礒田正美,志木廣,山中和人, “関数の活用の仕方と表現技能の発達に関する調査研究―小・中・高にわたる発達と変容―”, 日本数学教育学会誌, vol.72, no.1, pp.49-63, 1990, 日本数学教育学会

参考文献

1)都中数研, ”中学校での関数指導について”, 日数教会誌「数学教育」, vol.68, no.11

2)国宗　進,”関数の課題解釈場面における子供の考え方”,日数教会誌「数学教育」, vol.69, no.9

3)張　雅麗,昭和 62 年度筑波大学大学院修士課程教育研究科修士論文

4)礒田,志木,山中,”小中高にわたる関数の発達に関する調査研究”,筑波大学付属駒場中高等学校研究報告第 28 集

5)礒田正美, 日数教会誌「数学教育」, vol.69, no.3,「論究」, no.49,50

関数の活用の仕方と表現技能の発達に関する調査研究

——小・中・高にわたる発達と変容——

磯 田 正 美・志 木　廣・山 中 和 人

A Survey on How to Make Use of Function and Developing Expressional Skills

M. ISODA, *et al.*

1 9 9 0

日本数学教育学会誌 第72巻 第 1 号 別刷

言葉の式や文字の式でより詳しく示される．すなわち，③で関係を表現することになる．これにより変量や関係はより明確に表現される．そして，関係は，関数関係として，表やグラフ，式の特徴によって意識し説明され，④の関係の特徴の認識に至る．例えば，比例であれば「～倍すると～倍」，「商が一定」「～を定数倍すると～」というような特徴である．

このような活動の流れは，小中学校の教材にみられる．ただし，小学校ではあくまで関係にとどまり，関数は扱わない．例えば，陽関数；$y=f(x)$ 表現による x から y への対応式にこだわらないで，陰関数；$f(x,\ y)=C$ 表現も認められている．また，学習を通して得られる知識は，関数の知識ではなく，比例のようなある種の関係の特徴に関する知識である．それに対して，中学校では，さらに③で表現相互の関係や④の関数の特徴を利用した活動が行われる．例えば，表から式を導いてグラフを描くというようにである．一方，小学校では，表・式・グラフの表現相互の関係はほとんど考察されない．すなわち，関係を式に表しても，それをグラフに表すことや，グラフから式を求めることなどは積極的に扱わない．また，既知の関数の特徴や知識を利用して，事象の関係を示すグラフを描くなどもしない．例えば，やかんの温度が下がる様子をグラフに描いて，それから式を導こうなどの議論を通常は扱わない．また，1 次関数のグラフを描くのに 2 点を結べばよいことを学ぶのは中学生であり，小学生の場合，点を細かく取ってグラフを描くのが普通である．

以上のように，小中の活動内容の質的差異は大きいものの，どちらも太い 2 重波線の中での学習活動を経て，特定の関数または関係にかかわる知識を獲得していることが，教材の分析から認められる．

それに対して，上記の活動モデルは，高校の学習活動の典型とは異なるものである．高校での関数の学習過程では，必ずしも事象の扱いは重視されず，むしろ関数自体の代数的・解析的研究が中心になっている．高校の活動過程をモデル化すれば図-2 のようになる．

高校での関数の学習は，普通，事象とは必ずしも関係なく進められる．実際，最初から関数の 3 つの表現形式が利用される．通常，$y=f(x)$ 型の式で表された関数の特徴を分析する文脈で始められ，代数的・解析的な考察が進められ，それぞれの関数自体の特徴を認識する．事象が扱われる場合でもその扱いは導入か応用の場面のみである．実際には，このように事象を意識せずに関数自体を研究テーマとする学習活動は，中学にはじまり，高校で中心的となる．例えば，中学の教科書は常に

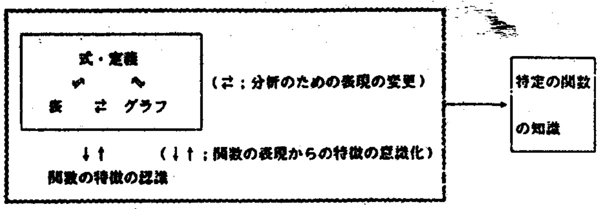


図-2　関数を研究するに際しての活動

事象を扱いながらも，記述の流れ自体は，関数を $y=f(x)$ で定義した後，改めて表・グラフを利用した関数の分析を進める形式になっているのである．中学の場合，図-1 の活動から図-2 の活動へと活動の内容が変わる移行期ともいえ，その移行に際して関数概念や関数の考え方，表現法などの獲得や変容が盛んに進行すると考えられる．

以上のモデルに示される小中高それぞれの段階に応じた関数の学習活動の違いをわれわれは認め，先に示した調査の視点を，この 2 つのモデルから次のように具体化した．

A の「事象の問題解決に際しての関数の考えの変容」は，活動の具体的な流れの差異として認められるように思われる．活動の流れの差異は，次の 2 つの内容を含んでいる．1 つは，全体の活動の流れの差異である．事象の関係の把握に，表に認められた関係の特徴で述べるか，式を利用するかなどは，活動の流れの違いに関わるものである．もう 1 つは，それぞれの活動の過程で，いかなる手続きを利用するかによる差異である．例えば，立式の際にどのような方法を利用するのであろう．その方法としては，グラフを利用するか，それとも表を利用するか，それとも，関係の特徴を利用するかなどである．

B の「関数の表現の仕方の変容」は，技能的意味での，個々の具体的な仕方の差異に関わるものである．例えば，グラフを描く際には，点を細かく取ることもあれば，少数の点のみ押えて，直線や曲線で結んで描く方法などがあろう．

C の「A と B の関連」は，技能が事象の考察に際してどのように生かされているかを調べるものである．

（2）　調査の観点

以上のような視点からの小中高の教育課程の現状を具体的に分析して，発達の実態，特に変容の予想される事柄として，以下のような調査の観点を設定した．すなわち，以下の観点について，われわれはここで「変容」という言葉を先の AB に関係して用いるものである．

観点①　事象を関数で考察する際の考察の方法がかわ

る．

この観点は，視点 A に関わるものである．例えば，小学校では表から法則化，中学校では表，式，グラフを活用した関数の分析，高校ではさまざまの関数と微分積分法というように指導内容が変わっており，それに伴って，すでに述べたように学習活動そのものが変わっている．実際に，その指導のとおり発達しているのであろうか？

以下の観点は，すべて視点 B に関わるものである．

観点②　表の見方が変わる．

例えば，表に対して，小学校では変化の見方（横の見方）と対応の見方（縦の見方）は同列に指導されるが，中学校では対応の見方が強調されるようになる．そして，高校では，変化の見方はほとんど扱われない．一方，対応や関係の表現では，小学校の場合，陽関数・陰関数の区別を強調しないが，中学校以降は陽関数；$y=f(x)$ のみを関数関係の表現式として利用する．いかなる教材の指導がこれらの変容に影響するのであろうか？

観点③　グラフのかき方が変わる．

例えば，グラフを折れ線でかく場合と曲線でかく場合があり，離散量で点だけ取る場合と点を結ぶ場合がある．何の指導がどの程度影響するのか？また，変域の意識は変わるだろうか？

観点④　変化の見方が変わる．

生徒は何から変化を読み取るだろうか？また，変化の割合をどの程度理解しているだろうか？

（3）調査方法

仮設の実態を知るために調査を進めた．調査方法は，同時期に同じ問題で複数の学年に調査をして，集団全体の傾向から個人の発達の傾向を探る形式である．当初，小中高同一問題で調査を行うことを考えたが，先に述べたように小中高の学習活動が違うこと，知識・技能もかなり異なること，生徒が集中して取り組める調査でなければならないことなどの理由から，小中学生対象の「小中問題」と中高校生対象の「中高問題」を用意して，2 系統に分けて調査を進めることにした．両方とも授業時間で 1 時間で解答する記述式テストである．問題数は小中問題 6 題，中高問題 7 題であり，両方に共通な主旨の問題も出題している．

