礒田正美・小田島礼子, “グルーピング方略からみた低学年児童の数概念発達に関する調査研究--van Hiele の思考水準に発想して―“, 日本数学教育学会誌, vol.74, no.2, pp. 7-12, 1992.

M.Isoda&R.odajima, “Investigation Study on Development of Number Concept through Grouping Strategy in Lower Grade Pupils--Based on the Thought Level of van Hiele― “

参考文献

1)清水静海, ”新指導要領の基礎にある考え方と実践に向けての方策 新算数指導の舌戦と進展のためのポイント”, 1990, 東洋館

2)那須俊夫, “同地関係について”, 広島大学教育学部紀要第 2 部, no.33

3)片桐重雄, ”周号の考え”, 1969, 近代新書

4)川口廷,”問題解決の事例を通して考察した帰納推理の展開の様相と要因について”,論究, no.1

5)N.Nohda,’Mathematical Pattern-Finding in Problem Solving’, 筑波数学教育研究, no.6

6)長崎栄蔵・瀬沼花子,”数学的問題解決に関する日米共通調査研究” 第 23 回数学教育論文発表会論文集

7)ピアジェ,”数の発達心理学”, 1962, 国土社

8)H.P.Ginsuburg, “The Relationship Between Initial Meaningful and Mechanical Knowledge of Arithmetic,”Conceptual and Procedural Knowledge:The Case of Mathematics”,L.E.A., 1986

9)志水廣, “くりあがりのあるたし算ではなぜ加数分解を行うのか”, 日本数学教育学会誌、vol.69, no.12

10)L.P.Steffe,P.Cobb,”Construction of Arithmetical Meanings and Strategies”,Springer-Verlag, 1988

11)平井安久, “整数の初期段階におけるたし算ストラテジーに関する一考察”, 日本数学教育学会誌, vol.73, no.4

12)石田忠男, ”算数・数学「教授=学習」原理の基礎的研究（I）”, ”数学教育学のパースペクティブ”, 1990, 聖文社

13),A.H.Schoenfeld, On Having and Using Geometric Knowledge,”Conceptual and Procedural Knowledge:The Case of Mathematics”,L.E.A.

14)礒田正美, “ブロックを利用しての十進位取記数法指導過程の批判的考察”, 北海道教育大学岩見沢分校年報いわみぎわ, no. 12, 1991

15)“すぐれた授業とは何か“, 1989, 東京大学出版会

16)Ｃｔｏｌｑｐ：”数学教育学”, 1976, 明治図書

17)礒田正美, 筑波数学教育研究, no. 3, 4

18)P.M.vanHiele “A Method to Facilitate the Finding of Levels of Thinking in Geometry by Using the Levels in Arithmetic",Paper Presented at the Conference Learning and Teaching Geometry, 1987

グルーピング方略からみた低学年児童の数概念発達に関する調査研究

——van Hieleの思考水準に発想して——

磯 田 正 美・小 田 島 礼 子

Investigation Study on Development of Number Concept through Grouping Strategy in Lower Grade Pupils

——Based on the Thought Level of van Hiele——

M. ISODA & R. ODAJIMA

1 9 9 2

日本数学教育学会誌 第74巻 第2号 別刷

研　究

グルーピング方略からみた低学年児童の数概念発達に関する調査研究

——van Hiele の思考水準に発想して——

礒 田 正 美*・小 田 島 礼 子**

1. 本稿の目的と課題

情報化社会の進展に向け，新指導要領では，数感覚の育成，例えば数の多面的見方育成という視点から，数概念[1]形成過程の再考を喚起している．数概念形成をめざす従来の学習指導では，さらに数の多面的見方育成をめざす今日的学習指導においても，グルーピング行為は重要な役割を担う．特に低学年では，グルーピング行為を伴った学習活動を通して，児童の保持する数概念は変容していくと考えられる．本稿の目的は，学習による児童の数概念変容の実態を，児童のグルーピング行為から特定することを通して，数概念形成過程を再考する際の一視点を提示することにある．具体的には次の課題を検討する．

課題 1： グルーピング行為の基となる数概念の質的差異に着目することから，低学年児童の数概念変容の層を，学習による発達段階として示す．

課題 2： その発達段階が実際の学習指導の構想や実施に際して，いかなる示唆を与えるかを示す．

2. グルーピングと数概念の発達

（1） グルーピング行為の定義

グルーピングがどのような行為によるのかを，下記の例 1，2[2]から分析していこう．例 1 は十束に着目してのグルーピング例であり，例 2 は乗法や除法に発想してのグルーピング例である．数概念に関わるグルーピング行為は，このような

［例 1］

［例 2］

4×3+1	4×3−1
○○○	○○○
○○○	○○○
○○○	○○○
○○○○	○○

数を求めるという動機に基づき，次の過程で進む．

(1) グルーピング対象となる集合がある．

(2) なんらかのアイデア（方略）で，その対象を，新しい集合としてくくっていく．

(3) グルーピング結果として，(1)とは異なる構造の入った集合ができる．

(2)のアイデアの背景には，数える，記数法，四則計算法などの数概念がある．そして，そのアイデアは，具体的には n 個ずつ束にして数える（二飛び，五飛び，十束など）方略や，加法では加数分解方略，乗法なら同数累加方略，除法なら等分除，包含除方略などから認められる．ここでは，このような方略をグルーピング方略と呼ぶことにする．

