

磯田正美, “数学化の立場からの学習指導に関する事例的研究—分割数 (number of partitions) の授業分析—”, 日本数学教育学会誌, vol.72, no.9, pp.36-45, 1990, 日本数学教育学会

参考文献

- 1)古藤怜, “Do Math.の指導”, 高校通信東書[数学], No.252
- 2)H.Freudenthal, ”Why to teach mathematics so as to be useful ?“, Educational Study in Mathematics, Vol.1
- 3)中島健三, “算数・数学教育と数学的な考え方”, 1981, 金子書房
- 4)平林一栄, “数学教育の活動主義的展開”, 1987, 東洋館
- 5)古藤怜, “課題学習について”, 数学教育研究, no.4, 上越教育大学数学教室
- 6)川口延, “問題解決の事例を通して考察した帰納推理の展開の様相と要因について”, 論究 vol.1
- 7)柴田敏男, “学校数学とAxiomatics”, 会誌, vol.55, no.7
- 8)島田茂, “算数数学科におけるオープンエンドアプローチ”, 1977, みずうみ書房
- 9)三輪辰郎, “数学教育学におけるモデル化についての一考察」筑波数学教育研究第2号、
- 10)熊田信彦, “オープンアプローチによる指導の研究”, 1984, 東洋館
- 11)島田和昭, “数学化をめざした授業”, “みんなが答えを出せる算数の授業”, 明治図書
- 12)内田洋一, “数学的な考え方の評価”, 会誌, vol.71, no.3
- 13)飯田慎司, “シミュレーションからの数学的活動における創造性の開発について”, “数学教育のパースペクティブ”, 1989, 聖文社
- 14)筑波数学教育研究, no.3, pp.69-71
- 15)埼玉県数学教育研究会誌, pp.30-31, 1985
- 16)筑波数学教育研究, no.4, pp.86-100
- 17)第 18 回数学教育論文発表会要項, pp.69-81
- 18)教育出版 教科通信数学特集, No.88, pp. 4-6
- 19)筑大附駒場中高 研究報告第 26 集, pp. 157-174
- 20)筑波数学教育研究 第 6 号, pp. 124-134
- 21)日本数学教育学会誌 数学教育, vol.69, no.11, pp. 23-32
- 22)筑波大学学校教育部紀要, vol.10, pp. 53-63
- 23)日本数学教育学会誌 数学教育, vol.69, no.3, pp. 2-12
- 24)日本数学教育学会誌 数学教育学論究, vol.49・50, pp. 34-38
- 24)日本数学教育学会誌 数学教育, vol.70, no. 1
- 25)第 22 回数学教育論文発表会論文集, pp. 7-12
- 26)杉山吉茂, “公理的方法に基づく算数・数学の学習指導”, 東洋館
- 27)山本幸一, “順列組み合わせと確率”, 岩波数学入門シリーズ

28)Erich Wittmann, "The Complementary Roles of Intuitive and Reflective Thinking in Mathematics Teaching", Educational Study in Mathematics, Vol.12

29)I.ラカトシュ, "数学的発見の論理",1980, 共立出版

30)竹内芳男・沢田利夫, "問題から問題へ", 東洋館

数学化の立場からの学習指導に関する事例的研究

——分割数 (number of partitions) の授業分析——

磯 田 正 美

A Case of the Teaching from the Ground of Turning into Mathematics

——An Analysis of Teaching Number of Partition——

M. ISODA

1990

数学化の立場からの学習指導に関する事例的研究

—分割数 (number of partitions) の授業分析—

磯田 正 美*

1. 研究の経緯と目的, 方法

子供が数学する¹⁾こと, 数学化²⁾すること, 一般的な言葉で言えば「創る」こと, そして, それを通して学習することは, 従来から算数数学科の学習指導の課題となってきた。その背景には, 数学の1つの本質は創造的な活動にあるという認識があり, その人間的な活動による知性的な喜びの中で算数数学を学ぶことに意義を認め, その学習を通して人間形成を図ろうとする目的があると見える³⁾。しかし, 数学を創る授業とはいったいどのような授業を指すのであろう。「創る」という語は観念的には共感しやすい言葉でよく利用されるが, 実際にはその意味は明瞭でない。例えば「いかなる過程を経て数学ができるのか, そこではいかなる活動が展開されるのか, どのような学習指導過程なら数学を創ったと言えるのか」というような問題そのものを対象とした研究⁴⁾は, その語の利用度と比べると多くない。一方でこの問題は, われわれが「創る」立場で授業実践を進めようとするとき実際にしている問いであるから, 数学教育学上の問題として考察の必要があると言えよう。

また, 一口に数学を創る立場からの学習指導と言っても, 対象とする生徒の個性・諸能力や学級集団のもつ特徴などに応じて扱う教材や授業形態が異なるのが通常であり, 1つの授業も対象とする生徒や教師の立場なしには語れないのが実際である。しかし, そのように多様で未知の変数を備えた学習指導においても, その過程は「数学の創造過程として共通の特徴を備えるのではないか」というのが筆者の立場である。筆者は, 上記の問題に対する研究に際して, その特徴の一面を明確化するために「数学化」という語を用いてその記述枠組みを考察してきた。その研究の目的は「数学化の立場からの学習過程を考察することにより, 創造的な学習指導を実践するための基礎的究明を図ること」にある。具体的には, 数学と子供に関わる次の問題について考察を進めている⁵⁾。

問1 どのような活動を進めれば数学化と言えるのか?

問2 子供がその活動を進めることができる前提にある子供の理解状態は, どのような状態か?