調査は，一般の公立の小学校 4 年から高校 1 年と数学 II の微分既習の高 3 の計 8 学年の生徒に対して行った．指導者および学校間の差異による影響をできるだけ排除するために，小学校 4 校，中学校 3 校，高校 3 校と複数の学校で調査し，それぞれ同じクラス数ずつ選び 150 名前後になるようにして，データを集計した．なお，小中学校では，都市部の一般的な公立校であり，学校間の学力差が激しい高校では平均的な（偏差値でおよそ 45～55 の間）職業高 1 校と普通校 2 校のデータを利用した．実施時期は，62 年度 11～1 月であり，高 3 を除き関数教材を学習した後ということでお願いした．

（4）データの分析方法

この調査では，記述表現がいかなる関数の考え方や知識・技能を反映しているかを視点に，データを分析・解釈していく．実際，記述テストでは，実際の思考過程を知ることは難しいが，何を表現しようとしたかは知ることができる．すなわち，子供なりに適切と考え書くべきと判断した事柄が記述され，意識されないことや当り前と思うことは省略される．仮に，同じようなことを考えていたとしても記述内容や表現が異なるとすれば，それは考える際に利用するスキーマが違うと言える[3]．意識的に書かれた解答は，彼らの関数概念や考え方を表現していく彼ら自身の言葉によるから，その記述は彼ら自身の関数の考え方や知識・技能を反映したものと言える．

発達の考察方法は，解答の分析結果を学年ごとに集計し，学年間で比較することによる．この方法により，学年進行という時系列で集団全体の発達の傾向を知ることができる．解答の集計手順は，次のとおりである．

① 各設問の解答を複数のカテゴリーに分類する
② 生徒の解答をカテゴリーに照して判別する
③ ②の結果を学年ごとに集計する
④ 学年進行に伴う分布変化の分析をする

④で学年間の比較ができるためには，学年間に共通なカテゴリーを設定する必要がある．その際の問題は，児童生徒の個別的で質の異なるスキーマを，教師のもつ一般的なスキーマで判別する点にある．残念ながら，ペーパーテストのような一面的な調査によって学年間の比較をする場合，共通のカテゴリーで分析しない限り比較し難いので，この問題は排除しきれない．この問題を考慮して，カテゴリーの設定は，次のような手順によった．

1）各設問に予想される解答の記述表現を，小中高それぞれの教師の立場から列挙する．
2）各学年 1 クラス程度を分析し，1）で予想した解答の記述表現を補間し，各設問に対する解答を類型し，再度，カテゴリー化する．

このカテゴリー化によって，児童生徒の関数の考え方と知識・技能の発達の実情により近いカテゴリーができる．

（5）学年進行に伴う分布変化の解釈法と調査データの一般性

学年進行に伴う分布の変化の解釈は，現行教育課程に

おける指導内容をもとに行い，必要に応じて2-(1)で取り上げた2つの指導モデルに示された学習指導上の特徴などを参照した．統計的データの読取りと解釈に際して一般性を保つために共同研究者らで何回か協議して検討を加えている．また，日数教静岡大会，中学校数学研究会（事務局；筑大附中）などで報告した際に，経験の深い多くの先生方から貴重な御意見をいただいている．

調査データの一般性を計るために第2回国際数学教育調査と同一の問題を小学生中学生対象の［小中問題］問4（1）で出した．これは比例関係を表に適用する問題であるが，本調査では小6から中3まではほぼ6割の正答率となっており，学年進行によってほとんど変わらないことがわかる．国際調査が中1に対して51.5%の正答率である．都市部の学校であったためか，国際調査より調査対象の生徒の学力がいくぶん高いと言える．［小中問題］と中学生高校生対象の［中高問題］は中学では同一校で実施している．なお，高校生データの一般性は，入学試験の偏差値が平均的である点に根拠をおいている．

3. 調査結果の分析と解釈

以下，2-(2)で示した観点ごとの分析を進める．小中問題は［小中］と，中高問題は［中高］と略記する．データ中の数字は，各学年の対象生徒に対する当該生徒の占める人数の割合を百分率で示したものである．また，それぞれの設問に対する解答カテゴリーを最大アからコまで10用意した．当該カテゴリーの該当者が皆無の場合，そのカテゴリーは載せていない．その結果，例えば以下に示す［小中］問1（1）の「そのわけ」に関するカテゴリーが，アイウ，ケ，コのように飛び飛びになる場合がある．紙数の都合で問題文と論旨に必要な調査結果は最後に一括して示すので参照されたい[4)]．

（1） 観点①に対する分析

事象を関数で考察する際の方法はどのように変わるだろうか．

はじめに，小学校から中学校にかけての学年進行に伴った考察の方法の変容を調べる．［小中］問1（1）を分析する．「まわりの長さの変化に関する解答」では，ア～エを合計した正答率は変わらないものの，適切な解答アが最もできるのは小6であり，中学に入るといったん減少して，曖昧なエが増加し，再びアの見方が育成される傾向がある．また，「そのわけ」に関しては，ウの式による解答やケの「一段ずつ増えている」というような解答の割合がほとんど変わらないのに対して，アの「事象を言葉で具体的に表現した」解答は小6がピークになっている．すなわち，小6まで事象を具体的に分析し記述する能力が育っていること，中学生では事象を具体的に分析し記述することができないかもしくは怠る傾向が認められる．このことから，事象を観察して，まわりの長さの変化の様子や理由を具体的にしかも適切に表現できるのは，小6がピークであることがわかる．すなわち，小学校で事象の数量の対応や変化を事象と関連づけて分析し表現する能力はピークに達し，中学校の指導を受けて，事象そのものを分析考察し，表現する力は失われるか，さもなくば事象が意識にのぼらなくなると考えられる．

このことは，続く問いからより明確にすることができる．実際，（2）（4）から，学年進行とともに変量や関数関係を抽出し表現する力が増大していることがわかる．（2）の解答カテゴリーでエ～キはア～ウの解答を含んでいるが，対応の例や変化の様子を記述する解答アウ，ともなって変わる量を漠然と述べたイのみの解答は学年進行とともに減少する傾向にあるのに対して，それらの内容の関係を明確に抽象した比例関係や言葉の式を利用した解答（2）のエオは，比例学習後の小6中1中2で増大している．これは，事象の単なる記述ではなく，数量もしくは変数間の関係をとらえた記述である．すなわち，学年進行に伴う学習の結果，関係の分析の仕方が事象の具体的な分析から比例や関数の考え方の適用へと変わっている．また，（4）ではともなって変わる量を意識する能力が学年進行とともに増大していることが示唆される．

続く（3）は，学年進行に伴うこのような変容の別の側面を示し興味深い．（3）の正答率は，小6，中3ともに6割程度であるのに対して，中1，中2が4割と低い．この結は，前述2-(5)の信頼性の検討に利用した［小中］問4（1）において，表に対する比例関係適用の正答率が小6～中3まで6割前後であったことと比べると著しい相違である．これは，，中1中2が比例関係の適用に失敗したことを意味しているが，（2）で「比例する」エと答えた生徒が，中1中2で最大の7割に達していることからすれば，たいへんな疑問である．

問題事象に比例関係を認めながらその適用できなかったこの中1中2の特異傾向をさらに分析する．表-1は（2）で比例エと答えた生徒について（3）で正答誤答の分布を示したクロス集計である．（2）で比例と答えて（3）に正答できた生徒は学年進行にかかわらず全体の3割である．この生徒は，問題事象に比例関係を認め正しく適用できたことを意味している．それに対し

