準が分かれ，全問について同一の水準の解答を試みない生徒の場合は，下位水準から高位水準への移行期とした。

調査は，5題すべて解答した後インタビューをする方法をとった。インタビューでは，思考の文脈を知る為に「どのようなことを考えたか，もしくは考えようとしたか」を聞き，教えるような質問は避けた。最後に，生徒の進めた解答とは別の方法を教えて解答できるか否か調べたが，その解答は水準の判定には利用していない。

3．調査結果と考察

3-1．調査結果と分析

生徒個々に各問題の解答の水準を判定した結果が表-1である。表-1から，すべての生徒がすべての設問に対して同一水準の解答をするとは限らないことがわかる。例えば，中二の生徒①～④の各問題の水準の判定にばらつきが認められる。属する水準の判定ができた生徒は，

表-2　生徒の水準の分布

<table>
<tr><th></th><th>中一</th><th>中二</th><th>中三</th><th>高一</th><th>高二</th><th>合計</th></tr>
<tr><td rowspan="2">第1水準
(移行期)
第2水準</td><td>4</td><td rowspan="2">(4)</td><td></td><td></td><td></td><td rowspan="2">4
(4)
9</td></tr>
<tr><td></td><td>4</td><td>4</td><td>1</td></tr>
<tr><td>第3水準</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td>1(+2)</td><td>1(+2)</td></tr>
</table>

注）数字は人数を表す。

第1水準では中一①～④，第2水準では中三①～④・高一①～④・高二①，第三水準では高二②の生徒である。

以上の判定において，判定モデルに当てはまらない解答はなかった。水準の仮説を基に設定された判定モデルに当てはまらない解答がなかったことから，この調査の範囲内では第1水準から第3水準までの間に関数について他の思考水準が存在しないことが示唆された。ただしこの実証の確立には，水準間の言語の独立性と相互関係の吟味を生徒の実態においてさらに深める必要がある。

各生徒の水準の判定結果の分布は表-2 の通りである。表から調査対象の生徒について次のようなことが言えよう。中一の生徒は第1水準にあり，中二の生徒は第2水準への移行期，中三・高一の生徒は第2水準，高二の生徒の半数程度は第3水準にある。

次に各水準の生徒の解答の仕方の要点を述べる。

第1水準の中一①～④（比例未習）では，問Aで表を分析して式を求めたり現象を説明したりする。表の分析では x と y の対応を考えるよりむしろ，横にみて y の差をとる傾向がみられる。問Bでは x と y の関係を $y=$～で表現する習慣がない。表の対応を述べる場合は，四則計算を駆使して対応を言葉の式にまとめたり，斜めの対応を記述したりする。関係を知る為にグラフはかかない。問 C, D では，何をすればよいかわからない。特に「$y=2x+1$ について一般に何がいえるか」という言葉の意味がわからない。問Eでは，グラフを曲線でかいて y の値が2倍になるなど指摘した者が2名いた。

第1水準から第2水準への移行期の中二①～④（1次関数既習）は，問Aでは表や式を念頭に考察し，現象に議論が及ばないことがある。例えば表の特徴の説明をして $y=5x^2$ を求め，どんどん増加するなど指摘するが，現象がどうなっているかに言及がなかったりする。問Bでは対応を考えて関係を $y=$～で表現する。グラフをかいてから式を求める者も1名いる。問 C, D では半数が何をすればよいかわからない。問 C, D は1次関数の性質に帰着して説明する者が1名いた。問Eではグラフを折れ線でかく生徒が1名いた。折れ線かどうか質問するとさらに細かく点をプロットして曲線に直した。

第2水準の中三①～④（2次関数既習）・高一①～④（数Ⅰ関数既習）・高二①（微積未習）の解答では，問Aでは式やグラフで現象を一般的に表現し，それを基に計算したり，説明しようとする傾向がみられる。問Bでは，表から式を求めるのにグラフを利用する傾向がみられる。特に，表からすぐに関係が見出せない場合はグラフをかいて考えるか，少なくもイメージすると答えている。問 C, D では，式で計算して証明するケースがほとんどである。問Eでは y の値が2倍，グラフが相似などを説明した。高一の解答は，中三の解答より代数的な傾向があり，問Aでは数列の発想を用いて階差の和から $y=5x^2$ を求めたり，問Bではグラフをかいて関数の種類を調べてから式の係数を連立方程式を解いて決定するなどする。