本稿は, 問1に対する考察の一環であり, 具体的な課題は, 「分割数」を教材にした(筆者が創造的と考える)授業過程を, これまで考察してきた数学化の枠組みから分析することにより, 学習指導の過程でみられる数学化の特徴を明らかにするとともに, 数学化の学習指導のかかえる問題を示す⁶⁾ことにある。本稿作成の意図は, これまでの考察してきた数学化の枠組みを実践的に検討し, 創造的な学習指導の過程を構成したり吟味したりする際に, その枠組みが実際に活用できることを示すことにある。考察の過程では, これまでの筆者の枠組みにない杉山吉茂氏の公理的方法⁶⁾と数学化の関わりについてもあわせて検討する。

2. 分割数 (number of partitions) の授業

(1) 教材の紹介と意図

分割数とは「自然数 n を自然数の和に分解する場合の数(ただし n 自身も1通りと数え, 分割した際の大小順序は考慮しない)を言う⁷⁾。例えば, 4の分割数は図-1の5通りである。現代数学上では, 分割数は組合せ論の1つであるが, 代数学などでも活用される数え上げの方法でもある。教材化は, フィボナッチ数のように, 階差に単純な規則性がない数列の例として高校生向けに考えることもできる。

$$\begin{aligned} 4 &= 4 \\ &= 3 + 1 \\ &= 2 + 2 \\ &= 2 + 1 + 1 \\ &= 1 + 1 + 1 + 1 \end{aligned}$$

図-1

以下では, パターン発見の教材として筑波大学附属駒場中の中1の生徒を対象に1学期に実践した。実践の意図は, 数学とは何かについて考察する材料を, 中学入学時に提示したいためである。教材開発に際して, 文字式未習のため, 次の(2)で示すような分割数の表を考案した。そして, その表を活用したパターン発見の教材研究から, (3)で述べるような数学化の過程をあらかじめ

* 北海道教育大学岩見沢分校

予想して、授業過程を計画した。

(2) 授業概要

授業は4時間からなる。分割数は、 n が大きくなると書出し作業自体に時間を要することなどから、毎時間課題レポートを課して、授業を進めた。以下、教師T、生徒Sの発言の一部要旨を示す形式で概要を述べる。

第1時；

問 自然数を自然数の和で表す。表し方は何通りあるだろうか？ただし、元の数も1通りと数え、和を書き並べる順序は考えないものとする。

例. $1 = 1$ (1通り) $2 = 2$ (2通り) $3 = 3$ (3通り)
 $\qquad\qquad\qquad = 1 + 1 \qquad = 2 + 1$

「3の2分割は2+1の1通り」
 「3の分割数は3通り」という読み方も指導

T_1 ; 4の分割数は、 S_2 ; 5通り、 T_3 ; 100 だったら、 S_4 ; ? T_5 ; 簡単な書出し方や数え方、公式みたいなものがあるといいね。調べてみよう。～以下、8の分割数を考えさせる。直接8の場合を書き出そうとする者と、小さい数から順に書き出して帰納的に求めようとする者に分かれる。それぞれ発表させる～

表-1

| | | | | | | | | |
|----|---|---|---|---|---|----|----|---|
| 数 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
| 通り | 1 | 2 | 3 | 5 | 7 | 11 | 15 | |
| | 1 | 1 | 2 | 2 | 4 | 4 | 8 | |

S_{12} ; 表-1で、差は2つおきに2倍になるから8のときは23通り。 T_{14} ; いいですか。 S_{15} ; 22通りだ!
 T_{16} ; 数え残さないか。 S_{17} ; やっぱり22通り。 T_{18} ; 規則は狂うな。決まりはないのかな。～何通りあるか知るうまい方法や書出し方の工夫を考えることを課題に終わる～

第2時; 1から10までのすべての書出しと前時の集計表をプリントして配付する。生徒が考えてきたことの発表を中心に進行した～ T_{19} ; 決りはありましたか。
 S_{20} ; 8から先で狂ってしまう。 T_{21} ; この表からは見づかりそうもないな。もっと詳しい表を考えた人いる。
 S_{22} ; 決りを探そうと思って、横に数、縦にその数を幾つに分割するかで、分割の仕方がそれぞれ何通りあるのかの表を作った。でも、特別な決りは見つからなかった。

表-2

| | | 自然数 | | | | | | | | | |
|--------|----|-----|---|---|---|---|----|----|----|----|----|
| | | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
| 分 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| | 2 | | 1 | 1 | 2 | 2 | 3 | 3 | 4 | 4 | 5 |
| | 3 | | | 1 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 7 | 8 |
| | 4 | | | | 1 | 1 | 2 | 3 | 5 | 6 | 9 |
| | 5 | | | | | 1 | 1 | 2 | 3 | 5 | 7 |
| | 6 | | | | | | 1 | 1 | 2 | 3 | 5 |
| | 7 | | | | | | | 1 | 1 | 2 | 3 |
| | 8 | | | | | | | | 1 | 1 | 2 |
| | 9 | | | | | | | | | 1 | 1 |
| | 10 | | | | | | | | | | 1 |
| 分割数(和) | | 1 | 2 | 3 | 5 | 7 | 11 | 15 | 22 | 30 | 42 |

例えば

$4 = 4$ 1分割が1通り
 $= 3 + 1$ 2分割が2通り
 $= 2 + 2$ 3分割が1通り
 $= 2 + 1 + 1$ 4分割が1通り
 $= 1 + 1 + 1 + 1$ 計5通り

T_{23} ; 詳しい表だな。何かわかることはないかな。

S_{24} ; 斜めに、1, 1, 2, 3, 5, 7と、ある所から同じ数が並んでいるようだ。 S_{25} ; 斜めにでる数が、下の和の欄と同じ数が出てくるのではないか。 T_{26} ; 実際に書き出すことなくこの表が作れば、すぐに何通りかわかる。この表はどんな決りでできているのかな。 S_{27} ; ?
 T_{28} ; (生徒が答えられないので) 見方を変えて、具体的な書出し方からもう一度考えてみよう。書出し方について工夫した人いますか。～工夫した内容を発表させる。樹系図や書式の工夫など、さまざまな発表があった。発表では苦勞した点を聞いた～
 S_{30} ; 最後に1加えたと、前の数の書出しを使って書出しの一部が書ける(図-2)。