表-1　（2）の比例と（3）の正誤

比例	小6	中1	中2	中3
正答	29.5	30.3	33.9	32.0
誤答	7.5	37.7	36.3	21.6

表-2　（2）の比例，問4（1）で正答と（3）の正答誤答

＼（3）	小6 正答	中1 正答	中2 正答	中3 正答
正答	19.2	22.1	23.4	20.4
誤答	4.1	18.0	17.7	10.6

表-3　（2）の比例と立式分布

	小6	中1	中2	中3
エオカキ	56.2	75.4	75.6	73.9
オカキ	18.5	4.9	4.8	19.0

表-4　（2）と問4（1）正答

4 2＼	小6 正答	中1 正答	中2 正答	中3 正答
ア	2.1	1.6	0.0	1.3
イ	4.1	1.6	0.8	3.9
ウ	3.4	2.5	0.0	1.3
エ	23.3	40.2	41.9	30.1
オ	12.3	0.8	3.2	6.5
カ	0.7	0.8	0.0	3.3
キ	2.7	0.8	1.6	3.3
ク	6.8	4.1	6.5	3.9
ケ	5.5	5.7	3.2	7.2
計	61.0	58.2	58.1	60.8

表-5　（2）と（3）正答

＼ 2	小6 正答	中1 正答	中2 正答	中3 正答
ア	1.4	1.6	0.8	0.7
イ	2.1	0.8	0.0	2.0
ウ	6.2	2.5	0.0	1.3
エ	29.5	30.3	33.9	32.0
オ	14.4	1.6	3.2	7.8
カ	0.7	1.[illegible]	0.0	3.3
キ	2.7	0.8	1.6	5.9
ク	4.8	0.8	1.6	2.6
ケ	2.7	2.5	1.6	3.9
計	64.4	42.6	43.5	59.5

て，（2）で比例と答えながら（3）で誤答となった生徒は，比例関係を認めつつも適用できなかった生徒であり，中学生，特に中1中2に顕著である．このことをさらに詳しく説明するのが表-2である．表-2は，（2）で事象に比例を認めてエと答えて，問4（1）で表に比例関係が正しく適用できた生徒の（3）における正答誤答の分布を示している．表-2で，（3）に正答した生徒は事象にも表にも比例関係を適用できた生徒を意味し，（3）に誤答した生徒は事象に適用できなかったかが，表には適用できた生徒を意味する．（3）に誤答した生徒が中学生，特に中1中2に多いことは，中学生が表に比例関係を適用できても，事象に比例関係を適用することが苦手なことを意味している．

中1中2のこのような特異傾向は，具体的には事象からの立式ができなかったことにも表れる．表-3は（2）で比例または立式エオカキと立式オカキの生徒の分布であり中1中2で（2）で比例と答えながらも実際に立式した者が少ないことが示唆される．このような傾向は，問4（1）の正答者の（2）の解答を示すクロス集計表-4でさらに明瞭になる．実際，問4（1）で表への比例関係の適用ができているのに（2）で立式したオカキの者の割合は小6中3が1割を超えるのに比較して，中1中2は少ない．このことは，中1中2の生徒の中には，表で与えられれば比例関係が適用できるのに，事象で与えられた場合は適用できない者が多いことを示している．

すなわち，中1中2の特異傾向から次のことが言えよう．小6は，事象に比例関係を認めそれを適用することができるのに対して，中学生，特に中1中2は，事象に比例関係を認めることができ，表なら比例関係を適用できる生徒でも，事象に比例関係を適用することができない者が多いのである．

続く疑問は，事象への比例関係の適用が苦手の中1中2がなぜ中3では小6レベルまで回復するかである．表-5は（3）の正答者の（2）の解答とのクロス集計である．（3）で正答を得る方法を（2）から推測すると，比例または式によるエオカキの比率は小6が48.3%，中3が49%であり，式によるオカキの比率は小6が17.8%，中3が17%でほぼ同率である．それに対して，中1中2は，比例エはほかと同率であるのに，式によるオカキは極端に少ない．このことから，式に表現する力の回復が，中3で小6レベルまで回復する背景と考えられる．ただし，表-5の言葉の式オと文字式カの小6中3の違いに見るように，式表現の仕方に変容が認められる．このような回復は，中3での受験勉強の影響もあると考える．

以上から小学生から中学生にかけての学年進行による事象の考察の方法の変容をおおまかに述べれば次のように言える．小学校では，事象の数の対応や変化を事象と関連づけて分析し表現する能力が増大し，小6でピークに達する．ところが，中学校の指導を受けることで，事象そのものを意識的に分析し表現する力は失われるか，さもなくば意識にのぼらなくなる．その一方で，関係の分析の仕方は，事象を具体的に分析することから関数関係（ここでは比例）を適用することへと変わっている．しかし，実際に事象に適用する力は，中1中2の場合減退しており，具体的には事象からの立式ができなくなる傾向が認められる．このように事象を分析し関係を適用することが苦手な中学生でも，表に対しての関係

相互の関係の考察に意識を奪われ，事象を見失う傾向がある．高校生になると，それら 3 つの表現相互の関係が確立されるようになり，事象を見失う傾向は減少する．そして，それらを活用して事象を表現する力が高まる．

（2）観点②に関する分析

学年進行に伴って，表の見方はどのように変容するであろうか．

はじめに小学校から中学校にかけての対応と変化の見方の変容を，［小中］問 3 からみていく．（1）（2）で対応をみる縦の見方アイと変化をみる横の見方ウエを比較すると，中 2 までは横の見方にあたるウエが非常に強く，中 3 で縦の見方にあたるアイが増加する傾向にある．対応の見方は，中 1 の関数指導からなされているわけだが，このような傾向は中 3 の関数指導の影響が強いことを意味している．

（1）と比較して（2）（3）は $y=f(x)$ 型の式表現が難しい題材である．実際，式で関係を表すアオの割合は（1）より（2）（3）が低い．（2）で文字式で表すアがほとんど変化しないのに対して，「たして 7 になる」というようなイの記述割合では中 1，中 2 が小学生の半分以下になる．これは中 1 からの $y=f(x)$ 型の式表現の指導によると考えられ，y を x の式で表そうとしてできなかったためと考えられる．

2 次関数の表である（3）は，文字式表記の難しさ，横にみて変化の特徴を記述することの難しさがあってか，中 1，中 2 が特異的な傾向を示す．対応の見方であるアイでは，小学生は「x が 1 ずつ増えるとき，y を x で割ると x の 2 倍」「y を x で割ると 2，4，6，8 となる」というように具体的な数値で説明することからイが増加傾向にあるが，中 1，中 2 でイは減少し，式で表すアが中 3 で増加する．この突然の変化は，小学生のような表現を適切とは考えず，むしろ，対応を $y=f(x)$ 型の式で表そうとして失敗したことが示唆され，中学の指導の影響がここでも認められる．

$y=f(x)$ 型の関数の表現を学んだ後の中 1～中 3 の変化と対応の見方の変容をみると，（1）（2）（3）ともに中 3 で対応の見方が強くなる傾向がある．中 3 で対応による関数の定義指導がなされること，変化の見方で表現し難い 2 次関数を学ぶことが，対応を表現しようとする傾向を増大させると考えられる．実際，（1）で対応を式表現したア，言葉で表現したイの分布を示した表-6 では，この関数が中 1 中 2 で既習であるにもかかわらず，中 3 で増大している．これは中 3 の指導の影響と言える．特に，2 次関数の表が，横の変化の見方で説明できなくなることは，この見方の変容の要因であることが強く示唆される．実際，（3）と（1），（3）と（2）のクロス集計表-7 をみると，（3）で文字式を書いたアの生徒のうち，（1）で式を書いたアオの生徒は 3/4 であり，（2）で式を書いたアオの生徒は 1/4 である．これは，（1）（2）で対応を式で表さなかった生徒が（3）で式で表したことを意味しており，2 次関数の表が対応の見方で記述される傾向を示している．

