礒田正美, “日常世界の数学化をめざした課題学習(中学校数学科)-「写真を撮る」という課題にはじまる自己学習-“, 教科教育学研究, vol.8, pp. 29-51, 1990, 教育大学協会第２常置委員会

概要

近年、以前よりまして児童生徒が自ら学ぶ力（自己学習力）を育成することが、学校教育の主題として取り上げられてきている。この主題は、数学科の学習指導研究においては、児童生徒が数学を自ら発見したり創造したりする活動を、学習指導の中でいかに実現するかという視点と関って取り上げられてきた。特に新学習指導要領においては、その活動を重視して、新たに「課題学習」が提案された。本研究は、この課題学習について日常世界からの数学化の立場から研究するものである。そのためにここで採用する方法は、「日常身近なもので数学的に考えられる題材の写真を撮る」という課題設定に基づく学習指導である。この報告では、課題学習におけるこの学習指導の位置を明らかにし、この課題設定に始まる実践過程にみられる生徒の活動の分析を通して、この指導の数学教育上の意義を明らかにするとともに、この学習指導の自己学習力の育成における特徴とその実現のために検討すべき課題を明確化することを目的とする。

参考文献

1)礒田正美, “数学化の立場からの創造的な学習過程の構成”, 筑波数学教育研究, vol.2-7,8-A

2)H.Frendenthal, ‘Mathematics as an Educational Task’, D.Reidel, 1973 他

3)礒田正美, “H.Freudenthal の学習過程論”, 中学校数学教育研究会誌, no.20-23（合併）, pp.14-17

4)古藤怜, “課題学習について”, 数学教育研究上越教育大学数学教室, no.4, pp. 1-10

5)礒田正美, “算数数学教育に取り入れる実験の意義”, 中学校数学教育研究会誌, no.24-26（合併）, p.24

6)飯島康男, “算数数学教育に取り入れる実験の意義”, 数学教育学論究, vol.49,50, pp. 3-27

7)吉田稔（平岡忠編）, “新しい中学校数学授業プラン 3”, 大日本図書, p.75, 1989

8)C.GAttegno, ‘For The Teaching of Mathemaics’ , vol.1-3

9)NCTM, ’Geometry in Our World’

10)吉田稔, “数学における問題解決と想像力”, 筑波大学学校教育部紀要, vol.11, pp. 157-169

11)三輪辰郎, “数学教育における数学的モデル化についての一考察”, 筑波数学教育研究, vol. 2, pp. 117-125

12)K.ポパー, “客観的知識”, 木鐸社

13)I.ラカトシュ, “数学的発見の論理”, 共立出版

14)片桐重信, “数学的な考え方・態度とその指導 1・2”, 1988, 明治図書
15)古藤怜, “Problem Solving と数学的な考え方”, 筑波数学教育研究, vol.2, pp. 1-8
16)ドゥンカー, “問題解決の心理”, 1952, 金子書房
17)van Hiele, ’Structures and Insight’Academic Press’, 1987
18)佐伯胖, イメージ化による知識と学習, 東洋館
19)宮崎清隆他, “視点”, 東京大学出版会
20)佐伯胖, “人工知能と人間の思考”, サイコロジー,no.3, 1982, pp. 4-11
21)礒田正美, “課題提示方報の違いによる変量抽出過程の比較研究”, 日本科学教育学会論文集 13, pp. 279-282
22)Walte.M.&Brown S.I., ’What if not?’, M.Teaching, 1969
23)波多野誼余夫, “自己学習能力を育てる”, 東京大学出版会

