礒田正美、”関数の水準の移行過程における思考の様相に関する調査研究～第１水準以前の場合～”, 数学教育論文発表会論文集, vol.24, pp. 69-72,日本数学教育学会

概要
筆者は、van Hiele に始る思考水準論を援用して、子どもの関数学習による、関数にかかわる思考の変容を記述する研究を進めている。その一貫として、本稿では、関数の各水準及び移行期の思考の様相を把握するために行った、小４～高３に渡るペーパー及び面接調査結果から、第１水準以前の面接のみを取り上げ、言語表現に着目して分析、考察した。Finding として、第０水準の子供は、個別的な事象の数量関係は考察しえるが、複数事象に共通な数量関係を比較対照することができないこと、二変量的な考えに乏しく、一変量的に従属変数に着目して考えること等がわかった。また、第１水準への移行期では、言葉の学習に伴って、二変量的な見方や、それを活用する表などの表現法が確立していき、複数事象に共通な関係が比較対照できるようになっていくこと等がわかった。さらに、思考水準論に対しては、水準への子供の思考の振分け論的な、従来の水準判定研究の欠落点を、移行過程における子供の思考の様相を示すことから、提起した。

参考文献

1)学会誌 69 巻 3 号、論究 49・50、72 巻 1 号、第 22 回論文発表会論文集
2)第 23 回論文発表会論文集、年報いわみざわ 12 号他

関数の水準の移行過程における思考の様相に関する調査研究
～第1水準以前の場合～

礒田　正美
北海道教育大学　岩見沢分校

要　　約

筆者は、van Hiele に始る思考水準論を援用して、子供の関数学習による、関数にかかわる思考の変容を記述する研究を進めている。その一貫として、本稿では、関数の各水準及び移行期の思考の様相を把握する為に行なった、小４～高３に渡るペーパー及び面接調査結果から、第１水準以前の面接のみを取り上げ、言語表現に着目して分析、考察した。findingとして、第０水準の子供は、個別的な事象の数量関係は考察しえるが、複数事象に共通な数量関係を比較対照することができないこと、二変量的な関数の考えに乏しく、一変量的に従属変数に着目して考えること等がわかった。また、第１水準への移行期では、言葉の学習に伴って、二変量的な見方や、それを活用する表などの表現法が確立していき、複数事象に共通な関係が比較対照できるようになっていくこと等がわかった。さらに、思考水準論に対しては、水準への子供の思考の振分け論的な、従来の水準判定研究の欠落点を、移行過程における子供の思考の様相を示すことから、提起した。

Ⅰ.はじめに

筆者は「小中高に渡る関数及び関数の考えの学習指導過程改善の意図から、学習指導によるこどもの思考の変容の実際を特定すること」を目的とした研究を進めている。これまでの研究では、van Hieleに始る思考水準論を援用して、その変容をおおまかに特定してきている[1]。本稿では、水準の移行過程も含めて、子どもの思考の様相をその言語表現から記述することを意図して実態調査した結果(当日配付)の一部を基に、関数の水準及び思考水準論に対する知見を得る。思考の様相の記述に際しては、先に筆者が提案した言語の記述枠組みを活用する[2]。

調査は、各学年の関数領域の学習以前における、水準の評価問題に対する解答内容を、各水準の言語と対比する目的でなされた。具体的には、小４～高３の子どもが前学年までの学習で獲得した思考の様相を、言語表現に着目して、学年進行という時系列で比較する

注；1)学会誌69巻３号、論究49·50、72巻１号、第22回論文発表会論文集、2)第23回論文発表会論文集、年報いわみざわ12号他

ことにより、各学年での特徴を把握することを意図している。調査は、ペーパーと面接の2本立てで行なった。特に、面接対象は、ペーパーでの結果から、該当学年で予想される水準を達成しているか、達成しつつあると考えられる者(熟達者と呼ぶ)である。

Ⅱ．第1水準以前の様相

ここでは、面接結果から、これまでの筆者の研究で実態把握が不十分であった、第1水準以前の思考に限定して述べる。

(1)第0水準の様相

第0水準は「事象を数量関係で考察できる」水準であり、事象そのものを日常語と数量の四則計算で考察する水準である。これまでの研究から、小3(本稿では小4)の熟達者が該当すると予想される。第0水準と判定された児童の表現には新たに次の点が認められた。