(3)のグルーピング結果は，数学的には同値類[3]

* 北海道教育大学
** 札幌市立和光小学校

とみなすことができる．例 1 で述べよう．はじめに，グループ分けされていない鶴の群がある．仮に十羽（束）でくるとしよう。十羽が全体でいくつあるかを数えるために，例えば，それぞれの束から一羽の鶴を代表させて，取り出して数える．取り出す一羽は，同じ束の中から取り出すならどれを選んでもよい．しかし，違う束の鶴は，異なる鶴とみなして数えるのである．これは，数学的には同値類とみなすことができよう．

また，グルーピング行為は，従来の数学教育用語では，集合の考えによると言える．例えば，片桐重男氏は，集合の考えの中に次のような考え方があることを指摘している[4]．

- ひとまとまりのものとしようとする．
- 互いに共通集合のないいくつかの部分集合の集まりとみようとする．

これらの考えは，例 1，2 に照せば，グルーピング行為に認められる考えにほかならない．そして，実際には，グルーピング方略によって，そういった集合の考えが運用されている．ここでは，それを一括して集合の考えと呼ぶのではなく，それぞれのグルーピング行為の背景にある数概念を区別する意図から，具体的な方略に着目していく．

以上の吟味をふまえて，本稿では，数を求める際のグルーピング行為を「集合(対象)を，グルーピング方略によって，(再) 構造化して，新しい集合（同値類）を作る」行為と定義する．

グルーピング行為に着目した研究には，川口廷，能田伸彦，長崎栄三氏の研究などが挙げられる[5]．グルーピング方略から数概念の変容を論じようとする点が，本稿の新しい点である．

（2） 数概念発達段階の仮説とその判定法

先行研究から，本稿での数概念発達仮説を設定するとともに，グルーピングによる段階の判定法を示そう．

数える能力の発達段階は J. Piajet の研究が著名である．彼は，数の保存課題の成否によって子供の発達の層を，およそ次のように特定した[6]．

(1) 視覚的な配置を換えると個数が変わるいうように，数の保存性がない（正しく数えない）段階
(2) 移行段階
(3) 視覚的な配置によらず，正しく数えられる段階

最近の発達研究としては，H. P. Ginsburg，志水廣，P. Steffe と P. Cobb，平井安久氏らの研究を上げることができる[7]．これらの研究は，どのような方略を利用するかに着眼して，児童の数概念の発達過程を検討しようとする点で共通している．

特に，Piajet の研究を基礎にした Steffe らの研究では，学習指導過程をモデル化し，学習による児童の数概念の変容を後付けようとしている．その研究に示された，Piajet の反省的抽象の二側面は，児童の保持する数概念判別に際して有効と考えられる．彼らは，Piajet の反省的抽象には次の 2 つの用法があることを指摘している[8]．

① reflexion : 先行水準 A で扱われる対象を新しい水準 B へと抽象する；[反省]

例えば，同数累加場面から乗法を定義していくような場合が考えられる。

② reflection : 先行水準 A で取り上げられた対象であっても，水準 B で取り上げられた対象として扱う；［反映]

同数累加場面が乗法であることを知り，九九の必要性を理解した後，九九を拡張的に構成していくような場合が考えられる．

①は反省的抽象を通して発達段階を移行していく過程での思考であり，②は移行した段階に合うよう対象を再構成していく過程での思考とみることができる．この二面に発想して，グルーピング行為をみるとき，次の 2 つの場合を区別できる．

①′ グルーピング方略を学ぶ場合

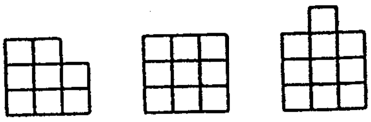
例えば，乗法の導入では～のいくつ分というグルーピングに着目し，その見方を養う．

②′ 学んだグルーピング方略を利用する場合

グルーピング対象を，～のいくつ分という方略で把握し直し，すなわち，対象を～のいくつ分とみなした上で，グルーピングを実行する．

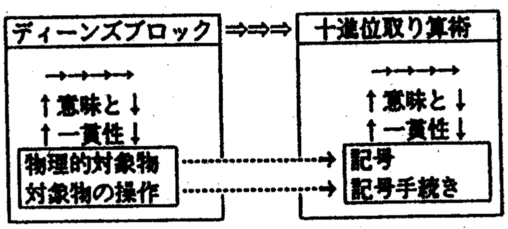
グルーピングから数概念の判別を意図する本稿は，②′の利用（反映；ex. ～とみなすことによる）に着目する．というのは，例 1，2 のようなグルーピング課題で子供が選ぶ方略は，使い慣