表-6（1）のアイ

	中1	中2	中3
ア	4.9	6.5	16.3
イ	9.0	9.7	18.3

表-7　中3の（1）と（3）ア
中3の（2）と（3）ア

(1)＼	(3)ア
ア	11.8
イ	0.0
ウ	0.7
エ	2.0
オ	5.2
カ	0.0
キ	0.0
ク	0.0
ケ	3.3
計	22.9

(2)＼	(3)ア
ア	5.9
イ	0.0
ウ	0.7
エ	4.6
オ	0.0
カ	0.0
キ	0.0
ク	9.8
ケ	0.0
コ	2.0
計	22.0

以上から，小学校から中学にかけての表の見方の変容について以下のように言える．小学校中学校を通じて横に変化をみる傾向が強い．対応の見方は，中 1 からの関数の定義にかかわる指導と $y=f(x)$ 型の式表現の指導で育成されると予想されるが，実際に対応の見方が増加するようになるのは中 3 である．その背景には，2 次関数と対応による関数の定義の再指導がある．

次に中学校から高校にかけての表の見方の変容を［中高］問 2 からみていく．中 1～中 3 では，上記の［小中］問 3 と比較して目立った差異はない．変化と対応の見方の変容についても，［小中］問 3 と同様な傾向が見られる．実際，（1）（2）では，対応の見方が強くなるのは中 3 である．そして中 3 以後，変化の見方ウエは減少傾向にあり対応の見方がより強くなる傾向が認められる．特に，$y=f(x)$ 型の立式は，（1）～（4）を通じて特に中 3 以降増加傾向にある．これは，2-（1）で述べたモデル図-1 とモデル図-2 の違いに見られるように高校の学習が $y=f(x)$ 型の式に始まることにも関連し，（3）（4）のように，中 3 以降の関数教材が変化

の見方で考察しにくく，対応を強調した指導がなされることなどから，生徒が変化より対応を式表現する意識が高まっていると考えられる．

なお，(3)(4)の変化を分析するために階差を取る方法が高3の解答でもほとんどみられなかったことから，階差で分析する方法はあまり指導されていないことがわかる．すなわち，高校の関数指導においては表と式の結びつきが強く，表の変化を分析的に考察するような扱いは乏しいと結論できよう．

以上の分析を，表の見方についての学年進行に伴う変容を総合的に学校段階の差異に焦点を当ててまとめると次のように言える．

> 小学校から中学2年までは，表を横に見て変化を記述する(意識する)傾向が高いが，中3以降，表を縦に見て対応を記述する(意識する)傾向が高まり，立式傾向も中3以降増加し，高校では，立式する割合が高まる．これは，中学校の指導を通して，表を考察する際の思考が変容することを物語っている．特に，その契機と言えるのは中3の関数指導である．具体的には，関数の定義指導により対応の見方が強調されることと，変化の見方では表が分析できない関数教材の出現による．定義指導は，教師による対応の見方の意識的な育成であり，表が変化の見方で扱えないというのは，教材自身に潜在している．すなわち，意識的な指導と教材の特徴が契機となり，思考が変容していくと言える．また，中学を受けた高校では，表から変化を読み取る意識は，教材や指導の特徴もあってかさらに弱くなる傾向にあり，対応の見方が強くなる．

(3) 観点③に関する分析

学年進行に伴ってグラフの描き方はどのように変容するであろう．以下では，描き方では，定義域の扱いと，線の種類に着目する．まず，小学校から中学校への変容を分析する．

[小中] 問2(1)から，考察しよう．全般的には，小4小5の生徒が，実験のグラフをかく要領で，点を線で結んでいるのに対して，小6以降，直線を描く傾向は増加していることが認められた．実際，カの棒グラフは実験データを視覚化したグラフであり，表の変域しかグラフを描かないエも同様と考えられる．学年ごとの推移を表-8で見ると小4から小5にかけて，表の範囲に定義域を限ったエは減少し，定義域の広いアオカが増大する傾向にある．小5の算数教材にはグラフの扱い

表-8　定義域の拡張問2(1)

	小4	小5	小6
エ表	32.4	17.2	6.8
オ右へ	6.2	13.3	5.5
ウ左へ	4.8	3.9	12.3
ア両方へ	4.1	7.8	65.1

表-9　定義域の拡張

問2と問5	小4	小5	小6
表と同じ	17.2	12.5	6.2
右へ拡張	1.4	6.3	2.1
両方へ拡張	1.4	4.7	30.1

表-10　問2(2)の正答の求め方

	小4	小5	小6	中1	中2	中3
ア	7.6	3.9	4.8	3.3	4.8	7.8
イ	4.1	7.8	18.5	23.8	11.3	21.6
ウ	9.0	26.6	21.9	18.0	12.1	20.9
エ	2.8	7.0	17.1	5.7	0.8	1.3
オ	13.1	11.7	22.6	32.0	52.4	39.9
計	36.6	57.0	84.9	83.6	81.5	91.5

がないので，カの増大は他教科（特に社会科）の指導によると考える．エが減少しアオが増大することは，水の量と深さの場面に応じて，表の定義域が拡張されていくことを示唆している．小6の比例の指導によってアが増大し中学入学後もほとんど変化しない．

特に定義域の扱いでは，小4では表と同じ定義域のエが，小5では増加方向（右）へ拡張したオがピークであり，小6では0方向へも拡張したアが増大する傾向がみられる．この結果は，事象を意識して表から定義域が拡張される際に，増加方向へ（右へ）拡張する意識が，0方向へ（左へ）の拡張より先に育成されることを示唆される．このことは面積を題材にした[小中]問5でも認められ，小4で表と同じ定義域のキが，小5で定義域を右へ拡張したクが，小6では両方向へ拡張したカがピークを迎えている．問2問5ともにグラフの定義域を同じように考えて描いた者の割合は表-9のとおりで，少数ではあるが，傾向は同じである．

問いの文脈において与えられた定義域を拡張する際に，増加方向である右方向への拡張が意識されやすい背景には，問2(2)の問題のように増加方向での値を要求する教材が多いこと，整数で考えた場合では0に対する値0は通常の問題場面で意味をなさないことなどが考えられる．実際，問2の場面では，水を入れていく文脈は増加方向を発想させ，しかも水量0リットルのときの深さは水を入れていない場面に反する状態を意

味している．

与えられた表の定義域以上に広い範囲のグラフを描く行為は，与えられた事象場面のもつ文脈，表，定義域を表に限ったグラフのいずれかから，特定の関係（特徴）を把握しないとできない行為である．定義域を拡張した生徒は，そのいずれかの意味で関係を把握した生徒と言える．問2（1）で小6でグラフの定義域を拡張する者が増大することは，いずれかの意味で比例関係を把握し，利用したことを意味している．

問2（2）の正答者の解答の求め方を示したのが表-10である．求め方を書かなかったオを除いた傾向をみると，小4が明確な解答傾向がないのに対して，小5以降はウのグラフを利用する傾向が認められ，それに小6以降でイの比例関係を利用する傾向が加わる．小4の多数は表を定義域とするグラフしか描けないためグラフを利用できないと言える．小5では，比例が未習であり，社会科の指導などの影響もあってグラフによる解答が増加している．中学では求め方に関する傾向はほとんど変わらず，小6の延長上にあることがわかる．これは，小6で比例を学んで以降，この問題場面に対する比例の運用能力がほとんど変わらないことを示している．

この事実は，先の3-（1）で述べた［小中］問1で，中1中2の生徒に比例を事象へ適用することに失敗する傾向があったことと，矛盾するようにみえる．しかし，問1では表が与えられていなかったのに対して，この問いでは表が与えられており，問いの内容は［小中］問4（1）の表への比例関係の適用に類似している．すなわち，中学生が，表には比例が適用できても，事象には適用できないという先の論点と整合する．逆に，このことから，問1における中1中2の立式の失敗の要因には，事象から表を作っていき立式の対象としていく過程において，表を作らなかったもしくは作れなかった点があると察せられる．