特徴1L0．特定事象について限定的に事象の数量関係を考察することはできても、異なる事象を比較して、そこに共通する関係や法則性を吟味することは難しい。

特徴2L0．計算を利用しての考察では、従属変数に着目しての二項処理が中心で、一変数的な見方をしており、二変量的な扱いは乏しい。特に、二項処理では等差数列的な考察が主で、倍概念は未分化である。

面接結果から特徴1L0を説明する。この水準の子供は個々の事象に潜む数量関係を理解したとしても、事象の数量関係を比較することは容易でない。実際、小4児童は下の問Aに対して、次の様に答えている。

P1(無答)「わかんなかった。〜以下略」

> 問Ａ．「バケツに水道から水を入れます。
> 　　入れた時間が長いほど、バケツの水かさはふえます。」
> この文と同じように「なにかをふやすと、他にふえるもの」がある文を、下のア〜ウからぜんぶえらび、○でかこみましょう。
> ア.「1時間で4km歩きます。
> 　　歩く時間を長くするほど、歩くみちのりは長くなります。」
> イ.「おなじくぎの重さをはかります。
> 　　くぎの本数が多いほど、重さはおもくなります。」
> ウ.「1000円で買い物をします。
> 　　ねだんの高い物をかうほど、おつりは少なくなります。」

P1はアイウの事象の数量関係は理解できていた。ところが、ウは「高いものを買えば買うものが増える」というように問題文中にないことまで思い浮べてしまい、どれも増えるような気がして、どれを選べばよいか、わからなくなったのである。

P2(アを選択)「んんとね、これはね、おふろだったら水でしょ、(アについて)1時間で4km歩くんでしょ、入れた時間が長いのと歩く時間が長いのと同じだからね。ウはね1000円で買物をしてね、おつりは少なくなりますっていうことはね、これは増えます(ふろ)とか長くなる(ア)とかいうね、だんだん上にあがっていくことをいっているのにね、おふろはね、少なくなるとかそういくことじゃないしね、なになにの時間が長いものをいうんでね、それをね、めじるしにするとね、イでもなくてね、アがあっているのかなと思って。(筆者)イは違うのかな。イ…わかんなくなっちゃった。いまあらためて読んでみると、やっぱりイも○したほうがいいんじゃないかと思って」

P2もそれぞれの事象の関係は理解しているが、筆者からの反駁があるまでは、時間(下線部)を目印に選択しており、「なにかをふやすと、ほかにふえるもの」という伴って変る量を判断基準にすることが容易にできなかったと言える。このような解答は、次の様な説明とは著しい相違がある。

小5児童(移行期)P3「たがいに増えているものを探すと、アとイ。(筆者)読んでパッとわかりましたか。だいたいすぐわかりました」

さらに、第1水準の生徒(中1)はみな「すぐわかりました」と答えている。

このような第0水準の子供と第1水準の子供の差異は、第0水準の子供が関係を一般的に把握する言語構造(この場合は関係を表現する言語)を持たないためと考えられる。その言語構造があれば、それに照して、事象を

判別できるはずである。

特徴2 L0について述べる。第0水準の子供の数量計算は、二変量(伴って変る)的見方は乏しく、基本的には一変量的である。特に、従属変数に着目し、二項間の差に発想して考える傾向があり、倍の考え方は未分化で適切に表現できない。実際、第0水準の子供は下の問Bに対して次の様に答えている。

P_1「4つづつ増えている。わけはかけざんは4のいくつぶんだから」

P_2「(わけの説明)二年生のかけるで考えた。かけるという意味は倍に増えるって意味だから、4×1だったら倍になってね、えっと4×1は4で、その次に1が2にかわって4×2だったら8ってようにやったんだけど。それでね、また倍になってね、2が3にかわって4×3は12。(筆者)倍ってどういう意味で使ってくれたの、4の1倍が4って言ってくれたの。うん。(筆者)1が2になったのは倍だね、2が3になったのは倍っていうの。うんとね、この(左側の)矢印のほうにね倍になっていくとね、こっちのほう(右側の矢印)もね同じ数どおり倍になっていく」

このP_2の発言は、大人の立場からは比例で言う「一方を2倍3倍すると他方も2倍3倍になる」という二変量的意味に聞える。しかし、あくまで、筆者の論駁に対して「n倍するとn倍になる」という意味の表現になったのである。実際、P_2は差もふくんで「倍」と表現していることが、右下の問Cの説明からわかる。