日常世界の数学化をめざした課題学習（中学校数学科）

―「写真を撮る」という課題にはじまる自己学習―

礒田　正美（北海道教育大学岩見沢分校）

1.　はじめに

近年，以前よりまして児童生徒が自ら学ぶ力（自己学習力）を育成することが，学校教育の主題として取り上げられてきている。この主題は，数学科の学習指導研究においては，児童生徒が数学を自ら発見したり創造したりする活動を，学習指導の中でいかに実現するかという視点と関わって取り上げられてきた。特に新中学校指導要領においては，その活動を重視して，新たに「課題学習」が提示された。本研究は，この課題学習について日常世界からの数学化の立場(1)から研究するものである。そのためにここで採用する方法は，「日常身近なもので数学的に考えられる題材の写真を撮る」という課題設定に基づく学習指導である。この報告では，課題学習におけるこの学習指導の位置を明らかにし，この課題設定に始まる実践過程にみられる生徒の活動の分析を通して，この指導の数学教育上の意義を明らかにするとともに，この学習指導の自己学習力の育成における特徴とその実現のために検討すべき課題を明確化することを目的とする。

2.　課題学習におけるこの研究の背景と位置

はじめにこの研究の背景を述べる。数学を創造的に学習することが，「do

math. の指導」「活動主義」「数学化」「数学的モデル化」「オープンエンドアプローチ」「問題から問題へ」というようなキーワードとともに提案され，様々な実践的研究が積み重ねられている。このような研究が取り組まれるようになった背景には，日頃の多くの学習指導が，知識体系としての数学の側面を潜在的に強調し，知識技能の修得に偏りがちで，数学が本来含む「創造活動」が失われがちであるという認識が共通にあるようだ。特に，矢面の教師は，時間数の制約と受験の重圧の中で，多様な生徒に一定の内容を同じ歩調で「わかりやすく」習得させなければならないという現実に立っている。よく批判される。問題の解法を教えて練習するという授業展開はそのために編み出された過程とさえみることができる。それは言葉をかえれば，数学の創造活動とは異質な存在として学校数学が成立していることを意味している(2)。そこで生徒は，立体的に学ぶ存在とはなりにくい。実際，この授業展開では，生徒は「なぜこんなことを考えるのか」理解できなくても「なにかいいことがあるのか」という疑問を抱きながらも，与えられた問題が解けるようになることを求められる。このような主体的学習の成立し難い状況は，教材や指導がこどもの実態と離れる可能性が高まる学校段階ほど激しくなり，数学嫌いが増える傾向とも重なる。このような状況に対して，創造的な学習過程の実現に向けてなしうることは，キーワードにみるような視点で創造活動を導入し教育の過程を再考していくことである。その一つの方向として次期指導要領で設定された課題学習は，従来の教育課程や教科書教材の制約を受けずに創造活動を積極的に学習指導に取り入れることを可能にした。その意味で，学習指導改善の新しい可能性を秘めている。しかし，コンテントフリーゆえに，その扱いは，教師にゆだねられた課題である。

課題学習導入の意図は，指導要領作成協力者の古藤怜氏(3)によれば「自ら学ぶ意欲の振興」という時代の要請に答えての「算数数学の学習に主体的に取り組む能力・態度の育成」にあるとされており，文部省の指導書でも同様の指摘がなされている。同書の「改善の具体的事項」の中では「③思考の過程を重視

するとともに数学の有用性について理解を一層深めるため……ア各領域の内容を総合したり，日常の事象と関連付けたりした適切な課題による学習を通して思考活動が一層活発に行えるようにする」ことが意図されており，課題学習はそのために設定されたと言える。

加えて，今回の改定では小中高を通して算数数学のもつ「よさ」の理解が強調されている。この「よさ」の意味は多様に解釈できる。ここでは，数学の創造には事象からの数学化と数学の数学化の二つの側面があることから，学校数学のもつ「事象における実用的よさ（事象的よさ）」と「抽象化された数学における考え方自体のよさ（数学的よさ）」の二面から課題学習をみていこう。この「事象的よさ」と「数学的よさ」は，事象における利用価値から数学の抽象的考え方の価値が認められた事例が数学史上限りなくあるように，算数数学のよさの相補的な要素である。中学校数学は，事象の数学化を中心とした小学校算数から数学の数学化を中心とした高校数学の過渡期にあると言え，その二つの側面を内包している。そこでは，小学校でよくみられる「事象的よさ」から「数学的よさ」へこどもの興味の重心を移していくことが不可欠である。この過渡期の抱える問題は，ＩＣＭＥの前期中等教育部会等でも中心的問題で，筆者自身もこれまで問題にしてきた(4)。古藤怜氏は課題学習の事例に数学の香り高いものを強調している。氏の考えは，まさに過渡期に対応した「数学的よさ」の理解に配慮したものと筆者は考える。