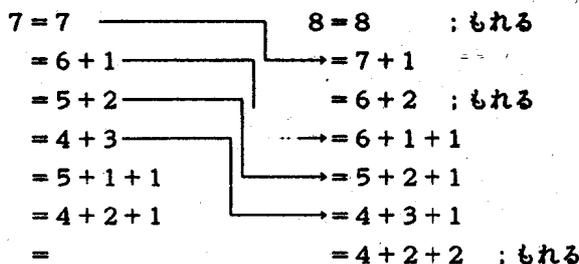


図-2

～それぞれ面白いと評価した。どれが良いか挙手させたが、自分の慣れたやり方を好む傾向であった。どの方法も数えもらしやダブリを除去するのが、うまくいっていないことを指摘した。その後、 S_{30} は、教師にとって興味深いので強調する～
 T_{31} ; 前の書出しの末尾に1加えたと次の書出しの一部が書けるというのは便利だ。と

に4加えた場合ともみれる。T₆₃;0は考えてなかったな。それに数が、大きくなると大変だ、末尾に3を加えた場合、4の場合、5の場合、…とどんどん増えて、いろいろな場合を考えなくてはいけなくて大変だよ。もっとうまい考え方はないかな。S₆₄;? T₆₅;末尾でなければどうかな。S₆₇;先頭に1加える。T₆₈;先頭に1加えると、末尾に1加えるときとの重なりがでるよ。例えば、2+1+1の先頭に1加えると1+2+1+1、大きい順に並べたら、2+1+1+1で末尾に1加えるのと同じこと。間に1加えても同じことだ。もっと他のアイデアはないか。S₆₉;? T₇₀;1付け加えるだけだとだめみたいだな。ある数を加える、例えば1加えるというのでなければどうだろう。S₇₁;? T₇₂;すべてに1加えて、それぞれの数を1大きくしたらどうかな。例えば、2+2はそれぞれの数字に1加え大きくしたとすれば、何をもとに書ける。S₇₃;?・1+1。T₇₄;そうだ、 $1+1 \rightarrow (1+1) + (1+1) = 2+2$ だ。じゃあ、5を書き出した表を見てそれぞれがどれを元にすれば書き出せるか、4までの書出しから矢印を引いてみて(机間巡視で、書出しにおける矢印の引きかたと意味の指導)(図-4)。

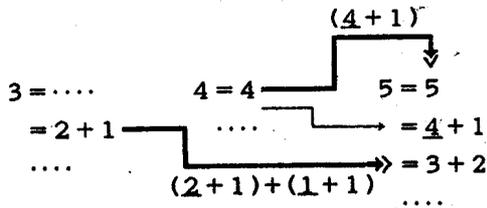


図-4

T₇₅;それじゃあ、すべてにそれぞれ1加えて増やすというのは表のどんな矢印になるか考えてみよう。例えば、4を2つに分割するのは2通り、1通りは末尾に1加えてできるから3を1つに分割した場合からくる。もう1通りはどこからくる。S₇₆;2を2つに分割した1通りから(図-5)。

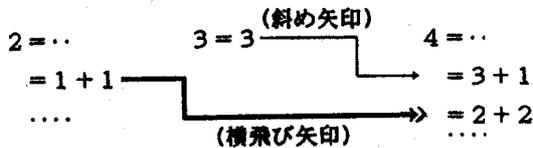


図-5

T₇₇;そうだ!これを「横飛びの矢印」で表そう。じゃあ7を3つに分割した場合は、S₇₈;6を2つに分割した場合と4を3つに分割した場合を加えればよい。T₇₉;そうだね。横飛びの矢印はいくつ飛び越すの(表-6)。

表-6

| | | | | | | | | | | | |
|----|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|----|
| | | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
| 分 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| | 2 | | 1 | 1 | 2 | 2 | 3 | 3 | 4 | 4 | 5 |
| | 3 | | | 1 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 7 | 8 |
| | 4 | | | | 1 | 1 | 2 | 3 | 5 | 6 | 9 |
| | 5 | | | | | 1 | 1 | 2 | 3 | 5 | 7 |
| 書し | 6 | | | | | 1 | 1 | 2 | 3 | 5 | |

S₈₀;分割分だ。T₈₁;そうだ。分割分だ。(書出し事例で解説)横矢印は、そのまま横に対応させるのではなく、分割分だけ飛び越える。そうするとこの表を「末尾に1付け加える」と「それぞれすべてに1加える」という考え方で説明できないか。S₈₂;末尾に1加えるということは表で斜め矢印を表している、それぞれに1加えることは表で横飛び矢印を表している。矢印の数字を足せば、矢印の集る所が何通りかわかる。T₈₃;そうだ。「末尾に1加える」と「それぞれに1加える」という考え方をするとすべて書き出せそうだし表も作れそうだ。このように考えの元になるものを原理と言う。下のようにまとめる。2つの原理で本当にすべて書き出せるかどうか、表ができるかどうか調べてみて下さい。~これを次回への課題とした~

| | |
|-----------------------------|-----|
| <書き出し> | <表> |
| 原理1.「末尾に+1付加える」↔「斜め矢印 ↘」 | |
| 原理2.「それぞれに1加える」↔「横(飛び)矢印 →」 | |

第4時; 前回の復習と、調べたかどうか聞くことから始める~ T₈₅;2つの原理で必ず書き出せますか? S₈₆;書き出せる。末尾は1か1でないかどうかで、末尾が1のときは、前の数をそのまま利用して書けるし、末尾が1でないときは、それぞれから1を引いた数の書出しは、その数より小さいから、すでに書き出せているので、それを使えば書ける。T₈₇;表の矢印の意味は、斜め矢印の意味はなんだったっけ。S₈₈;斜め矢印は「末尾に+1を付け加えること」に対応していて、末尾が1増加するから、数は1増えて、分割も1増えるので、表では斜めの対応になる。T₈₉;横矢印の意味は、S₉₀;横矢印は「それぞれに1加えて数字を1ずつ増やす」ことなので、数は分割分だけ増加するが、分割の回数は変わらないから。T₉₁;それでは、前に表を見てわかることを言ってもらったけど、それをこの原理で説明できないかな。表をみてわかることに次の①~③があった(表-7)。