P_2(問Cの説明)「1キロが200円なら、2キロなら200円また増えて400円でしょ。そのつぎに、また3キロだったら、2倍して600円でしょ。それからまた、2倍にしたら、2倍っていうか、んと、200円ねむこうにっていうか800円のほうへいったら、800円でしょ。だから、そういって200円ずつ倍にしていってね考えたの。(筆者;表が4kgまでなのに棒グラフを5kgまでかいたことについて)5kgのグラフはどうやってかいてくれたの。さっきも言ったようにね200円ずつ(グラフが)飛んでいっているから。」

ここでP_2は、200円ずつ増加することを倍という言葉で表現することに抵抗を感じながらも、やはり「200円ずつ倍にしていく」と言っている。このように倍という表現が適切に使えない理由は、大人の立場からは比例概念がないためと言える。しかし、そのような説明は比例未習の子供の言語構造の説明として適切でない。このような倍の未分化(もしくは混乱した用法)が生じる理由として二変量的な意識ではなく一変量的な見方で、従属変数に着目した二項計算をしていることが、観察から推察される。すなわち、P_2は、表の下欄(200円、400円、$\boxed{}$円、$\boxed{}$円)が200円ずつ増加することに着目して400+200=600という二項計算をしている。そして、同数累加の考えからかけざんを想起して、倍という言葉が出たものと考えられる。

第1水準やそこへの移行後期の子供の場合、二変量的に考えることができ、「kg」と「値段」の対応を意識して、例えば「3kgだったら200(円)×3(kg)で600円、4kgだったら200(円)×4(kg)で800円」というような答え方をする。この水準の児童にはそのような考え

問B．右は4の段の九九です。
答えはいくつふえていますか。
そのわけもかきなさい。

$$\begin{array}{ccc} 4\times1 & = & 4 \\ \downarrow & & \downarrow \\ 4\times2 & = & 8 \\ \downarrow & & \downarrow \\ 4\times3 & = & 12 \\ \downarrow & & \downarrow \\ 4\times4 & = & 16 \end{array}$$

問C．1kgで200円のねんどがあります。このねんど2kgでは、400円になります。
(1) 3kgと4kgの値段を求めて下の表に書きましょう。

ねんどの重さ(kg)	1kg	2kg	3kg	4kg
ねんどの値段(円)	200円	400円	円	円

(2)グラフにあらわそう。
(3) 5kgの値段を求めよう。

方は乏しい。

以上の特徴から、第０水準の子供の言語構造には、事象と従属変数に対する二項計算の２つの表現法が予想される。事象の表現法は、問Ａの問題文ア～ウのような特定事象の数量に関わる具体(念頭)操作であり、これをＲ$_0$(事象；数量操作)とする。一変数的な二項計算の表現法は、問Ｂに認められた計算であり、これをＲ$_0$(従属変数；計算)とする。そして、問Ｃの解答からは、事象と数の計算が翻訳関係にあることがわかる。そこで、この水準の子供の言語構造は次の様にモデル化できよう。

第０水準の言語構造
Ｒ$_0$(事象；数量操作)$\rightleftarrows$Ｒ$_0$(従属変数；計算)

(2)移行期

これまでの研究によれば、第１水準への移行は小４～小６に渡る指導によると考えられる。本調査では、比例学習以前の小５(小４既習)、小６(小５既習)と調査したが、思考様相に差異が認めれ、移行期と一括するにはムリがある。そこで、移行前期と後期におおまかに分けてその特徴を述べることにする。

(2)－１．移行前期

移行前期として次の様な特徴が認められた。

特徴１$_{01e}$．伴って変る二量を、和差積商という対応の法則性に着目して説明することは知っているが、適切に活用できない。

特徴２$_{01e}$．伴って変る二量を、潜在的に一当たりに着目する発想から、その累加や何倍かなどと考えることができる。

特徴１$_{01e}$を説明する。小４既習の小５では、二変量的な意識で、法則性を議論する児童が現れる。実際、先の問Ａに対して、移行前期の小５児童Ｐ$_4$は次のように述べている。

Ｐ$_4$「おふろの水かさは、蛇口のひねりかたでかわるけど、一定にしておけば、時間が長いほど、水かさが一定にふえるので、同じようなものを探しました。ア、イは同じで、ウは差が一定になる。(筆者)ウは差が一定と考えてくれたの。というか、よくわからなかったんだけど、なんとなくウが違うと思って。ア、イは和が一定のような気もする(誤答)。(筆者)あ、和が一定か差が一定かで考えてくれたの。あ、そうじゃなくて、いま言った事はよくわからなかったんだけど、ウは差が一定のような気がした(誤り)。」