[例 3][9)]



れ，最も適切と考える数概念が利用されると考えられるからである．例えば，上の例3を，乗法既習の児童に出したとしよう．9個の3つ分とみなして，乗法方略を選び9×3と求める児童は，乗法九九に習熟しており，そのよさを理解し，事象に対しても積極的に活用しえる数概念を保持していると考えられる．8＋9＋10 とする児童は，乗法的ではなく，加法的な数概念を保持していると考えられる．すなわち，児童が選択する方略から，児童の数概念を推測することができる．この推測は，自分が保持するより上位の数概念を，児童は利用すると仮定している．この仮定に立てば，グルーピング方略を探ることで，子供が学習により獲得した数概念を把握することができる．

次に発達段階仮説を設定しよう．Piajet の発達研究は，教育を加味しないことで知られているが，学習指導による発達の考察では，発達を促す学習の基盤となる教材の系統からの発達段階の検討が不可欠である．A. H. Schoenfeld[10)]は，教材の系統を簡略化して，次のような，ブロックの操作から数の計算体形（数系[11)]）が生み出されるというモデルを示している．



このモデルは，実際の数え上げ操作を基本とする数え上げ型数概念によって考察を進める（左側のみの）世界と，数計算を基本としてその計算を事象（ブロック）へも自由に利用しえる数系型数概念によって考察する（両側を含んだ）世界とを区別して設定されていると言える[12)]．

この2つの世界から，グルーピング行為は，次のように区別できる．数え上げ型数概念のみを保持した段階，すなわち，ブロックを数えながら操作することしかできない段階で，例1，例2のような課題に直面した場合，子供が選択しえる方略は，1つずつ数える，二飛び，五飛び，十束[13)]にして数えるなどであろう．数系型数概念を保持した段階～すなわちブロックの数え上げ操作より数計算の方が便利で使いやすい状態になっている段階～ならば，加えやすくまとめ直したり，乗じやすくまとめ直したりしてから，加法や乗法を利用して，計算で求めることであろう．すなわち，グルーピングに際しての利用方略の違いから，児童の保持する数概念が，おおまかに，数え上げ型か，数系型かを判別することができるのである．

このような二種の数概念による世界像の区別は，van Hiele 夫妻の思考水準に発想したストリヤール（Столяр）による算術から代数への水準の区別としても認められる[14)]．ストリヤールは次のように，その水準を記述している（部分）．

第1水準：数が，それを特徴付ける具体物の集合から分離されておらず，また演算が直接具体物の集合に対して行われる．

第2水準：数が，それらを特徴付ける具体物から分離される．この水準では，一定の記数法（十進法）で記述された数を利用し，演算の諸性質が帰納的に確立される．

以上を参考に，本稿では，グルーピングに現れる数概念の発達段階を，次のように仮説設定する．

第1水準：数え上げ型の数概念を保持している．

第2水準：数系型の数概念を保持している．

それぞれの水準は，前述の二種の数概念やストリヤールの水準に対応している．第1水準は，具体物を数え上げ操作（塊り操作を含む）で，グルーピングする水準である．第2水準は，数計算がしやすいようグルーピングする水準である．第2水準には，四則計算などの算法が含まれる．数えられる第1水準以前に，前述の Piajet の数の保存性のない第0水準を想定することもできる．

3. 調 査 と 考 察

ここでは，前記仮説を，児童のグルーピング方略に着目した実態調査から確認する．

（1）　調査方法と調査問題

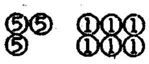
グルーピング行為から数概念の変容を把握するには，面接法が最適である．しかし，調査人数に制約があり，結果が個別的になる．ここでは，全体的傾向を把握する意図から，厳密さは欠けるが，質問紙による調査法を採用した．

調査問題（資料参照）は，予備調査を行った後作成した．既習の数範囲の違いから，1 年と 2・3 年の数範囲は換えた．問題の主旨を述べる．すべて，どのようにグルーピングして個数を求めるかを調べる問題である．グルーピング対象の違いによる影響を排除するために，対象は，お金，タイル，折り紙と換えた．さらに，数範囲の影響を排除するために，問 1（お金）と問 2（タイル）は，同数同質問題とし，問 3（折り紙）は，個数をかえた．各問題では，まず個数を求めさせ，その求め方（方略）を聞いている．