① 斜めにみると、ある所から同じ数が並んでいる。

- ② その数の並びは分割数の和の並びと一致する。
- ③ 下の表-7 のように、縦の和とその横の方にある数が一致している。

表-7

| | | | | | | | | | | | |
|----|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|----|
| | | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
| 分 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| | 2 | | 1 | 1 | 2 | 2 | 3 | 3 | 4 | 4 | 5 |
| | 3 | | | 1 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 7 | 8 |
| | 4 | | | | 1 | 2 | 3 | 5 | 6 | 9 | |
| 割り | 5 | | | | 1 | 1 | 2 | 3 | 5 | 7 | |
| | 6 | | | | | | 1 | 1 | 2 | 3 | 5 |

T₉₂; ①は どうしてかな。S₉₃; 斜め矢印だから。T₉₄; そうだね。斜め矢印は「末尾に 1 加える」ことだった。横矢印がなくて、斜め矢印だけになるところから、同じ数が並ぶわけだ。しかし、どうして横矢印がないのだろう。考えてみて。… S₉₅; 横矢印は「すべてに 1 加える」ことで、分割した回数は変わらないで、数が分割分だけ大きくなる矢印だから、分割分だけ飛び越える。だから、分割が大きくなると、最初の方では、横矢印がなくて、斜め矢印だけになり、同じ数が並ぶことになる。～書出し事例で説明し、理解を促す～T₉₆; ②で分割数の和と斜めの数字がなぜ同じなんだろうか。どうやって説明すればよいかわからないから、③から考えることにする。どうして… S₉₇; 表-8 のように、横矢印と斜め矢印が対応するからだ。

表-8

| | | | | | | | | | | | |
|----|--------|-----|---|---|---|---|----|----|----|----|----|
| | | 自然数 | | | | | | | | | |
| | | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
| 分 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| | 2 | | 1 | 1 | 2 | 2 | 3 | 3 | 4 | 4 | 5 |
| | 3 | | | 1 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 7 | 8 |
| | 4 | | | | 1 | 1 | 2 | 3 | 5 | 6 | 9 |
| 割り | 5 | | | | 0 | 1 | 1 | 2 | 3 | 5 | 7 |
| | 6 | | | | 0 | | 1 | 1 | 2 | 3 | 5 |
| | 7 | | | | | | | 1 | 1 | 2 | 3 |
| | 8 | | | | | | | | 1 | 1 | 2 |
| | 9 | | | | | | | | | 1 | 1 |
| | 10 | | | | | | | | | | 1 |
| | 分割数(和) | 1 | 2 | 3 | 5 | 7 | 11 | 15 | 22 | 30 | 42 |

T₉₈; オー、矢印の対応から出所をたどれば、4 は 1 と 2 と 1 からできているわけか (事例で説明)。じゃあ、②は説明できないかな。… S₉₉; ③の説明と同じように考えると、例えば 8 の 4 分割は 5 で、これは 4 の分割数 5 と同じになる。同じように、6 の 3 分割は 3 で、これは 3 の分割数 3 に同じになる。S₁₀₀; 表の空白部分を 0 と考えると、①も説明できる。T₁₀₁; オー、すると、③の考え方で、①も②も説明できるわけだ。すごいな。ところで③の考え方の基はなんだった。S₁₀₂; 斜め

矢印と横矢印。T₁₀₃; 矢印の意味はなんだった。S₁₀₄; 斜め矢印が「末尾に 1 加える」、横矢印が「すべてに 1 加える」 T₁₀₅; そうだった。結局、この 2 つの原理から表を作ることができるわけだ。さて、分割数がいくつか調べるのにすべて書き出す必要はありますか。S₁₀₆; ない。表を書けばよい。T₁₀₇; そうだ。もう分割数を求めるのに、すべて書き出す必要はなく、2 つの原理に従って、表を書けばよいわけだ。結局、2 つの原理を探し出したことで、その原理を基にすれば、書き出さなくともこの問題が解くことができるようになった。数学では、このように原理を探していくことが大切であり、その原理がわかってしまうと、今度はその原理を基に考えることができる。～この後、まとめと演習プリントを配り、読んで問題に解答することを宿題にし、特に先頭数の表についてその原理を探すことを課題とした。

この教材についてその後の授業では、生徒のレポートをプリント配付し 5 分程度紹介・解説することを何回か行い、先頭数の表の原理を発見したレポートや新たな発見のレポートを取り上げた。それぞれの表の性質は、それぞれの原理から演繹できた。分割数と先頭数は双対的な概念であり、最終的には双対性について言及した⁸⁾。

(3) 授業の評価

授業者としての感想を述べる。選抜を経て入学した豊かな好奇心をもつ、高学力の生徒たちであり、積極的に取り組む生徒の一方で、戸惑う生徒もみられた。特に、書出しの労力がたいへんで、パターンが発見が容易でないなどの理由から、努力差や持続力の差などもあって、第 3 時以降は、説明を試みる者と聞く者にと二極分化していった (この問題は、日常の授業にも存在する性格のもので後に再検討する)。

教材特有の理由としては、数学的な教材であることから、入学時の生徒全員には興味や探求心が持続しにくかったとも言える。実際、自宅で十分考えてないと発言できないのが実際である。扱うアイデアや作業には、小学校と隔たりがある。レポートも、小学校での経験の有無もあって、取組み方や内容に違いがある。第 1 時のレポートで分割数の表を作った者は 120 名中で数名である。書出しから表を作るだけでも、集中心・持続力が要求される。パターンを適用して時間内で解くという受験テクニックでは、発言に結びつかない教材である。

授業過程で困った点は、生徒から期待しているアイデアが出ないときは、創造活動の意図に反して、誘導せざるをえない点である。誘導の典型は、T₅₈ 以降である。「末尾に 1 加える」アイデアから「末尾に 2」というよ

うに続いて、「すべてにそれぞれ1」というアイデアが出ないため T₇₂ で誘導した。誘導したのは、原理には結びつかないものの「末尾に2」というような考えで表を作ることも可能であるからである。限られた時間内で脇に逸れて、アイデアの優劣を議論する余裕はない。そのため、根拠の曖昧なままに議論の方向を教師の介入で決めざるをえない。一斉指導では、個人や小人数での研究のように、興味の向くままの自由な探求は進めにくい。