第3水準の高2②（微積既習）は，グラフや式から観察されたことを微積分を利用して説明しようとした。例えば問Eでは，グラフを比較して一方のほうが狭いという観察をして，その説明を接線の傾きの比較に求めている。

3-2.　課題Ⅰ，Ⅱに対する考察

まず，課題Ⅰに対して，水準の仮説に思考水準としての条件 a～h が認められることを調査を基に考察する。

a）方法の変容；水準に応じて方法の変容が認められる。実際，第1水準の生徒は，表の分析を関数の考察の方法としていた。表の分析では縦横斜など自由にみて分析した。第1水準から第2水準への移行において，式やグラフにより表現してから考察が始まる。例えば表の対応を $y=$～の形で表したり，式を導くのにグラフを用いたりし始める。第2水準では，式やグラフを関数の考察の方法としている。例えば，表からわかることを式やグラフでより一般的に説明しようとし，問 C, D では式で証明しようとする。第3水準では微積分が考察の方法となっている。例えば問Eのグラフの比較では，2次関数のグラフの特徴を導関数である1次関数の比較により説明している。各水準で共通に存在する方法も意味は変わっている。例えば，問Bの表から関係を求める問題で，第1水準の者はグラフをかく力があっても全くグラフをかこうとしないのに対して，第2水準ではグラフをかいた方が関数の様子がわかってよいと指摘し，表からグラフをかいて式を求めようとする者がいる。

b）言語水準；水準によって考えを表現しようとする言葉は変わる。第1水準は数，第2水準は式・グラ

フ，第3水準は微積分による表現をしようとする。生徒は自分より高位水準の言葉が理解できない。例えば，第1水準の生徒は，問 C, D について「式はわかっているし，表の特徴はすでに述べられているから，普通考えるべきことが書いてある。それから一般に何が言えるかといっても…」という種の発言をして，問題の意味や答えるべき事がわからない。問題を理解する為の言葉やそれ以上の分析をする為の言葉をもっていないのである。

c） 水準の階層性；高位水準の者は下位水準の考え方も考察の中で進めている。ただし，高位水準の者は，それをさらに自分の水準の言葉で改めている。例えば，問Eで第3水準の者は，一方のグラフが狭いという下位水準の者と同じ指摘をしてから，微分法で説明している。高位水準は下位水準の思考も含んでいる。

d） 水準の移行；生徒が学習を経て水準を移行することは表-2 に認められる。

e） 方法の対象化；第2水準に移行するに際して，表は関数の考察の方法の中心ではなくなり，式やグラフが中心的方法になっている。そこでは表の分析からわかったことを式やグラフで一般的に説明しようとしている。微積既習の生徒に関数の水準について質問したところ「微分がわかる為にはどうしてもグラフというものが良くわからなければいけない。そうでなければ接線なんか考えられない。グラフがわかる為にはグラフがかけるようになっていなければいけない。その為には表がわかっていなければならない。やっぱりこんな順になると思う」と述べた。この生徒の主張は，逆にたどればまさに方法の対象化である。

f） 思考の文脈依存性；第1水準の生徒でも問Aの落体の文脈でかなり高次の考察ができる。例えば第2水準の意味で問 C, D を理解できない第1水準の一人の生徒は，問Aで直観的に放物線の軌跡までかいた。