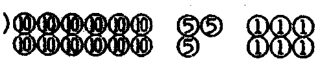
［資　　料］

問 1

（1 年生用）



（2、3 年生用）

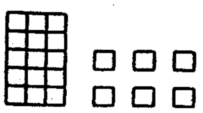


(1)おかねは、いくら　ありますか？

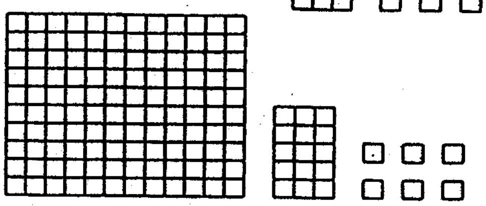
(2)どうやって、やりましたか？

問 2

（1 年生用）



（2、3 年生用）

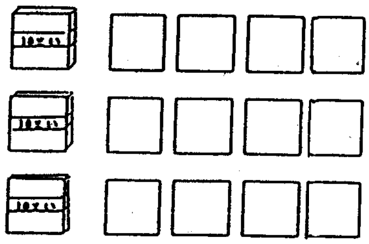


(1)タイルは、いくつ　ありますか？

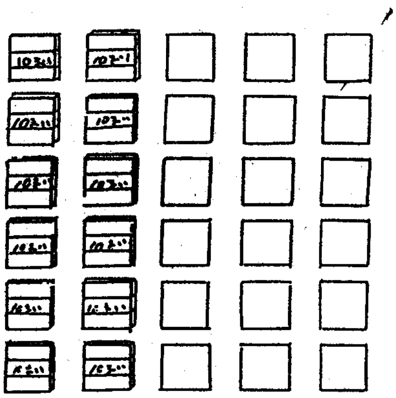
(2)どうやって、やりましたか？

問 3

（1 年生用）



（2、3 年生用）



(1)折り紙は、なんまい　ありますか？

(2)どうやって、やりましたか？

注）上記問題は，すべて，例 3 のように，あらかじめ構造の入った集合を再構造化するタイプの問題である．例 1 のようなバラ集合のグルーピング課題も同時出題した．その結果はおおむね類似しているが，方略識別が難しかったので割愛した．

調査時期は 12 月である．本調査は，各学年 200 名以上になるよう，札幌市の小学校（大都市部）1 校および空知支庁の小学校（市～農村部）3 校，1 年 8 学級，2 年 8 学級，3 年生 7 学級に依頼した（≠予備調査校）．調査では，児童からの質問は受けず，教師からのヒントは出さないような形式で，全員が終了する時間（20 分以上）で依頼した．結果的に，各学年 1 学級，児童の発話による暗黙裏のヒントや，指導などの影響か，他学級と比較して，解答方略が特定方略に極端に偏る学級があった．それらの学級は集計から除外した．

（2）　調査結果とその集計

予備調査から次の方略を識別した．

1ずつ数える；グルーピングすることなく，ただ，数える．

nずつ数える；二飛び，五飛びなど（十束以外）のグルーピングをして数え上げる．

10ずつ数える；十束を作って数え上げる．

ただ，加える；与えられた表現の塊り単位で数え，それらを加える．

例）1年；5＋5＋5＋1＋……＋1
（分かち書き含む）

加えやすくG；加えやすい塊り（例．10単位）を作って，加法計算をする．

例）1年；10＋10＋1
（分かち書き含む）

かけやすくG；掛け算しやすい塊り（～のいくつ分）を作って乗法計算をし，残りを加える．

例）2～3年；12×10＋3×15＋6
（分かち書き含む）

1ずつ数える以外の方略が，グルーピング方略と言える．「ただ加える」は，与えられた表現のとおりグルーピングしたもので，集合の再構造化が希薄なグルーピング方略と言える．「1ずつ数える，nずつ数える，10ずつ数える」は，数え上げ型数概念を反映した方略であるから，ここでは数え方略と呼ぶ．特に「nずつ，10ずつ数える」ような場合，暗算で計算がなされている可能性もあるが，この調査形式では判別不能であり，ここでは数え方略とみなした．「ただ加える，加えやすくG，かけやすくG」は，計算をする数系型数概念を反映した方略であるから，計算方略と呼ぶ．

上記の方略をもとに，本調査の各設問に対する児童の解答を集計した．その際，方略（求め方）欄無答者は，方略が分析不能であるから除外した．除外した人数は，小1が6名（3%）小2が0名，小3が4名（2%）と若干名である．以下，無答者を除外した各学年の全数に対する割合を求めて比較する．分母となる学年ごとの全数は，小一197名，小二214名，小三167名である．紙面の都合からその基礎データは省略して，集計結果のみを示す．

誤答および誤答者の選択した方略は，次の表-1に示すとおりである．表-1で，「数え」とは数え方略による間違い，すなわち数え間違いであり，計算とは計算方略による間違い，すなわち立式，計算間違いである．特に小1の場合，1ずつ数える間違いが多いが，その誤答にはPiajetのいう数の保存性のない段階（第0水準）の児童が含まれる可能性がある．しかし，問1問2の数え間違えの割合は，各学年ともに1割前後と変わらないことから，単純なケアレスミスの可能性も捨てきれない．

表-1 誤答率と誤答者の選択方略

問題＼学年		小1		小2		小3		
お金 問1		14%		36%		23%		
数え	計算	11	3	10	26	8	15	内訳
タイル問2		12%		36%		30%		
数え	計算	9	3	12	24	10	20	内訳
折り紙問3		33%		34%		21%		
数え	計算	26	7	21	13	11	10	内訳