上記のような二極分化にもかかわらず、事後テストの達成度は高く、8~9割の生徒が第4時の原理による説明ができるようになってきている。この点については、あらためて次章で言及する。

数学認識を深めるという授業の意図自体は、授業後の生徒の数学についての次の感想から判断すると、おおそ違せられたと言える。

- ア. 数学は発展し続ける
- イ. 数学では根拠を調べるのが大切
- ウ. 数学では多様な見方が必要だ
- エ. 数学では問題の解き方は最初から決まっていない
- オ. 数学では問題を解くとき決りを見つけながら考えるのが大切
- カ. 数学では考えるとき決りを利用して解答する。
- キ. 数学ではやり方を憶えるのでなく、やり方を探ることが大切

ただし、授業自体についての感想では、上記の二極分化を反映して、パターン発見の驚き、原理のすばらしさ、楽しさを書く者と、難しさについて書く者に分かれていた。

3. 授業過程の分析

以下では、上記の授業過程と授業の抱える問題を、筆者の数学化の枠組みから分析・説明し、同時に数学化とはいかなる活動かを検討していく。

(1) 筆者の数学化の枠組みからの分析

筆者は、数学化を「ある現象の考察において用いた方法(操作)を対象として、新しい方法(操作)を導入、確立し、その新しい方法に基づき新しい考察ができるようにすること」と規定し、数学化の過程における活動の階層を次の<数学化の過程>のように特定してきた⁹⁾。

この過程は、旧理論から新理論の誕生へというような大局的な数学理論の創造から、問題解決のような局所的知識生産まで、幅広く対応する。最も大局的な例を述べよう。

ユークリッドの公理にはじまる演繹的幾何学理論(数

<数学化の過程>

I. 「数学化の対象」

~数学化の対象を創り出す活動の層~

この層では、数学化の対象となる(事象又は数学の)現象を創り出す活動が営まれる。その活動では、既知の方法が活用される。

II. 「反省」

~Iの活動を反省する活動の層~

この層では、現象又は現象を創り出した活動、活動で利用した方法などを振り返り、考察対象として意識化し、分析する。分析には、それまでにない新しい方法が見い出される。

III. 「数学化の結果」

~数学化の結果としての新たな方法による活動の層~

IIで得た方法による活動により、Iとは全く異なる活動が営まれる。

ただし、I~IIIの順序は、おおまかな流れで、逆方向も含めた往來を経て、IからIIIの方向へ進展する。

学現象; I) は、平行線の公準の疑問により考察の対象となり、ロバチェフスキーの幾何学がさらに反省を決定づけ、自然数論などにおける公理的方法(II)がユークリッド幾何公理論争に適用されて、ヒルベルトの幾何学(III)の成立をもたらした。

次に局所的な例を述べよう。数列の「平面を直線で分ける問題」では、最初は実際に平面を分割して予想を立てる(I)。予想では、帰納するために事例を作り(数学現象)観察する。立式できた段階で改めて正しい理由を振り返る(II)。理由をもとに数学的帰納法で証明する。その結果、公式が得られる(III)。

このような数学の創造に対する幅広い対応から、上記の過程は、学習指導過程をみる1つの枠組みとして活用できる。上記の過程を2で述べた実践でさらに解説しよう。先の授業過程の記述では、局所的な知識生産と大局的知識生産の2つのレベルで数学化の過程が認められる。

大局的なレベルから述べよう。第1時の授業では、生徒は当初簡単な問題と考えて既知の方法で取り組んだ。最初は、具体的に書き出していき、表を作って帰納的に求めよう(既知の方法)としたが、決りは見つからず挫折している。そして、宿題の考察で、さらに詳しく分析した分割数の表や、具体的な書出し方のさまざまな工夫が生れた。以上がIの数学化の対象を創り出す活動にあたり、実際の書出し結果やより詳しい表など、活動を通して生み出された数学的現象や、その現象を生み出

した多様な考え方や書出し方法 (既知の方法) が、そこでの活動に含まれている。

第 2 時の授業では、生徒の考えを発表させ、評価し合うことでそれまで進めていた活動の反省が始まる。ここでは、数え上げるために生み出された書出しの結果と分割数の表 (数学現象) や、書出し方法 (既知の方法) 等が考察の対象となる。表を対象とした考察から表の構造の存在が意識される。既知の書出し法には「末尾に 1 加える」方法も含まれていた。そして、表や「末尾に 1 加える」以外の場合の分析が授業後課題として出た。これは、新しい方法が誕生する素地となっている。第 3 時では、生徒から出てきた先頭数の表が分割数と同じだったことから、再度、表を対象として限定し、表の分析から入った。そして、末尾に 1 加える場合の表の考察へ進む。その結果、表の「斜め矢印」との対応を扱うとともに、前回の課題であったそれ以外の場合の考察へと入っていき、「それぞれに 1 加える」と「横矢印」の考え方を獲得している。これらの 2 つの原理は、新しい方法である。以上が、ⅡのⅠの活動を反省する活動であり、Ⅰの活動を対象とした考察を進める中で、2 つの原理という新しい方法が見出されている。

第 4 時の授業は、これまでにわかった表の構造①、②、③を 2 つの原理という新しい方法で説明することを考察した。そして、③の構造が、①、②を説明することを発見した。これ以後が、Ⅲの反省から得た方法を利用した活動である。ここでは、分割数を求めるのに、この 2 つの原理で表を構成すればよく、実際に書き出す必要はなくなる。そして考察は、分割数の表と先頭数の表の双対性というさらに数学的に高次なものへと発展していく。

局所的レベルは、授業内で繰返し起っている。第 1 時で表を作って帰納的にパターンを発見する過程を例にする。書き出すという既知の方法で、7 まで帰納的に数学現象が作られる (Ⅰ)。数学現象の振り返りから規則性を見出し、8 の分割数が 23 通りと推定する (Ⅱ)。実際には 22 通りでも、書き残しがあると規則性の方に信頼をおき、この規則から表を構成しようとする (Ⅲ)。しかし、教室全体での数えなおしから、やはり 22 通りとわかり、この規則性は破棄される。