g） 水準に応じた概念；例えば，変化の割合は，第1水準では表の差に潜在し，第2水準では式・グラフの変化の説明に利用され，第3水準では変化率の考えも含む。

以上のように水準の仮説に思考水準としての条件 a～h が認められる（h は後述）。このことから，関数の水準は関数領域における思考水準であることが示唆されよう。

次に課題Ⅱに対して，調査から各水準の思考の特徴を，表・式・グラフの利用の仕方と思考の文脈（h）の観点から述べる。表・式・グラフの利用の仕方は次の通りである。第1水準；表・式・グラフの三角関係は認められず，表が関数（関係）の考察の中心である。表；表の分析が関数の考察の主な部分であり，表の関係を説明するのに必ずしも式は利用されず，言葉の式で述べるケースが多い。その関係も，x から y への対応という意識はなく，横や斜め，縦などの四則計算から考えている。式；式は表から求めれば終わりで，それ以上の考察は要求がなければしない。だたし，事象に関する文脈が与えられているとさらに考える場合がある。グラフ；グラフは表からかくが，文脈が与えられない限りかかない。グラフの特徴を述べることは要求がないとしない。第2水準；表・式・グラフの三角関係が認められ，式とグラフが関数の考察の中心である。表；表は式を導いたりグラフを描く際の対象である。「表から関係を述べよ」とは $y=$～の式で対応を表すことであり，その際グラフが表から式を導く為の手段となることがある。式；式は表やグラフから関係を表現したり特徴を説明したりする際に用いられる。グラフ；グラフは表や式で表現された関数の視覚的な特徴や変化の様子を意識したり説明したりする際に用いられる。既知の関数のグラフであれば，グラフと式は結びついており，表からグラフをイメージして関数の種別を判別したり，式からグラフをイメージできる。第3水準；微分積分法を用いて関数を導関数などの関数で考察することが関数の考察の中心である。表；第2水準との違いはない。式；微積分により関数の式から導関数や原始関数を計算し，変化の様子などを認識する。主な関数の特徴がわかっている為，関数の式，導関数・原始関数の式そのものから，関数の特徴を意識した考察ができる。グラフ；グラフの特徴を，微積分を利用して説明できる。

次に，水準に応じた思考の文脈の特徴を述べる。思考の文脈は，「どのような解答を試みたか」という点についてインタビューから把握した。各水準の生徒のもつ水準に特有な文脈について，以下のように言える。第1水準の者は自然や数表に認められる現象に対して表から様々な関係を分析する文脈にある。これは問Bの表の分析を表の斜めの対応で述べようとすることや問Aでグラフや式を導いてからの考察をあまりしない点にみられる。問Aなどの現象による文脈が与えられれば現象を意識して深い考察ができるが，文脈の異なる関数自身の研究（問 C, D）ではその必要を感じず意味がわからない。それに対して，第2水準の者は関数自身の研究の文脈にある。第3水準の者も関数自身の研究の文脈にあるが，特に導関数などの関数による関数の研究の文脈にある。

以上の考察が課題Ⅰ，Ⅱに対する本報告の結論であり，次の2点は今後の関数の水準の研究の継続に有効である。

1．思考水準としての思考の変容と各水準の思考の特徴が示されたこと。

2．各水準の思考の特徴は，各水準の生徒像を示すものとして水準の判別に利用可能なこと。

科研費による共同研究を進めている志水廣（筑波大附小）山中和人（東京学芸大附竹早中）と研究指導者三輪辰郎先生（筑波大）から貴重な示唆と御教示をいただいた。お礼申し上げる。

[注及び参考文献]

1）van Hiele 夫妻の研究及びその後の発展と文献については以下の 2, 3, 5, 6, 8 を参照されたい。

2）拙稿　日数教会誌「数学教育」第 69 巻 3 号(1987) pp.82-92

3）思考水準の特徴について筆者は以下で数学化と関係付けて考察した。筑波数学教育研究第 3 ～ 5 号(1984-86)，日数教第 18 回論文発表会要項 (1985) pp. 73-76

小山は思考水準論の成立と発展について報告した。

小山正孝　日数教会誌「論究」第 47・48 号 (1987) pp. 48-52

4）小関熙純・家田晴行・国宗進　日数教会誌「論究」第 41・42 号 (1984) pp. 3-23 を参考

5）Dina van Hiele-Geldof "The Didactics of Geometry in the Lowest Class of Secondary School" 'English Translation of Selected Writings of Dina van Hiele-Geldof and Pierre M. van Hiele' by Brooklyn Project (1984)

6）P. M. van Hiele 'Structure and Insight' Academic Press (1986)

7）op. cit. 3, 5, 6

8）以下の研究等を参考にした。W.Bureger J.Shaughnessy "Characterizing the van Hiele Levels Development in Geometry" J. R. M. E. vol. 17 (1986) pp. 31-48