表-1の誤答者は，方略が使いこなせない，すなわち，保持する数概念が不完全な児童を意味する．前述の発達段階を調べる本稿では，選択方略から，児童が保持する数概念を，数え上げ型か，数系型かに大局的に分けることを主題とする．そのため，以下では正答誤答に現れるこのような差異は問題にせず，選択方略のみに着目する．

次の図-1～図-3は，各設問に対する選択方略を学年ごとに集計したものである．図-4は，設問に応じて，児童の方略が変わるか否かを集計したものである．例えば，すべての設問で1ずつ数えるような場合，3問同方略に類型されている．図-4の同方略条件をゆるめて，数え方略（3種類いずれか）によるか，計算方略（3種類いずれか）によるかに着目して，集計したのが図-5である．

集計結果から，次のことが言える．図-1～図-3の比較から，小2は，小1，小3と比較して，方略が多様で対象に応じて異なる傾向が高い．図-4からは，小2は方略の一貫性が乏しいことが

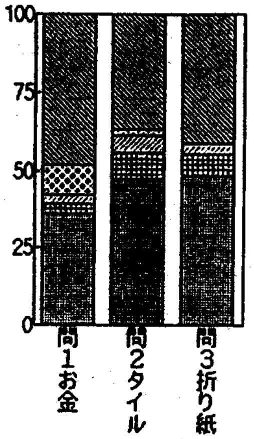


図-1 小 1 の選択方略

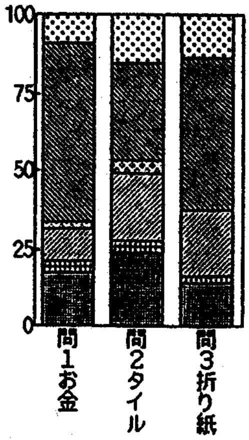


図-2 小 2 の選択方略

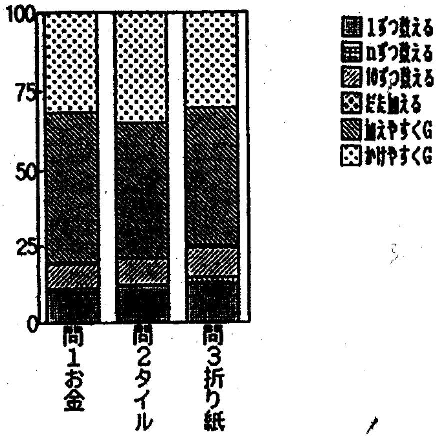


図-3 小 3 の選択方略

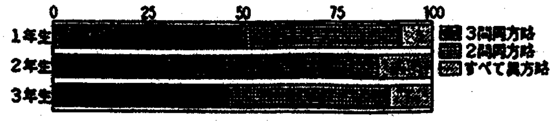


図-4 問 1～問 3 を通しての選択方略の一貫性

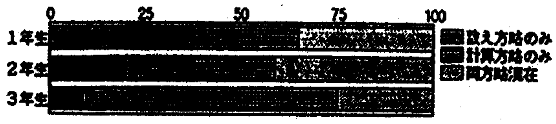


図-5 数え方略，計算方略としての一貫性

わかる．図-5 からは，数え上げ方略を利用する児童は，小 1 の 36% をピークに減少することがわかる．逆に計算方略のみを利用する児童は，年々増大し，小 3 では 64% に達する．対象に応じて方略が変わる児童は，小 2 の 43% が最大である．

（3） 発達段階仮説の検討

仮説を実態調査から確認しよう．先の図-5 は，常に数え上げ型数概念を利用する第 1 水準の児童と，常に数系型数概念を利用する第 2 水準の児童を判別して，その分布を示したものと言える．その結果から，次のことがわかる．

小 1 の約 1/3 は，数え上げ型数概念を保持しており，第 1 水準にいると推察できる．小 3 の約 2/3 は，数系型数概念を保持しており，第 2 水準にいると察せられる．小 2 の場合，数え方略のみの児童は，小 1 より少なく，小 3 より多い．また，計算方略のみの児童は，小 1 より多く，小 3 より少ない．そして，利用方略に一貫性のない児童は，小 2 が最大である．すなわち，小 2 の半数近くは，方略選択に際して，数え上げ型数概念を利用するか，数系型数概念を利用するか迷う状態にあり，第 1 水準から第 2 水準への移行期にあると察せられる．小 2 から小 3 にかけての教材を考慮すれば，数範囲の増大や乗法除法の学習が，その移行に寄与していると推察できる．

4. 示　　唆

本稿では，発達段階を，思考水準を利用して設定し，実態調査に認められた全体傾向から，間接的にその存在を認めた．その段階（水準）は，児童が個別にもつ数概念の質的違いを捨象した大局的な段階である．調査結果は，先生方にとっては経験的に明らかな事実とも言える．しかし，本稿で示した発達段階や，方略の違いに児童の数概念の質的差異があるという考え方は，経験的な議論を越えた理論的根拠や，授業実践の発想を創る基礎として重要である．具体的に述べよう[15]．