個々生徒の思考過程が観察できれば、数学化を進める。さらに個別的な思考過程が認められることであろう。

Ⅰ～Ⅲの数学化の活動の層において、数学化の対象Ⅰと結果Ⅲの違いはⅡの反省活動によるものである。Ⅱの活動でなされる変化に着目して分析すると、数学化のも

つ次のような特徴が明瞭になる。

① 対象化 (考察の対象の意識化)

ⅡではⅠで進めたさまざまな事柄が考察の対象として浮び上がる。第 1 時以来の「書出しの決りやうまい方法をみつける」という考え方が、書出し結果や書出し方法、表などを考察の対象に据えている。書出しや表を分析しないと決りがみつからないからである。例えば、第 1 時後の課題である「書出し方法のうまい工夫」は書き出す行為を対象化して考えることを要求している (活動の対象化)。自分の書出し方を考え直さない限り、うまい工夫はできないからである。S₂₄ や S₂₅ の生徒の発見は、分割数の表という数学現象を考察の対象にして生まれた発見である (現象の対象化)。というのは、ある生徒が作成した結果としての表を他者が現象として観察して発見したのだからである。S₃₀ の「末尾に 1 加える」という書出し方法は、以後主たる考察の対象となり、新たな方法へ変貌していく。このような対象化の原動力が「決りや方法をみつける」という考え方である。その原動力によって、単なる試行錯誤活動に埋没した状態から意識を切り離し、意識的に高い立場から、自分の進める活動や、出てきた結果、そこで利用した方法を改めて観察し、その中から決りや方法をみつけようとする反省活動をもたらしている。その結果、最終的に対象として浮び上がるのが、T₄₄ 以降、特に T₉₁ 以後の、表と具体的な書出し方との対応関係である。具体的な書出し方法やそれを書き留めた表は、数学化以前のⅠの活動では数え上げるための方法としての役割をもっていたが、Ⅱの過程では考察の対象に変貌していき、思考活動に占める役割は、Ⅰとは全く異なるものとなる。

② 新しい方法の意識化

新しく得られる方法は、通常、全く新しく設定されるものでなく、それまでの活動に潜在しており、Ⅱの反省過程で意識されていく。この例では、新しい方法とは 2 つの原理であり、「末尾に 1 加える」という原理は、生徒のうまい書出し方法の中の 1 つのアイデアとして潜んでいた方法である。このアイデアが後のⅢで中心となる方法として意識されるのは T₄₆ の表の分析からである。表がこのアイデアで説明できるという事実が、単なる個別のアイデアを重要な方法へと高めていく。そして、「それぞれに 1 加える」という原理は、T₇₂ で教師によって導入される。そして、2 つの原理は、表を説明する原理であることから、新しい方法としての地位を確立していく。この新しい方法の意識化がなければ、いかにそれまでの活動を対象化しても、考察の方法がないので探求は進展しない。実際、S₃₀ と T₃₁ の間の生徒の考

えにみられるように、新しい方法の良さが第4時で確定するまでは、自分の慣れた方法が書き出すのには一番よい。新しい方法の意識化によって、考察の対象がより鮮明に意識できる。第3時では、表と書出しとの比較・対照がなされている。そうする必要が起ったのは、「このアイデアで表を説明できるのでは」という方法の意識化によるのである。第4時では、新しい方法によって、書出し方と表を対象とした考察が進められていく。

上記①、②の関連を述べる。考察は対象と方法の両方がそろって実現する。Ⅱの反省活動でⅠでの方法が対象化できるのは、そこで新しい方法が意識されるからである。逆に新しい方法の確立は、その方法を使う対象があってはじめて実現する。旧い方法を対象化する活動と新しい方法を意識化する活動はⅡの反省活動に同時に存在する。①で述べたように、ここでの反省活動は「意識的に高い立場」の設定により始まるもので、この設定がなければ、活動はⅠの層に埋没したまま発展をみない。

③ 数学化前後(Ⅰ, Ⅲ)の違い

Ⅱで新しい方法(原理1, 2)が獲得されることにより、旧い方法によるⅠの活動とは全く異質な活動がⅢ以降で展開される。実際、数学化前の第1時の授業では、具体的に書き出すことが本質的な活動であった。表も新しい方法の確定以前には、書き出した数を整理するための構造のない表であって、書出し方法の1つに過ぎない。数学化の達せられた第4時以降では、原理の活用こそ本質的であり、表は原理によって保証された構造をもつ。そして、具体的な書出しは、確認のため以外に意味をもたなくなる。分割数の原理が発見されたことで、先頭数の表も、原理を探る方向で分析するのが本質的になる。

この活動の異質さは、推論の仕方の違いとしてみるとさらに鮮明である。Ⅰの活動においては、具体的書出しが推論の根拠になっていたが、Ⅲの活動においては原理こそが推論の根拠となるのである。このような推論の変容は、言葉の変容に関連して後で再び検討する。

(2) 数学化と公理的方法

杉山吉茂氏は公理的方法を「A1; 根拠を探る。A2; 仮説(根拠)をおいて(基に)考える。(括弧内筆者)」という2つの思考活動によって特定している。この事例では、公理にあたるのは2つの原理であり、具体的には「A1'; 原理を探る。A2'; 原理をもとに考える」ことが、公理的方法にあたると思われる。まず、授業過程に、公理的方法がどのように認められるかを示す。

「根拠を探ろう」とする文脈は、第1時の帰納的に表の規則性を探そうとする考えからすでに表れている。その文脈で、もっと詳しい表を作る流れが生じて、第2時で分割数の表が出てきている。表にいくつかの規則性が認められるが、表だけで規則性を説明する考え方は、その段階で挫折する。そしてT₂₆, T₂₈で、方向転換し、表を作り出す規則性を考えるために、改めて書出し方を考え直す。そして、後で根拠となる原理「末尾に1加える」が意識される。第3時では、先頭数の表を出して、分割数の表と同じであることから、表の規則性を探ろうとする文脈をT₃₆で改めて強化している。S₃₉では表を作り出す規則性がみついている。そして、もう1つの原理「それぞれの数字すべてに1加える」が意識されるとともに、表をその原理で説明する手がかりを得る。第4時では、T₉₁から表の規則性をその原理で説明しようとする流れ、すなわち「根拠を基に考えよう」とする流れができていく。最終的に2つの原理で表が構成できることは、その原理が表の公理とも呼ぶべきものであることを意味している。