では「事象的よさ」と課題学習のかかわりはどうであろう。今回の改定で課題学習との関連で見落とすことができないのは「数学的考え方」の再度の強調である。指導書では「改定にあたっての基本的な考え方」において「⑤事象を数理的に考察する能力を高めるとともに数学的な見方や考え方のよさがわかるようにする」と指摘している。事象を数理的に処理すること（数学化すること）は，数学的な考え方の強調の一環として二十数年にわたり数学教育の目標の一つとして強調されてきた点である。しかし，中学・高校では意味ある形で実現されていないのが実際ではあるまいか。例えば飯島康男氏は事象の処理と

深くかかわり，新指導要領でも強調される実験の扱いについて「我が国で実験実測が強調された時代に行われた実験は……結果や法則を教えるためのものであった。しかし，実験は，それを取り入れることによって科学的な方法や数学的な考え方を身につけさせようとするものであり，それを通して考える方法を学ばせることに中心を置かなければならない」(5) と指摘している。実際，教科書や授業で登場する事象は，実験も含めて，すでに数学化された数学的モデルか，それに近い形をあらかじめ潜在させたものが普通であり，考える方法を学ばせるものとは言い難い。こう考えると「事象的よさ」を実現する課題学習の設定も重要と言えよう。吉田稔氏は，先の古藤氏の論を受けて課題設定の視点の一つとして「ある real な生活場面があり，創造力によってそこからいろいろな命題を引きだすことができる課題」(6) をあげている。筆者が以下で検討する課題設定と実践の方法は，この課題設定の範疇であり，事象に対する数学的考え方の育成の側面が強い。課題設定の性格から「事象的よさ」とのかかわりが深いものの，どちらの「よさ」かは，実際の内容と考察過程に依存する。

指導書では，「課題の満たすべき要件」として「意欲的な追及の継続性，能力に応じた解決の可能性，利用される数学的考え方の多様性，課題の発展性，数学的考え方の能力や態度の評価可能性（要約筆者）」をあげている。後述の考察から明らかなように，筆者の課題設定もこの要件を備えると考えている。

3. 「写真を撮る」課題設定にはじまる課題学習の実践

(1) 先行研究との関連

映像を利用した課題設定は，古くはガッテーニョのシチュエーション論(7) 等に見られる方法である。特に写真を積極的に利用した教科書やスライド教材が欧米には存在し，オーストラリアやオランダなどでその種の教科書プロジェクト等が進行している(8)。日本では吉田稔氏がこの研究の先駆者であり，氏の学習意欲論や創造力に関する研究の一貫として位置付けている(9)。吉田氏自身が

この研究をはじめた背景の一つにも教科書作りがあるとうかがっているので，教科書作りとの関連が深いのもこの研究の特徴と言える。筆者がこの研究をはじめた契機は，吉田氏からの影響によるものである。従来の研究の特徴は，教師が提示した写真から課題設定をはじめる点や概念の具体化に写真を利用する点にあるが，この報告における研究の特徴は写真を撮ること自体も課題に含めた点にある。

(2) 実践過程

実践の目的は「日常生活からの生徒自身による数学の創造」にある。そのための課題設定として「写真を撮る」ことを要求した。このような課題の遂行には十分な時間を要するので，長期休業中を利用するのが適切と考え冬休みを利用した。対象は，筆者が前年まで勤務していた筑波大学附属駒場中学校の中1の生徒（120名）である。以下，その概要を述べる。