① 教材選択，開発に際しての根拠として

例えば，「0，1，2，3，8，10 の 5 個の数字のうち，答えが 2 になるお話を作ってみよう」というような課題は，児童が数系型数概念を保持していることを前提にしており，数え上げ型数概念を保持する児童が多い学級では，困難度が高いと予想される．すなわち，発達段階から，提示可能教材の範囲を予想することができる．

② 学習指導の実施に際して

数系型数概念を保持する児童は，数計算に発想

して具体を（～と）みなしたり，必要な具体（お話や図など）を作る能力が期待され，実際の操作は必ずしも必要ない．注意すべきは，操作がわかりやすいと称して，いつまでも具体物を操作し続けることによる発達遅延である．新指導要領では，このような誤った操作活動の是正意図もあって，思考実験という言葉が導入されたとも聞く．数系型数概念を保持する児童には，図を用いての思考実験などが有効と言える．

数え上げ型数概念から数系型数概念への移行過程では，具体物の操作から，多様なグルーピング方略を認め合い，その方略を比較対照して（すなわち，方法を対象化することで）数計算を構築していく。それに対して，数系型数概念を保持する段階では，数計算そのものを対象にした考察が，学習課題となりえるのである．

③　子供の困難性の評価視点として

導入場面から「12×3＝10×3＋2×3」とするとよいことを学んだ際，これを「10 分け作戦」と名付けたとしよう．そして，続く問題場面「32×3」において，筆算を構築するとしよう．児童は，この作戦を活用して取り組むが，「30×3＋2×3」とする児童と「10×3＋10×3＋10×3＋2×3」とする児童が現れる．前者は，筆算に結びつく記数法に発想した 10 分け作戦である．後者は，筆算には結びつかない十束に発想した 10 分け作戦である．前者をもとに筆算を説明された場合，後者の児童は理解できるだろうか．どうしてそうすればよいのか判然としない児童が現れても不思議はない．理解できない児童の発想には，数え上げ型数概念が潜む場合もありえる．その場合，十束という自分の考え方略にこだわるとすれば，図などに立ち返っても，すぐには納得できない事態が起こりえよう．

低学年の学習指導は，数え上げ型から数系型への水準移行のための指導を，フィードバックを繰り返しながら行っているものとみることができる．そこでは，学習過程で児童の数概念をどう変容させるかが問題である[16]．例えば，図-1～図-3 に発想すると次のような問題が意識される．小 1 から小 2，小 3 にかけては，多様な計算方略が生み出される．そこでは，数え上げ型数概念を生かして，いかに数系型数概念を構成していくかが問題である．特に小 2 から小 3 へかけて，多様な計算方略は洗練・集約される．そこでは，構成されてきた多様な数概念を生かしながら，より洗練した数系型数概念へ，いかに集約するかが問題になる．

注および参考文献

1) 本稿で，数概念とは，①具体物およびその操作との翻訳関係のある数およびその計算，そして，②数自体の記数法，③数の計算の仕方などを指す．
2) 清水静海：新指導要領の基礎にある考え方と実践に向けての方策，“新算数指導の実践と進展のためのポイント”，東洋館（1990）．
3) 那須俊夫：同値関係について，広島大学教育学部紀要 2 部 33 号．
4) 片桐重男：“集合の考え” 近代新書（1969）．
5) 川口廷：問題解決の事例を通して考察した帰納推理の展開の様相と要因について，論究 1 号；N. Nohda：‘Mathematical Pattern-Finding in Problem Solving’，筑波数学教育研究 6 号；長崎栄三・瀬沼花子：数学的問題解決に関する日米共通調査研究，第 23 回数学教育論文発表会論文集．
6) ピアジェ：“数の発達心理学”，国土社（1962）．
7) H. P. Ginsburg：The Relationship Between Initial Meaningful and Mechanical Knowledge of Arithmetic, “Conceptual and Procedural Knowledge：The Case of Mathematics”，L. E. A.（1986）；志水廣：くりあがりのあるたし算ではなぜ加数分解を行なうのか，日本数学教育学会誌，69 巻 12 号；L. P. Steffe, P. Cobb：“Construction of Arithmetical Meanings and Strategies”, Springer-Verlag（1988）；平井安久：整数の初期段階におけるたし算ストラテジーに関する一考察，日本数学教育学会誌，73 巻 4 号．
8) 前出 7)，反省，反映の用法は特に石田忠男氏の議論を参考にしている；石田忠男：算数・数学「教授＝学習」原理の基礎的研究（Ⅰ），“数学教育学のパースペクティブ”，聖文社（1990）．
9) 古藤怜氏による．
10) A. H. Schoenfeld：On Having and Using Geometric Knowledge, “Conceptual and Procedural Knowledge：The Case of Mathematics”，L. E. A.（1986）；磯田は Schoenfeld のモデルを

数学化の立場から，再定式化している．礒田正美：ブロックを利用しての十進位取記数法指導過程の批判的考察，北海道教育大学岩見沢分校年報，いわみざわ 12 号 (1991).