次に，事象と表からはじまる問5について，グラフを曲線で描いた背景を考える．問いの場面で与えられた文脈の問題もあるが，未習の関数の場合，グラフは反比例のグラフなどから類推して点を曲線で結ぶ方法があり，既習の関数の場合，点をとってから概形を想起し関数の種別を判定した後グラフを書くと言う方法がある．中3生徒の2次関数のグラフなる問5でグラフを曲線で描いたアオと3-（2）で取り上げた2次関数の表である問3（3）とのクロス集計が，表-11である．問3（3）のアオケの生徒は表をみて式もしくは比例関係を特に意識すると考えられる．問5のグラフが曲線のアオの生徒の内，問3（3）でアオケであるのは約1/3である．この1/3の生徒は，表から関係を意識してグラフを描ける者である．問3（3）でアオケ以外の生徒でグラフが曲線になった生徒は，表のみから考えられる可能性は低く，むしろ場面や，反比例の経験など含めて発想したと思われる．また，中1，中2の生徒で曲線のア～オのグラフを描いた者の多くは，2次関数が未習であるから反比例のグラフと場面に発想して曲線にしたと考えられる．

中学校から高校にかけてのグラフの描き方の変容を，定義域の意識と種類に焦点を当てて分析する．3-（1）の［中高］問1のグラフの考察で述べたように，事象からのグラフの定義域を正しく意識したアは，高校で特に多くなる傾向がある．しかし，事象を意識すれば明らかに誤りである負の領域も含めてグラフを描くオは中2～高1でほぼ同率である．

次に［中高］問3の事象無しの表からグラフを描く問題について考察する．問題文が表からグラフを描きなさいという指示なら点を取るだけのキが正しいと言えようが「xとyの関係を表す」という指示があるため，曲線で結ぶ方が正しい．定義域を［1, 7］とする放物線ア，定義域を実数とした放物線イは，学年進行とともに増大する．特に，アのグラフを描く傾向が中学ではあまり変化がないのに対して，イのグラフが中3から増加する傾向があるが，これは2乗に比例する関数のグラフの指導の影響と言えよう．逆に，定義域［1, 7］で折れ線グラフを描いたオの者は，中1が最大で以後減少するが，これは2次関数とそのグラフを知らずに解答した者である．このことは中1中2のアの者の多く

表-11　問5グラフと
問3（3）の表のクロス

表＼グラフの形	ア	オ
ア；対応を式	11.1	5.2
イ；対応を言葉	16.3	4.6
ウ；yの変化	1.3	0.0
エ；xとyの変化	2.0	0.0
オ；アとエ	2.0	0.0
カ；イとエ	0.0	0.0
キ；イとウ	0.7	0.0
ク；空白、誤答	9.8	5.9
ケ；（2乗に）比例	1.3	1.3
計	44.4	17.0

表-12　事象の有無とグラフ

	中1	中2
［小中］問5；曲線	14.7	41.1
折れ線	50.0	31.5
［中高］問3；曲線	34.0	38.7
折れ線	32.1	25.2

が，関係を特定せずに，単に点を曲線で結んだものであることを示唆している．実際，3-（2）で取り上げた［中高］問2（3）の2次関数の表に対して，中1中2で立式した者は少数である．この問いの場合，場面が与えられていないため，式によらずに，点を曲線で結ぶ行為は反比例のグラフの影響と考えられる．このグラフが既習になる高校生では，アとイの傾向がともに高くあわせて9割になっている．［中高］問2（3）で2次の表に対する立式傾向は高校で高まることから，表をみて，もしくはグラフを描きながら，関数の判別を行っていることが，この問いに関する中学校と高校の違いと言えよう．

先に取り上げた事象つきの［小中］問5と，事象なしの［中高］問3の中1中2の曲線，折れ線の割合を比較したのが，表-12である．場面が与えられた［小中］問5で中1が，折れ線で描く割合が特異に高い．一般には，場面があれば，その場面から連続的変化をイメージするように考えられるのと逆の結果である．これは正方形の面積を特定の辺の長さについて調べた実験的なデータとして扱ったうえ，その関係を示す式を意識しないため折れ線となっと考えられる．それに対して，未知の表の情報のみ与えられた問3では，対応関係を表現することができないため，単純に反比例のグラフの描き方を応用して曲線で結んだと考えられる．

以上の分析を，グラフの描き方についての学年進行に伴う変容を学校段階の差異に焦点を当てて総合的にまとめると次のように言える．

> 小4小5では，事象の関係をつかんでグラフを描くという意識ではなく，棒グラフや折れ線グラフというように実験データの特徴を視覚化する表現の1つとしてグラフを描く傾向がある．事象や表，グラフなどに認められる関係を意識して直線や曲線としてのグラフを描くのは，小6以降で，比例反比例のグラフの学習以後になる．比例反比例のグラフのように関係を示すグラフや曲線のグラフの学習は，それまでのグラフの描き方を改める．特に定義域の拡張について言えば，関係を意識することで，定義域は与えられた表より広いものとなる．反比例のグラフは曲線の意識を育てるが，単にそれだけで描けるものではなく，事象や関数が既知であるか否かというような要素が含まれる．既知の関数であれば曲線のグラフになり定義域の拡張も可能になる．グラフの描き方の変容は，その関数のグラフが既習であるか否かという要因は大きい．その意味で事象の関係を意識したグラフを描き始めるのは小6からであり，事象や意識した関係を基に，定義域を拡張したグラフを描くようになるのは，知っている関数が多くなる学年進行とともに増大すると言える．

再度，活動モデルで言うなら，小4小5は，グラフを描いた結果，図-1④の関係の特徴をつかむ．それに対して，小6以降は関数や関係で既知のものが増大するため，グラフを描く以前に，②や③の段階でグラフの概形を想起できるのである．その想起が，定義域の拡張やグラフを曲線で描く結果となると説明できよう．

（4） 観点④に関する分析

学年進行に伴って，変化の見方はどのように変わるだろう．紙面の都合から，結論のみを述べる．中高生の「変化の割合の理解」について述べる．まず理解は非常に乏しい．知っていることを上げさせたが，書かれた内容は学年に関わらず貧しい．定義式を示したあと，2次関数の表を示し，変化の割合が6になる場合を聞いたが，答えが3つあるのに対して，1つ上げられればいいほうで誤答無答が非常に多く，高校になっても5割程度しかできない．できない者が多いことは，定義の理解が乏しいばかりか，求め方自体わかっていない．

変化の割合は，関数の増減を読み取り，微分係数へと定式化していくに際して重要な道具である．複数のグラフを提示して，変化の割合が正になるものを選ばせたが，高1でも1/3程度の者しか理解していない．これは，平均変化率から変化率へという微分法の導入の意味を理解できない者が多いという実態を反映している．

次にグラフからの変化の読取りについて述べる．小中学生に身長と年齢のグラフを読ませたところ，正答率は非常に高かった．事象に関わったグラフの読取りに対して，小中高生に事象と関わりのない関数のグラフの変化の純粋な読取りをさせた．正答率を事象のグラフの読取りと比較するとその差は歴然としており，事象なしの関数のグラフの変化を読み取る力は全般に弱い．このことから，グラフから「xが増加するときyが増加する」というようにxyの伴って変わる変化の様子を読み取る能力は，事象のグラフの傾きの読取りとは異質な能力であることがわかった．小中での活動モデル図-1に関する議論で言えば，小学生が事象を強く意識できるが表式グラフの三角関係での考察が苦手で，中学では三角関係の考察が深まるのであるが，事象無しのグラフの変化を読み取る力は育っていない．実際，関数のグラフの増減の読取りは学年進行とともに弱くなっており，高校で微分積分の学習の結果向上する傾向がみられた．

このようなグラフの変化の読取りができなくなる傾向は，特定の関数のグラフに慣れるほどグラフの形がイメージされるようになり，その変化に新鮮さを感じなくなることに関わると考える．さらに，グラフはその自体で変化の様子を表すとも言え，その変化をさらに言葉で意識的に述べることがあまり扱われていないことが背景にある．そして，中学から高校にかけての活動モデル図-2 において，グラフの利用は，解析幾何的議論の文脈で扱われることが多く，どうしても形を意識することになる．例えば，2 次関数の最大最小などで扱っていることは，変化というよりグラフの形に着目した方程式の計算である．