この文脈の分析から「根拠を探る、根拠を基に考える」という態度(考え方)¹⁰⁾は、数学化の原動力になっていることがわかる。特に根拠を探ろうとする態度は、先に述べた反省活動に際しての「意識的に高い立場の設定」とも重なるものである。上記の分析を数学化の過程の層に照すと、筆者の考える数学化の過程と杉山氏の考える公理的方法の対応関係が明瞭になる。すなわち、数学化の過程Ⅱまでは原理を探り出すまでの過程であり「根拠を探ろうとする」という態度が、そして過程Ⅲは原理を活用する過程であり「根拠を基に考えようとする」という態度が、非常に重要な役割を担っていることがわかる。これらの態度は、上記のように教師の発問で方向付けられており、教師が授業の流れを決定している。

先に授業の問題点として生徒の二極分化を指摘したが、その1つの背景は、根拠を探るのに多くの労力と時間を要するのに対して、根拠を発見し活用するまでは、根拠の良さがわかりにくい点にある。結果を知っている教師は根拠の良さを理解しているので、根拠を求める方向で探求を促すが、結果を知らない生徒にはその良さがわからないので探求は持続しにくい。

(3) 課題の連鎖と言葉の変容

数学化の過程をさらに詳しく分析するために、課題の連鎖と言葉の変容に着目して授業の流れを追う。授業は、後述の資料に示す流れ図のような課題(発問・疑問を含む)の流れで進行している。この流れを見て、明瞭

なことは、授業が課題の連鎖で進行していることである。課題は、言い換えれば問いで、必ずしも数学的に明文化された問題ではない。通常の数学的問題と呼ぶべきものは、最初の問題だけであり、あとはその解決のために生じる問いとその考察の連鎖なのである。この授業過程では、その連鎖は、単線形というより、むしろ複線形的に流れている。

問いの連鎖は連続的であるが、先に示した数学化の過程は、その連続性を階層化して把握することを可能にする。実際、上記の問いの連鎖を数学化の立場で階層化するなら、第 2 時までの問いは主として数学化の活動Ⅰに関係する内容である。ただし、問いは、通常、活動の意識的な反省を求める(さもなくば要する)ので、Ⅱの意味を常に含んでいる。表と書出し法と結びつけた課題 8 からは完全に活動Ⅱに関する内容となり、書出し法を反省、分析しつつ、表の矢印と書出し原理をしないで明確化している。第 4 時の課題 8' は、以前と同じ問いであるが、原理、矢印を知った後での分析であり、活動Ⅲに関する内容となる。

逆に、先の数学化の過程を、問いの連鎖からみたと、Ⅱの反省活動が問いの連鎖によって深まるとみることが出来る。その反省活動で有効な役割を担っているのは、表記の変更であり、表記の変更はそこで使う言葉を変容させる。この事例における表記の変更は書出しから表への変更であり、課題の連鎖でも表は中心的な考察テーマになっている。それをみると、表を作り出し、その規則性を発見し、説明しようとした流れ自体が、数々の問いを産み、それまでやってきた活動を分析する原動力になっていることがわかる。また、表を生み出したことが、具体的な書出しを捨象した分割数の表現方法につながり、数学化の成果を豊かなものとしている。実際、第 1 時の最終課題 3 から表と具体的な書出しの 2 つの考察が進行しており、課題 8 から相互関係の分析で反省が深まっている。ここで表がなければ、2 つの原理は、単なる書出し方としての意味しかもち得ないし、原理を基に考察をしていくⅢの考察には至らないのである。

先に述べた数学化の前後での推論形態の変更は、それを表現する言語の再構成を伴うものと言える¹¹⁾。事例では、新しく導入された言葉としての表が、推論形態の変更に寄与していることが認められる。実際、表は、書き出した数を整理しただけの表として作られるが、表の構造を見出し、表と書出しとの比較検討から、原理による推論をもたらしている。表にまつわるこのような言語の再構成の過程は、課題 8 以降で認められる。そこで

は、「具体的な書出しにおける意味」と「表における意味」との対応を探る形で、具体的な書出しと表の間での相互の翻訳作業が活発に展開され、表が 2 つの原理により説明され、構成され、言葉としての意味をもつに至る。その結果、それまで使っていた書出しに関する言語は、その役割を減じて、表を中心とした言語へと吸収され、一部は忘れられ、最終的に表を中心とした言語へと再構成されたと考えることができる。

このような 2 つの言語間の翻訳作業は、言語の再構成において必須の作業であるが、生徒にとっては「教師が言っていることがわからない」という状況を生み出しやすい。実際、先に指摘したように、第 3 時以降、授業に活発に参加する生徒と聞く側にまわる生徒とにしたいに教室が二極分化していったことを指摘した。その二極分化は、この 2 種類の言語の混在に伴っており、二極分化の最大の原因と考えられる。実際、第 4 時では、2 つの原理と 2 つの矢印の意味の対応が理解できている生徒は、2 種類の言語間の翻訳ができるので、つぎつぎにうまい説明を考え出している。それに対して、翻訳がスムーズにできない生徒は、議論を理解することに追われ、聞く側に立たされる。そして、授業後に配付した「まとめと演習」プリントや友人のレポートの熟読などにより、聞く側の生徒も新しい言語に習熟していく。その結果、授業過程では二極分化していたにもかかわらず、事後テストの段階では、大多数の生徒が理解した状態に至ったと考える。

4. 結 び

この報告では、数学化の立場から構成し実践した授業過程を、改めてその枠組みから分析し、その枠組みから授業の抱える問題を説明した。ここで強調したいことは、事例自体は特殊例であるが、日常の授業実践でも、3 で述べたような数学化やその特徴、そして授業の抱える問題は、普遍的に認め得ることである¹²⁾。数学化の活動の層や特徴は、ある種の数学的知識生産や創造に普遍的に認められるものであり、授業の構成や分析に際して活用できる。