11) ここで，「数系」とは「数（全数または整数）の集合」に，四則計算，大小順序などの「構造」を入れたものである．

12) 佐伯胖氏は，ランパートの研究から，児童の保持する数学的世界を，意味世界という語で説明している．“すぐれた授業とは何か”，東京大学出版会 (1989).

13) 記数法自体は，数系の知識と考えられるが，十に束ねる行為は，ここでは数え上げに類型した．

14) Столяр:“数学教育学”，明治図書 (1976)；H. Freudenthal も類似の主張をしている；礒田：筑波数学教育研究，3 号，4 号参照；P. M. van Hiele の主張にも算術の水準はみられるが，明確な区分は記載されていない．“A Method to Facilitate the Finding of Levels of Thinking in Geometry by Using the Levels in Arithmetic”, Paper Presented at the Conference Learning and Teaching Geometry (1987). これらの研究での水準設定の根拠はは不明だが，幾何の水準からの類推とも考えられる．

15) 田中秀典（石山南小），谷山正司（幌北小），鈴木英昭（札幌附小）氏らから伺った事例を基にした．

16) 前出 10) の礒田の報告では，言語に着目しての考察を試みている．

関数の活用の仕方と表現技能の発達に関する調査研究

——小中高にわたる発達と変容——

磯田正美*・志木　廣**・山中和人***

1. 研究目的

関数概念は，数，表，式，グラフなどを基に表現され，代数や微分積分の計算にみられる数学的方法の活用により，さまざまな現象の分析・考察に利用される．また，関数の考え方は日常生活から純粋数学や諸科学の多くの場面で意識的にもしくは潜在的に利用される重要な考え方である．それゆえ，関数概念ならびにその考え方の育成は，数学教育の1つの目標となってきた．しかし，その一方で，関数を難しいと感じ，その利用を苦手とする児童生徒が多く，その傾向は学年進行とともに増大すると言われる．その原因の1つは，概念，考え方の育成というより，技能の指導に焦点が当てられることが多いことがあげられる．関数の概念，考え方の育成に際しては，表から式へ，式からグラフへ，グラフから式へというような関数の表現の仕方に関わる技能の指導は重要である．しかし，これら表現技能の指導が，関数の概念，考え方の探求やその活用の文脈と関係なく強調される場合があるのではないだろうか．さらには，表現技能の指導に際して，必然性のないままに進められたり，個々の児童生徒の関数の概念，考え方の発達の実態とは関係なく扱われる場合があるのではないだろうか．関数を表現する力の発達やそこでの思考の変容を踏まえた教育課程や学習指導過程の開発が求められる．

この問題意識の基で最終的な研究目的として「関数の表現力の発達やそこでの思考の変容を踏まえた関数の学習指導を進めることによって，児童生徒がより高次の関数の考えを利用できるようになるための学習過程を実現すること」を設定した．

この目的のために，この報告では，小中高にわたる事象における関数の活用の仕方と技能の発達を調査し，現行の指導を反省するための資料を得ることをめざす．そのために，調査の視点として次の3点を設定した．

A．事象の問題解説に際しての関数の考えの変容の調査

B．関数の表現の仕方の変容の調査

C．AとBの関連の調査

Aは概念と考え方の中でも，特に考え方に焦点を当てており，Bは技能に焦点を当てている．

2. 調査の観点と調査法

（1） 活動の差異による調査の視点の具体化

調査に際して，上記の視点に対する，小中高それぞれに所属するわれわれの実際の経験と予想，教育課程の反省，先行研究などの議論を進めた．先行研究については，日数教会誌を過去20年ほどまで調べたが，学年や内容を限定した調査が主で，発達に関するものは少なかった[1]．そのため，われわれの経験と教育課程，教材に関する議論が中心となった．その議論では，関数の学習における子供が進める活動の学校間の差異が常に問題になった．その違いは，以下に示す2つの活動過程のモデルで示すことができる．1つの活動のタイプは，図-1のように，小学校から中学校にかけて扱われる「事象を関数で表現する」際の活動である．

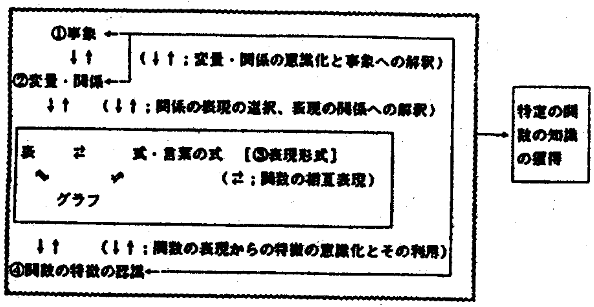


図-1　事象を関数で表現するに際しての活動[2]

太い2重波線の枠内が学習活動の流れである．矢印部分は，「関数の変化の様子を知るにはグラフを描く」というような手続きに関する知識で進められる．①の事象から変量やその関係②を意識することが最初の活動である．②で関係とは，時間が経過すると温度が変わるというような漠然としたものを意味している．次に，その関係の探求をはじめる．その探求によって，時間と温度の関係は，表として示されたり，グラフに表されたり，