事前指導；海外旅行のスライドを見せる機会をもった。その際，数学的な構造の潜む写真を何枚か示し，「これはなんだろう」というような意識を持たせることに留意した。その後，別紙のような冬休みの課題プリントを配付し，レポート提出を課して，30分程度解説した。解説では，身近なところに数学が限りなく潜んでいること，その数学を意識する上でプリントの①⑧に書かれたような「おや，どうやって，なぜ」という発想と「どうして～か」「～でなければどうなるか」というような自問が大切であることを重点的に説明した。プリントの後半には「算額」の事例があるが，これは生徒の志向の多様性（この学年は歴史好きな生徒が多かった）と数学がみいだせなかった場合への配慮であり，和算の文化史的側面の理解の学習を意図している。

事後指導；休み明けに，レポートの報告会を1時間もった。1人1分程度で内容と感想を簡単に報告させた会であったが，「まわりの級友が何をみつけてきたのか」皆わくわくして聞いており，ほこらしげに報告する者に「オー」という驚きの感想がもれたり発表が終わる度に拍手が起こり，それぞれ課題に熱中し，級友がみつけたことに興味をもって聞いていたことを物語っていた。そ

冬休みの課題

課題は２つです。

１．冬休みの生活の中から数学を見つけること、創ること。

我々の日常生活の中には、意外に身近なところで数学や数学的な考え方が利用されていることが観察される。例えば、道路に目を向けてみよう。舗道の敷石には、普通正方形が利用されているが、なぜ正方形が利用されるのであろう。他の多角形で敷き詰めた、舗道はないのであろうか？　マンホールのふたは普通円が利用されているが、なぜ円が利用されているのだろう。次は、窓に目を向けてみよう。窓から光が差込んでいる。光はどのような形の影を創り出すのだろう。また、どうしてそのような形の影ができるのだろう。このように、日常生活の中には、数学的な題材が少なくないのである。

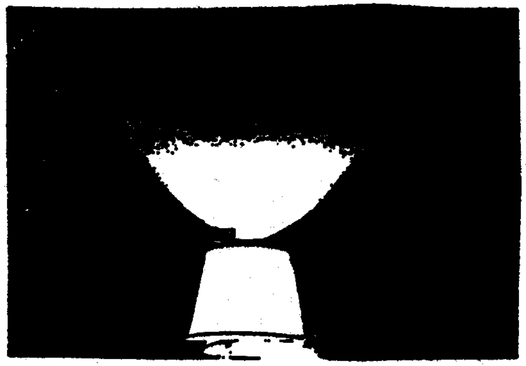
冬休みの課題は、このような日常生活潜む数学的な題材を、冬休みの生活を通じて見つけ出し、それを算数や数学の知識を利用して分析することである。例えば、君たちの中には新年の御宮参りにでかける人がいるだろう。明治神宮に参拝する人は毎年何千人何万人にもおよぶ。どうやって数えているのだろうか？　などと考えれば、題材は数限りなく見つけられ、数学を利用して分析することもいくらでもできるのである。

課題はレポート用紙まとめる。その際、次の点を守ること。

①．<u>毎日の休み中の生活の中で、数学的に考えられる題材はないかと心掛ける</u>。
　その際、「おや」「どうやって」「なぜ」という発想を大切にする。
　<u>題材</u>は、なんでもよいが、<u>意外性のあるものほど興味深く面白い</u>。

②．必ず、その<u>題材を「写真」に取り、レポートに張り付ける</u>。レポートにまとめる際には、必ず「いつ、どこで、だれが、なぜ、どのようにして(５Ｗ１Ｈ)」写真を取ったかを記入する。写真があることで、レポートは生き生きとしてくるし、他の人にわかりやすく伝えられるからである。

③．題材を、小学校時代や中１の代数や幾何でこれまで<u>学んだ数学の知識や考え方を利用して分析する</u>。その際、「どうして～か」「なぜ～か」「～でなければどうなるか～」等といった問い掛けを自分にすることが大切である。わからないことがあったら、調べてもよい。ただし、あくまでもわからなくなった時である。また、レポートに書くとき、わからないまま本を写すようなことをしたら意味がない。問題を解くのに答を先に読んでしまうのと同じようなことになりかねないからである。