研究の経過として、強調すべき点として次の点がある。

- ① 数学化の過程の活動の層は、授業では問いの連鎖により進行する。
- ② 数学化の過程の進行において、根拠を探したり、根拠として利用しようとする態度は、考察の原動力となり考察の流れを作る。
- ③ 数学化において、分割数の表にみられるような、特

定の構造や規則が認めやすい表現を作り利用することは、新たな思考の発展をもたらす。

- ④ 数学化において同時進行する言語の再構成では、「わかり発言する生徒」と「わからずに聞く生徒」の残念な二極分化を進行させる可能性がある。ただし、後者の生徒も、練習により新たな言語に習熟し得る。特に、①は、従来の筆者の研究では議論しなかった点である。ラカトシュの「証明と論駁」¹³⁾の過程は、数学の創造過程の典型とみられるが、この事例における問いの連鎖も、その過程に類似である。問いの連鎖の研究に「問題の発展的取り扱い」¹⁴⁾がある。この研究での問いは文章題で、その方法は条件の変更にある。文章題の連鎖も重要な数学的活動であるが、通常の授業が問題文ではなく問いの連鎖によって進行することを考えると、問いの連鎖と数学化との関連は、授業過程における知識生産を考察する視点として別に検討する必要がある。

また、これまでの報告における事例では線形的な事例が多かったが、生徒の個別的思考から必然的に複線形的になり、集団思考によるダイナミズムに包まれる¹⁵⁾。その分析枠組みは今後の課題の1つである¹⁶⁾。

注および参考文献

- 1) 古藤 怜:「Do Math. の指導」高校通信東書 [数学] No. 252
- 2) 数学化 (mathematization) という語は 1960 年代以降よくみられる言葉で、通常は、事象から数学を創り出すことを指すが、既存の数学からより高次の数学を創り出す場合にも使う。筆者は、両方を含んで使うが、今回事例として取り上げるのは後者である。
H. Freudenthal: "Why to teach mathematics so as to be useful?", Educational Study in Mathematics, Vol. 1 参照
- 3) 中島健三:算数・数学教育と数学的な考え方, 金子書房 (1981)
平林一栄:数学教育の活動主義的展開, 東洋館 (1987)
次期指導要領で中学校に導入される課題学習は、このような学習指導をさらに実現しようとするものと見てもできる。古藤 怜「課題学習について」数学教育研究, 第 4 号, 上越教育大学数学教室
- 4) 国内の研究の一部を上げる。川口延「問題解決の事例を通して考察した帰納推理の展開の様相と要因について」論究 Vol. 1, 柴田敏男「学校数学と Axiomatics」会誌第 55 巻 7 号, 島田茂「算数数学科におけるオープンエンドアプローチ」みずうみ書房 (1977), 三輪辰郎「数学教育学におけるモデル化についての一考察」筑波数学教育研究第 2 号, 能田伸彦「オープンアプローチによる指導の研究」東洋

館 (1984), 島田和昭「数学化をめざす授業」「みんなが答えを出せる算数の授業」明治図書, 内田洋一「数学的な考え方の評価」会誌第 71 巻 3 号, 飯田慎司「シチュエーションからの数学的活動における創造性の開発について」「数学教育のパスベクティブ」聖文社 (1989)

- 5) 本稿で提示した枠組みは筆者の修論に基礎を置く (筑大 1983 年度)
問 1 に対するこれまでの主な報告は以下のとおりである。
a. 筑波数学教育研究 第 3 号, pp. 60~71
b. 埼玉県数学教育研究会誌 (1985) pp. 30~31
c. 筑波数学教育研究 第 4 号, pp. 86~100
d. 第 18 回数学教育論文発表会要項, pp. 73~76
e. 筑波数学教育研究 第 5 号, pp. 69~81
f. 教育出版 教科通信数学特集 No. 88, pp. 4~6
g. 筑大附駒場中高 研究報告第 26 集, pp. 157~174
h. 筑波数学教育研究 第 6 号, pp. 124~134
i. 日本数学教育学会誌 数学教育 第 69 巻 11 号, pp. 23~32
j. 筑波大学学校教育部紀要 第 10 巻, pp. 53~63
問 2 に対する報告は、上記に加えて、以下の報告である。
k. 日本数学教育学会誌 数学教育 第 69 巻 3 号, pp. 2~12
l. 日本数学教育学会誌 数学教育学論究 Vol. 49・50, pp. 34~38
m. 日本数学教育学会誌 数学教育 第 70 巻 1 号
n. 第 22 回数学教育論文発表会論文集, pp. 7~12
詳しい参考文献は、上記の文献欄を参照されたい。
- 6) 杉山吉茂:公理的方法に基づく算数・数学の学習指導, 東洋館
- 7) 山本幸一:順列組合せと確率, 岩波数学入門シリーズ, Erich Wittmann: "The Complementary Roles of Intuitive and Reflective Thinking in Mathematics Teaching", Educational Study in Mathematics Vol. 12, 前出 5) の c では, Wittmann の事例を基に, 数学化の過程を解説している。
- 8) 例えば, 前出 7) 「順列組合せと確率」参照
- 9) 前出 5) の a, c, d 等
- 10) 公理的方法は、数学的思考方の 1 つであると考えられるが、これまでの筆者の数学化の議論では、このような根本的方法をストラテジーの意味での数学的思考方と区別して「認識方法」や「態度」という語で表現してきた (前出 5) の e 参照)。片桐重男氏の数学的思考方と態度との位置付けとも重なる立場である。
- 11) 前出 5) の c 等
- 12) 前出 5) の b, d, f, h, j 等に他の例を示した。前出 3) の平林氏や van Hiele, H. Freudenthal, Z. P. Dienes 氏らの主張参照
- 13) I.ラカトシュ:数学的発見の論理, 共立出版 (1980)
- 14) 竹内芳男・沢田利夫:問題から問題へ, 東洋館