表からの変化の読取りについては 3-(3) で取り上げたように中 2 までは非常に強いが，以後対応の見方が強くなる．

以上を，学年進行との関わりにおいてまとめると次のように言えよう．

> 中 2 から指導される変化の割合に関する理解はあまり深まらず，微分法の導入の理解は難しい．グラフの変化の読取りは，小学生でも事象の文脈が与えられるとできるのに，中学以降で，グラフ単独で与えられた場合の読取り力は乏しい．事象無しの関数のグラフの読取りの力は微分法の学習で向上する．

微分法は，変化の様子を定式化して表現する方法であり，グラフの変化の読取りの意識が次第に弱くなり，微分法の学習後に再びできるようになるというのは，順序が逆で望ましいとは言えない．変化の割合の理解が乏しいことも微分法の理解から考えれば深刻である．

4　まとめと課題，展望

本論では 1 で述べた課題から 2 で 4 つの観点を取り上げ，それぞれについて 3 で調査結果を分析し解釈した．調査対象が小学校から高校までと広いこと，関数全般にわたる調査であることが従来の研究にない originality である．その finding は 3 で述べたデータとその解釈にある．従来，子供の見方，考え方の変容について具体的なデータで示した研究は少なかった．このデータは学習を通して子供が変容していく様子を物語っている．このような変容の多様さに対して，学校段階が上がるほど，子供の発想に立った授業というより，数学上の見方と形式的な扱いを中心にした授業が進められることが多いように思う．子供が学習に際してもっている考え方をおおまかに示す調査結果は，そのような授業に対して警告を発している．例えば，事象の扱いにおいて，表式グラフの相互表現の扱いに教師は意識を奪われていないだろうか？せっかく小学校で養われた事象を扱う力を損なってである．また，グラフの変化を意識しないとわからない微分法の学習に際して，変化率を利用して導入する場面において，子供がグラフの形状しか意識できなくなっている状況がある．3 で述べた事柄は，授業のあらゆる場面と関わっている．

研究の継続のうえで，3 の考察で得た finding で，特に強調したいのは以下の点である．

① 小学生は事象の数量の変化・対応，さらには関係の考察を，事象を意識しながら考察できるのに対して，中学生は表式グラフの三角関係の処理に意識が奪われ事象を意識しなくなる．高校生になると三角関係に悩まされることなく再び事象を意識的に扱うようになる．

② 中 1 から対応による関数指導をしているにもかかわらず，表の見方では中 3 から縦の見方が強くなる．これは，変化を読み取りにくい 2 次の表の出現が 1 つの要因である．したがって，高校ではさらに縦の見方が強くなる．

③ 表やグラフの見方，描き方などの変容にはその関数が既習か否かが深く関わっている．小 6 の比例・反比例の学習は表の変化の見方を意識させるのに対して，中 3 の 2 次関数は対応の見方を育成する．

以上のような結果が正しいかどうか判別するには，さらに個々の解釈に焦点を当てた科学的な調査が必要であり，それが課題である．加えて，今後の研究のための展望を開くうえで，より深く考察すべき方向を明確にしておく．

1 つは，①で述べた事象を議論するうえでの「思考構造の変容，再構造化」とも呼ぶべき子供の思考の変容は，どのような過程を経て起こるのかという点である．これは②③で述べたことも含んだ「特定の関数の概念，スキーマの習得と変容」に深く関わっているように思われる．この調査では，子供の思考過程を追うことができないため，子供の解答過程で利用した手続きを推察した．どのような概念と手続きを使って考察しているかを明確にすることは，そこでもつスキーマの特定，さらには思考構造の同定に結びつくと考える．

2 つは，礒田がこれまで研究してきた関数の思考水準とここで論じた変容過程との関係である．この研究は実態の把握が目的であるので，3 の分析に際して，思考水準と対照して分析をすることは行わなかった．分析の結

果をみると①で述べた思考構造の議論と思考水準の議論とは整合的であるというのが礒田の考えである．その整合性の検討は，機会を改めて行うとして，この研究は関数の思考水準の研究に上記で述べた特定概念，スキーマの習得と変容による再構造化という考え方を深める視点を沢山含んでいるように思われる．

問題文と調査結果の概要は次ページ以降で示す．

［謝辞］

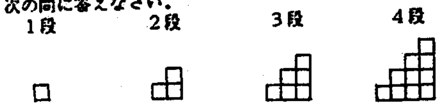
本研究は科研費による補助を得て進められた．指導者である筑波大学の三輪辰郎先生，吉田稔先生にお礼申し上げます．さらに，研究過程において，多くの先生方から，貴重な御意見をいただきましたことにお礼申し上げます．

参考文献

1）例えば，都中数研：中学校での関数指導について，日数教会誌「数学教育」第68巻11号．
国宗　進：関数の課題解釈場面における子供の考え方，日数教会誌「数学教育」第69巻9号
などが参考になる．
2）張　雅麗による昭和62年度 筑波大学大学院修士課程教育研究科修士論文などを参考にした．
3）スケンプ：数学学習の心理学
4）礒田，志木，山中：小中高にわたる関数の発達に関する調査研究，筑波大学附属駒場中高等学校研究報告，第28集において，調査データのみを報告した．
5）関数の思考水準について，礒田は以下で報告した．
日数教会誌「数学教育」第69巻3号，「論究」第49,50号

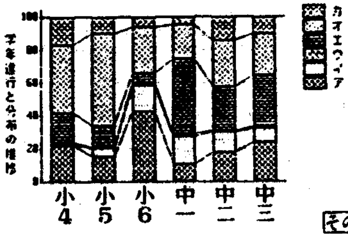
A．小学校中学校問題

問1．1辺の長さが1cmの正方形の紙を、下の図のように、階段の形につんでいきます。
次の問に答えなさい。



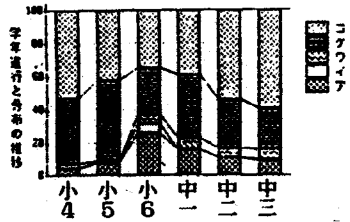
(1)．階段の段数を増やしていくとき、まわりの長さはどのようにかわっていきますか。
また、そのわけをかきなさい。

まわりの長さの変化に関する解答



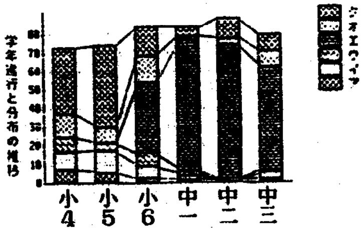
ア．4cmずつ増えていく。
イ．2倍，3倍と増えていく。
ウ．正しい式をかいた。
エ．その他：「増えていく」，
「同じように増えていく」
オ．誤答：「2倍になっていく」
「1つずつ増えていく」
「たて、よこ、1cm増える」
カ．空白

そのわけ



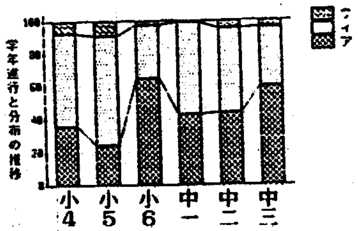
ア．事象を言葉で表現する．「正方形の1つのまわりの長さは4cmだから」「4つずつ辺の長さが増えていくから」「1段増えると4cmずつ増えるから」「正方形の4辺の分増える」
イ．表から
ウ．言葉の式(比例も含む)
ケ．その他(誤答を含む)
「1段ずつ増えているから」
コ．空白

(2)．段数とまわりの長さとはどのような関係になっていますか。



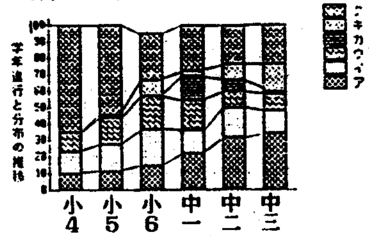
ア．具体的に1例を記述．「段数が4だと、縦の長さも4になる」など
イ．増えれば増える。
ウ．1段増えれば、4cm増える。
エ．比例する：ア〜ウとの複合含む。
オ．言葉の式：ア〜ウとの複合含む。
カ．文字(x，y，△，□)式：ア〜ウとの複合含
キ．オ又はカと比例：ア〜ウとの複合含む。
ク．誤答，その他
ケ．空白