* 北海道教育大学
** 筑波大学附属小学校
*** 東京学芸大学附属竹早中学校

の適用はできる．これは，中学生が事象を考察の対象とすることは苦手でも，表なら考察の対象にできることを意味している．そして，中3では，立式にみられるように事象に関数関係を適用する力が増大すると言える．より広く述べれば，中学生と比較して小学生は事象そのものを念頭に考察する傾向が高いことが示唆される．具体的に先に示した活動のモデル図-1で言えば，小学生（特に6年）が①の事象から③の表現形式の往復をする能力が中学生に比べ高いと言える．これは，表へは比例関係を適用できても，事象へは適用できないという中1中2の特異傾向での議論からわかるように，中学校における学習指導において，表式グラフの表現形式に関する技能的側面が強調され，事象を分析的に扱う機会が減っていくことと関連していると考えられる．すなわち，中学校において，活動のモデル図-1から図-2に移行していく過程で，③における表現形式が強調され，そこに意識が集中しているように思われる．結論的には，モデル図-1で，小学生は縦方向にかかわる活動に強く，中学生は横方向にかかわる活動に強いと言えよう．

次に中学校から高校のかけての事象の考察方法の変容をみる．［中高］問1を分析する．解答記述は，「記述内容」，記述部における「変域の言及の有無」，「グラフ」をかいたかどうかという3つの観点で分析した．

「記述内容」では，毎分4リットルという変化を記述したアエオキの合計割合が2/3～3/4であり，式を含むイエカキの合計割合は1/4前後と横這いなのに対して，グラフの説明記述を含むウオカキの合計割合は減少傾向にあり，高校入学後その減少は著しい．特にオは，中学で1割以上あるのに対して，高校ではほとんどなくなる．中学生がグラフを説明し，高校生が説明しなくなるのは，中学生がグラフを強く意識しているのに対して高校生が意識的な説明の必要を感じていないことを示している．グラフの説明記述とは「1次関数のグラフ」「切片が1で傾き4」というような内容が主である．この記述は，グラフに1次関数の知識を適用して説明したもので，グラフの説明としては意味をもつが，水量の変化の様子を述べよという設問の主旨からすれば本質的な意味をもたない．高校生がこの記述を省いた理由は，あたりまえと考え，設問の答えとして意識的な記述の必要を感じなかったか，無意味と考えたかであろう．

このことは先の活動のモデル図-1と図-2の差異に発想すると以下のことを示唆している．中学生においては式とグラフは別もので，「式からグラフへ」「グラフから式へ」というのはあくまで考えてからわかることと言えるのに対して，高校生では「式とグラフ」はむすびついており，グラフをみれば式が，式をみればグラフが連想できる状態にある[5]．いわば，中学生が式とグラフを別のスキーマで認識しているのに対して，高校生は式とグラフを構造化され一体となったスキーマで認識しているとみることができよう．

このことは，「変域の記述の有無」と「グラフ」の描き方からさらに強調することができる．「変域記述の有無」は，中学生が変域の意識が乏しいのに対して高校生では記述する者が学年進行とともに増加する傾向がある．これは中3からの定義域値域の意識的な学習の表れと言える．「グラフ」にみる変域の意識の仕方でもその傾向は認められ，正解のア，与えられた表の定義域によったイ，誤りではないウの合計割合は，学年進行とともに増加傾向にある．しかし，事象を意識すれば明らかに誤りのグラフであるエオの合計割合は中3で高い．また，負の領域も含めてグラフを描くオは中2～高1でほぼ同率である．これらの生徒は1次関数の知識を適用することにこだわり事象を忘れたと言える．先に示した活動のモデル図-1と図-2の対比でこれを分析するなら，中学生が式グラフ表の三角関係の考察に意識を奪われ，事象を分析することを忘れるのに対して，高校生になると既習の関数についての三角関係の考察には抵抗がなくなっており，事象を意識しながら関数関係を適切に適用することができるものと考えられる．前段の内容と関係付けて述べれば，中学生は，既習の関数を適用しようとしたとき表式グラフについてのそれぞれのスキーマの往来をする必要があるのに対して，高校生は既習の関数について構造化された総合的なスキーマを利用して考察することができると言えよう．

以上をまとめると，中学校から高校にかけての学年進行に伴う事象の考察方法の変容について次のようにいえる．中学生は，事象の考察に際して，表式グラフの3つの表現の相互関係の考察が課題となり，事象をそれぞれの表現と対応付けて分析することができない．それに対して，高校生では3つの表現相互の関係が確立されその考察が負担でなくなり，事象をそれぞれの表現と結びつけて分析することができるようになる．

以上の小中・中高の比較から事象を考察する仕方の変容を総合的に学校段階の差異に焦点を当ててまとめると次のように言える．

> 小学生は事象を土台にして数量関係の分析を進めるのに対して，中学生は関数関係の特徴を把握し，既知の関数を適用しようとして，表式グラフ3つの表現のいずれかを利用しようとする．そして，表現