Ｐ$_4$の説明を、先に示した第０水準のＰ$_1$、Ｐ$_2$の説明と比較すれば明らかなように、二変量的な見方で、しかも、和差積商の法則性を意識しながら説明している。ただし、法則性を適切に把握できないのも移行前期の特徴である。無論、小５熟達者でも「イとウ、アは速くあるったり遅くあるったりできるでしょ、イは同じくぎだからそうならないでしょ。(筆者)ウは、？(間)。(筆者)何困ったの。ウは増やすものが入っていない」というように、第０水準の者もいる。

特徴２$_{01e}$について述べる。１あたりへ着目した考え方がめばえ、そのいくつ分という考え方がはじまる。下の問Ｄに対して第０水準の児童と移行前期児童を比較してみよう。

Ｐ$_6$(小５；第０水準)「んとね、当てづくっぽいんだけど、アはkmってつくでしょ、イもｍってつくでしょ、ウはcmってつくでしょ、エはｍだから。(ウだけcmだから違うとした)」

第０水準のＰ$_6$の場合、二変量及びその関係を比較できないから、文の特徴で考察せざるおえない。先のＰ$_2$(小４；第０水準)は次のように説明している「(イが違うのは)んんとね、エだったら□ｍで△ｇってかいてあるでしょ。イだったら□ｍで△円、ん～わかんなくなっちゃった。違う違う間違えた、イで

問Ｄ．下のア～エの文は、□と△にかんけいがあります。読んでみると、１つだけ□と△のかんけいがちがうものがあります。その文を○でかこみましょう。 ア．１時間に４０km走る車は、□時間では△km走る。 イ．１ｍで５００円のリボンは、□ｍでは△円になる。 ウ．面積が１２cm²の長方形では、たての長さが□cmなら、よこの辺の長さは△cmになる。 エ．１ｍで３０ｇのはりがねは、□ｍでは△ｇになる。

なくてウが○だ。他のは『〜で一する』ってかいてあるんだけど、ウは『〜の一に』ってなっているから」

それに対して、移行期前期の子供の場合、次の様に答えている。

P_7(小5；移行前期)「ウを選んだ。(筆者)どうしてですか。1mで500円なら2mなら1000円だから、…(以下この要領で説明した)」

P_7では、事象の二変量の対応関係の基本になる1あたりの考え方が利用されている。この考えが的確にできれば、事象の結果を表す意味での表を作ることができる。

このような考え方を、前述の第0水準と比較すれば、移行前期の子供は、二変量的見方で事象を把握することができると考えられる。

事象を二変量的に操作することによる表現法をR_{01t^-}(事象；二変量)と表す。これは第0水準の表現法、R_0(事象；数量操作)が進化した表現法とみることができる。該当者が小5小6(学習内容は前学年まで)であることから、事象からの二項計算の結果として表を生成することはでき、事象があれば表を読めるのだが、「2倍3倍すると2倍3倍に〜」という比例の性質のような、表単独の生成操作は未習であり、表を二変量的に扱う考察はできない。そこで、表の表現法をR_{01t^-}(表；？)と表す。？は、表単独での分析生成操作が未熟という意味である。

移行前期の子供の言語構造を次の様にモデル化する。特に、表については不十分な状態にあると言える。

移行前期の言語構造

R_{01t^-}(事象；二変量)⇄R_0(二変数；計算)
↓
R_{01t^-}(表；？)

(2)－2．移行後期

移行後期の児童の表現には次の特徴が認められた。

特徴1_{011}. 1当たりに着目して、倍の説明や立式ができる。
特徴2_{011}.グラフでも1あたりに着目する。
特徴3_{011}.グラフや式の考察では、表に立返って考える。
特徴4_{011}.事象無しの表には抵抗がある。

特徴1_{011}について述べる。移行後期の児童は、先の問Dに対して次の様に答えている。

P_8(小6；移行後期)「えっと、んと、1時間に40km走る車は、2時間だったら2倍で、3時間だったら3倍で…、イはアと同じ様な考え方をして‥同じ関係で、ウは12cm²は縦の長さと横の長さは決っていないから、関係が違うから、‥‥ウは違う」

前述のP_7(小5；移行前期)の説明には「倍」という用語がないが、このP_8(小6；移行後期、比例未習)の説明には、適切な「倍」の用法が認められる。これは先に示した第0水準の子供の未分化な「倍」の用法とは、明らかに異なる。