(3)．階段が10段のとき、まわりの長さは何cmですか。



ア．40cm
イ．誤答
ウ．空白

(4)．階段の段数を増やしていくとき、ともなってかわるものはなんですか。
（例．まわりの長さ）



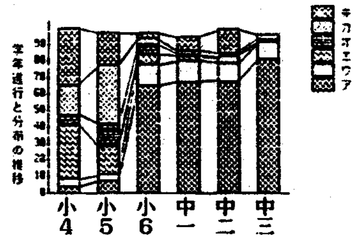
ア．面積
イ．正方形の数
ウ．たて，よこ
カ．その他の正解
キ．正解を2つ以上記述
ク．空白，誤答

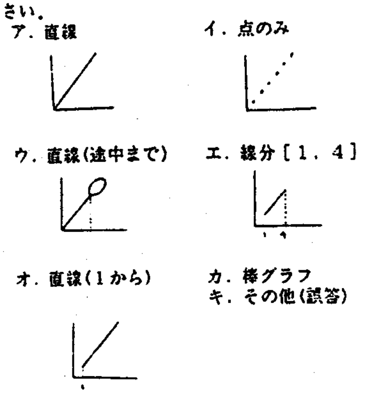
2．直方体の形をした入れ物に、水を入れていって水の深さを測ったら次の表のようになりました。

水量(ℓ)	1	2	3	4
深さ(cm)	1.5	3	4.5	6

グラフ用紙(目盛のみ軸は未記入)

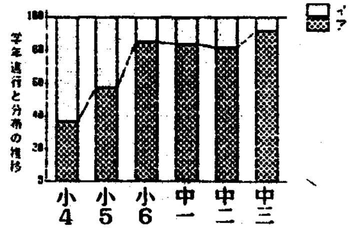
(1)．水量と深さの関係を右のグラフにかきなさい。





(2)．水を7ℓ入れたとき、水の深さは何cmになるでしょう。

正誤判定



ア．正答(10.5cm)
イ．誤答

3．次の表をみて考えたこと、気がついたことをかきなさい。

(1)

x	1	2	3	4
y	4	8	12	16

ア．たてに見て式をかく；$y=4x$，$x+y=7$，$y=2x^2$

イ．たてにみて、言葉で説明する：「xを4倍するとy」

「(3)で、xが1ずつふえるとき、yをxでわるとxの2倍」

「xとyの差が〜」「yをxで割ると2，4，6，8となる」

ウ．横にみて、yの変化のみ記述

エ．横にみて、xとyのともなって変ることに関する記述

オ．アとエ

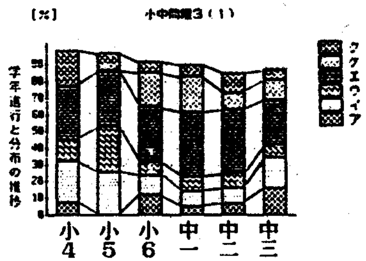
カ．イとエ

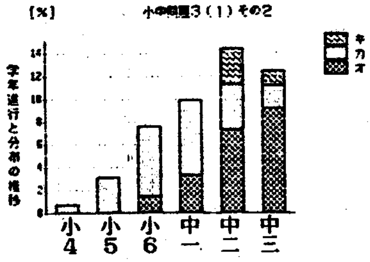
キ．イとウ

ク．空白、誤答((2)で反比例)

ケ．(1)，(3)で比例のみ記述

コ．(2)で反比例とア〜キの複合



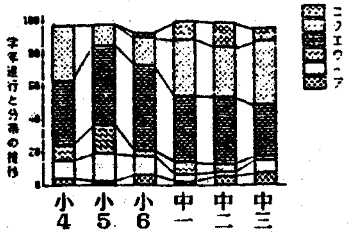


	小4	小5	小6	中1	中2	中3
縦アイ	32.4	25.8	23.9	13.9	16.2	34.6
横ウエ	45.2	60.9	41.8	48.3	48.6	34.6
両方オカキ	0.9	3.1	7.6	9.9	11.3	11.2

(2)

x	1	2	3	4
y	6	5	4	2

分類カテゴリーは(1)と同じ。

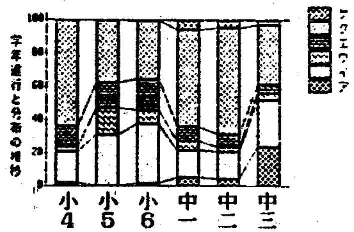


	小4	小5	小6	中1	中2	中3
縦アイ	15.1	19.5	17.8	6.6	8.0	15.0
横ウエ	48.3	65.6	55.5	47.6	45.1	31.0
両方オカキ	2.1	2.3	6.9	0.0	0.8	4.6
＋反比例コ	0.7	0.0	2.7	11.5	15.3	7.8
誤答無答ク	33.8	12.5	17.1	34.4	30.6	38.6

(3)

x	1	2	3	4
y	2	8	18	32

分類カテゴリーは(1)と同じ。



	小4	小5	小6	中1	中2	中3
縦アイ	20.7	31.3	37.7	21.3	20.1	50.4
横ウエ	15.2	31.2	26.9	14.7	10.5	9.1
両方オカキ					1.6	3.4
比例ケ			0.7	5.7	4.8	3.3
誤答無答	64.1	37.5	34.9	58.3	62.1	34.0

4．それぞれの問の答えをア〜オから選び○でかこみなさい。国際数学教育調査比較問題

(1)．下の表は、yがxに比例するときのx，yの値をあらわしている。PとQの値は、次のどれですか。

x	3	6	P
y	7	Q	35

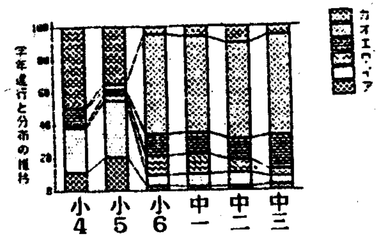
ア　P＝14，Q＝31

イ　P＝10，Q＝24

ウ　P＝10，Q＝31

エ　P＝14，Q＝15

オ　P＝15，Q＝14



(2)．下の表について、m，nの関係をあらわしているのは、次のうちどれですか。

m	1	2	3	4
n	3	5	7	9

ア　$n=m$　　イ　$n=3m$

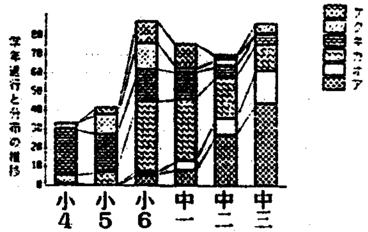
ウ　$n=-m\times m+1$　　エ　$n=m\times m+1$

オ　$n=2m+1$

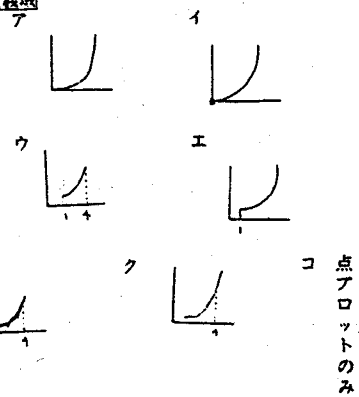
5．正方形の1辺の長さをxcmとし面積をycm²とすると、次の表のようになります。xとyの関係を表すグラフをかきなさい。

x	1	2	3	4
y	1	4	9	16

目盛を与えたグラフ用紙
縦軸は面積、横軸は辺の長さ



グラフの定義域



6．下のグラフは、ある人の各年齢における身長の記録をグラフに表したものです。次の問に答えなさい。

(1)．4才のときの身長はおよそ何cmですか。

(2)．身長が100cmを越えるのは何才からですか。

(3)．身長が最も伸びたのは何才から何才ですか。

(4)．身長が伸びなくなったのは何才からですか。

B．中学校高等学校問題（その１）

問１．２５ℓはいるタンクに１ℓ水が入っています．このタンクにさらに水を入れる．タンクの水量の変化の様子が知りたい．タンクの水量を最初の３分間だけ観察すると次のようになりました．