さらに、1あたりに着目した立式ができるようになる。実際、階段状にタイルを並べ、段数とまわりの長さを比較する問題では、移行後期の場合、「4cm×段数＝まわりの長さ」「段数×4cm＝まわりの長さ」という解答が目だった。商一定からの立式であれば「cm」は付かないので、1あたりの何倍かを考えて立式していると考えられる。実際、次のように説明している。「1段で4cmでしょ。2段では4cmかける2で8cmでしょ。3段では…。4cmに段数をかければいい」

すなわち、事象の表を分析する場合、右のような見方をしている。

x	1	3
y	a	b

特徴2_{011}、特徴3_{011}、特徴4_{011}の説明は割愛する(当日資料)。以上から、第1水準への移行後期の子供の言語構造をモデル化する。移行後期の子供は、事象を伴った表から、一あたりに着目して立式やグラフの考察をすることができる。表の変

化や対応の規則性は、上記の一当たりの立式に認められるように、移行前期の子供より向上している。そこで、事象と翻訳関係のある表による表現法を有すると考え、そこで用いられる表現法をR_{012}(表；一あたり)とする。事象や表からの立式、グラフ表現を得ることは可能だが、事象や表ぬきでの式やグラフを生成する操作をもたない。すなわち、式グラフは単独では存在し難く、必ず表に立返る必要があるから、式表現法をR_{012}(式；？)、グラフ表現法をR_{012}(グラフ；？)と表す。移行後期の言語構造は、次の様にモデル化できる。

移行後期の言語構造

R_{012}(式；？)
↑↓
$R_{01e''}$(事象：二変量) ⇄ R_{012}(表；一あたり)
和差積商
↓↑
R_{012}(グラフ；？)

III．考察

IIの結果から、関数の水準及び思考水準論に対して新しく得られる知見を示そう。

<u>第０水準について</u>；IIの結果によれば、第０水準は、個別的な事象の数量関係は考察しえるが、複数事象に共通な数量関係を比較対照することができない水準とみることができる。そこでの考察は、倍概念の未分化に認められるように、従属変数に着目しての一変数的二項計算に留り、二変量的な意味での考察はなしえない。それが、適切にできるのは、数量間の関係を変化や対応の性質に着目して考察できる第１水準である。言語面から言えば、表や(言葉の)式、グラフという関係の表現法を、個別事象の記述において稚拙に使うが、複数事象を比較分析する表現法(第1水準)としては保持していない水準と考えられる。探求の文脈という点から言えば、第０水準は個別事象の数量関係を分析活用する文脈にあると言える。複数事象に共通な関係のもつ性質を探ろうとする文脈は、第１水準を待たねばならない。

<u>移行期について</u>；IIでは便宜的に移行前期と移行後期と区分した。区分には根拠があるが、これを段階として固定的に把握するより、移行期に認められた子供の思考の変容の一面とみた方が、むしろ適切と言える。水準の移行には、教育課程、教材、学習指導に応じた多様な変容ルートが存在しえるからである。

強調したいことは、IIで示した言語構造の違いは、言葉の導入・再定義が、思考の変容(水準の移行)を促すことを示す点である。移行のための学習指導により、二変量を表現する表現法として、表や比例線分図などが次第に使えるようになる。そして、それに伴って、複数事象に共通な関係や法則性を把握できるようになっていくのである。例えば、ある事象及び表を指して「和が一定の関係」と命名する。その名前の活用が、他の事象との比較を容易にしていくと考えられるのである。

<u>思考水準論に対して</u>；従来の幾何水準の判定研究では、移行期の扱いの曖昧さから、水準は不連続ではなく連続ではないかと指摘されてきた。van Hiele自身「対象によっては、子供はより高位水準の思考をする（思考の文脈依存性）、それを利用して移行を促す」と考えているように、元来、子供の思考においては、水準は連続的性格も兼備えている。特定の判定課題で、ある水準と判定されても、別の課題では、子供の言語表現にさえ拘らなければ、(我々の目からみて)内容的にはより高位水準と思える場合があるのである。各水準は、数学言語の階層として教材から分ければ不連続とみなせるが、子供の側では、既習を越えた、主体的言語構築、創造的問題解決が起こりえるのである。混乱はそこにある。

学習指導は、多くの場合、水準の移行をねらっている。それゆえ移行期を視野に入れた議論が必要になる。前述した移行期は、学習指導過程で、繰返し数学言語が再構成されていく過程でのある断面を事例的に示している。