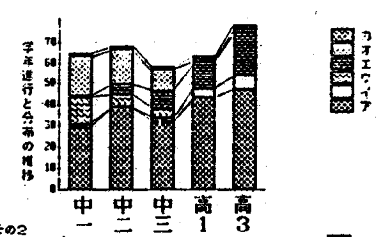
時間（分）	0	1	2	3
水量（ℓ）	1	5	9	13

グラフ用紙

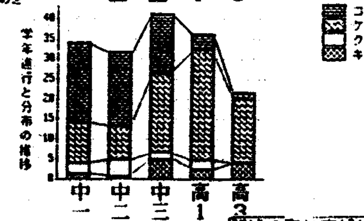
タンクの水量の変化の様子についてできるだけくわしく述べなさい．

記述の内容

ア．毎分４ℓ
イ．式，言葉の式
ウ．グラフ：「１次関数のグラフ」「切片が１で傾き４」
エ．ア＋イ
オ．ア＋ウ
カ．イ＋ウ
キ．ア＋イ＋ウ
ク．比例
ケ．比例とア〜キ
コ．その他

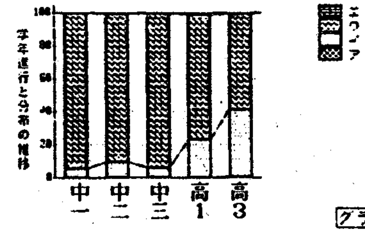


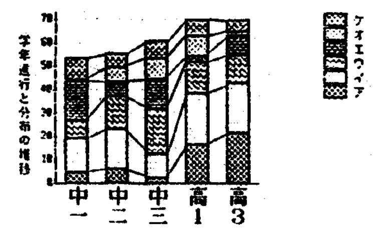
その２



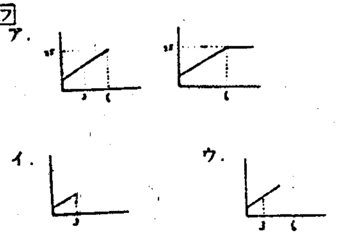
記述の際に変域に言及するかどうか

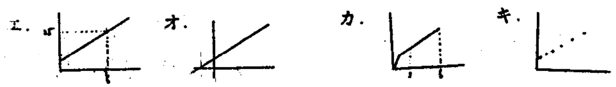
イ．変域０〜６分
ウ．変域の記述なし





グラフ





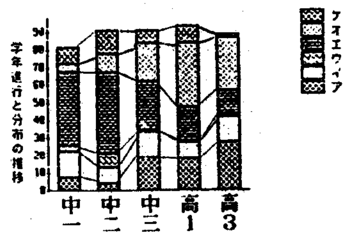
ク．棒グラフ
ケ．その他誤答
コ．無答

問２．次の表をみて気がついたことを述べなさい．

(1)

x	0	1	2	3	4
y	0	2	4	6	8

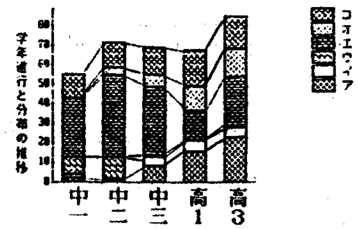
ア．縦に見て式をかく．「ｙ＝４ｘ」「y/x=1」
イ．縦に見て言葉で説明する．
「ｘを４倍するとｙ」「２倍に比例」「(3)でｘが１増えるとｙをｘで割るとｘの２倍になる」「ｘとｙの差が〜」「ｙをｘで割ると〜」
ウ．横に見てｙの変化のみ記述
エ．横に見てｘｙのともなって変ることを記述
オ．アとエ
カ．イとエ
キ．イとウ
ク．空白，誤答，(2)で反比例とのみ記述
ケ．(1)，(3)，(4)で比例とのみ記述
コ．(2)で反比例と１〜７の複合：誤答



(2)

x	0	1	2	3	4
y	10	8	6	4	2

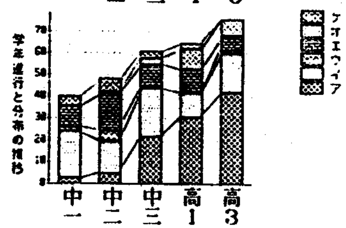
分類カテゴリーは(1)と同じ．



(3)

x	0	1	2	3	4
y	0	2	8	18	32

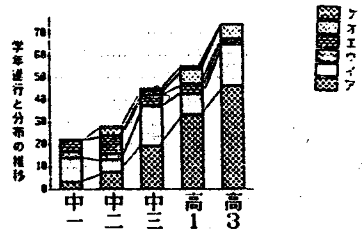
分類カテゴリーは(1)と同じ．



(4)

x	0	1	2	3	4
y	0	1	8	27	64

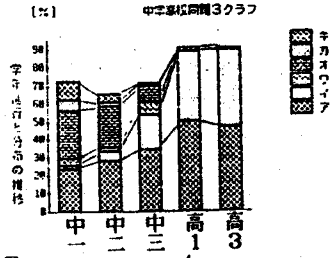
分類カテゴリーは(1)と同じ．

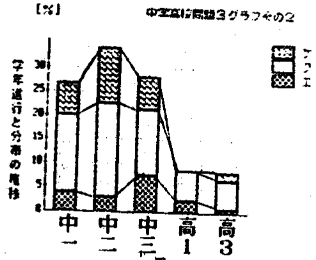


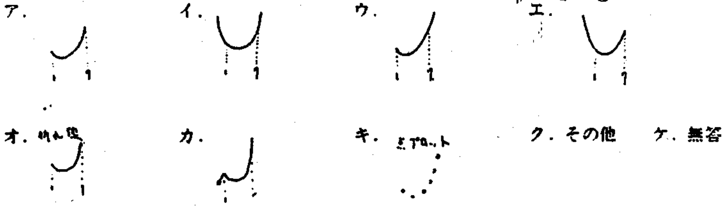
問3．次の表からxとyの関係を表すグラフをかきなさい。

x	1	2	3	4	5	6	7
y	4	1	0	1	4	9	16

グラフ用紙（xy軸原点記入済み）







ク．その他　ケ．無答

問4．次の表でxとyの関係がy＝2x＋1で表されるとき、表の空欄をうめなさい。

x	2	5	
y	5		15

問5．関数y＝x＋2のグラフをかきなさい；中1
関数y＝x²のグラフをかきなさい；中2
関数y＝x³のグラフをかきなさい；中3～

グラフ用紙（xy軸原点記入済み）

問6．グラフをみて次の問いに答えなさい。
y＝2xのグラフ(中1)，y＝－2x＋2のグラフ(中2)，中3～；y＝1/4x²のグラフ

(1)　表の空欄をうめなさい

x	1	
y		8

yの値；ア．正答
イ．誤答

xの値；ア．正答
イ．＋6のみ(中3～)
ウ．－6のみ(中3～)
エ．誤答

(中3～；x＝1のときy＝□であり，y＝8のときx＝□である)

(2)　どんな関数のグラフであるかをのべなさい。

(3)　グラフの変化の様子を述べなさい。

問7．変化の割合について次の問いに答えなさい。ただし，(変化の割合)＝$\frac{(x\text{の増加量})}{(y\text{の増加量})}$です。

(1)．変化の割合について知っていることを述べなさい。

(2)．次の表で変化の割合の値が6になるのは，xがいくつからいくつまで増加するときですか。

x	0	1	2	3	4	5	6
y	0	1	4	9	16	25	36

(3)．下の①～④のグラフでxが増加するとyは常に増加するのはどれですか。
①．y＝－2x　②．y＝x²　(x≧0)　③．y＝2x＋1　④．y＝－2x²

(4)．上のグラフで変化の割合の値が必ず0以上になるのはどれですか。