自分の言葉で書かれていないレポートは、迫力がなくなり、書く側もつまらなければ、読む側も読む気がしないのである。

前のページの写真は、以前君たちにみせた、カナディアンロッキーのバンフスプリングスホテルの部屋の中のスタンドの光でできた影の写真である。この影をみてわたしは「あれ？」と思ったのである。影でできた曲線が、良く知っている曲線だからである。君たちのこの曲線を小学校６年の時に勉強しているのである。どこでだって、それは小６の教科書をちょっとひっくり返せばわかるハズである。

歴史の好きな人がいたら、江戸時代の和算家(日本の数学者)の足跡を写真に取るのもおもしろい。例えば、上野の不忍の池近くには東叡寺というお寺がある。このお寺には、「算額」といって数学の研究結果を展示した額が残っている。上野の近くにいる人は、是非一度いって写真に取ってくるとよいだろう。このような算額は神社仏閣に掲示されており、東京都には１６、埼玉には９１、神奈川には３つ残っている。東京都の他の場所では、八王子市住吉神社、府中市大国玉神社、稲城市大沢神社の算額などが有名である。下のリストを参考に、行ってみるとよい。ただし、公開されていないものもあるので、あらかじめ問い合せて、見せてもらえるようにお願いしてから行くこと。他の県が知りたければ私に相談する。千葉の佐倉にある国立民俗歴史博物館にも算額があります。

東京都　(16面)

寛政6年正月	1794	二宮神社	秋川市二宮	染谷（春芳？）門弟	2	
文政8年10月	1825	[illegible]不動	足立区[illegible]町	小泉[illegible]	1	
嘉永3年5月	1850	金王八幡神社	渋谷区渋谷	[illegible]門正[illegible]	1	
嘉永4年	1851	住吉神社	八王子市片倉	[illegible]門人	4	郷土資料館
嘉永5年2月	1852	[illegible]稲荷神社	武蔵野市[illegible]町	[illegible]門	1	
嘉永7年正月	1854	氷川神社	足立区伊興町	[illegible]門人[illegible]	1	[illegible]
嘉永7年3月	1854	子育地蔵	足立区伊興町	[illegible]門人[illegible]	1	[illegible]
安政2年3月	1855	[illegible]不動	足立区[illegible]町	小泉[illegible]門人[illegible]門	1	
安政6年4月	1859	金王八幡神社	渋谷区渋谷	山本[illegible]三郎[illegible]	3	
元治元年11月	1864	金王八幡神社	渋谷区渋谷	野口[illegible]太郎[illegible]	1	
慶応4年	1868	大鷲神社	足立区花畑町	太田広信門人	7	
明治10年	1877	大沢天神社	稲城市矢野口	小俣[illegible]門人	19	
明治18年	1885	大国魂神社	府中市宮町	小俣[illegible]門人	36	222×121cm
明治年間		大鷲神社	足立区花畑町	太田広信門人	判読困難	
昭和42年5月	1967	[illegible]	台東区上野公園	下平和夫	3	
昭和42年5月	1967	[illegible]	台東区上野公園	下平和夫	1	

神奈川県　(3面)

嘉永4年7月	1851	大稲荷神社	小田原市[illegible]	[illegible]門人[illegible]	1	
明治22年8月	1889	[illegible]神社	足柄上郡中井町井ノ口	[illegible]門人	[illegible]のみ	
大正10年4月	1921	比々多神社	伊勢原市比々多	[illegible]	6	

レポートの様式と期限；Ｂ５版、１月１４日まで(写真の現像等の時間を考慮しました)

２．休み明け(１月１７日以降)に代数の実力テストをやります。

問題集から出題しますのでよく復習しておく。

の後，３学期のほとんど毎時間５分程度を利用して，内容が高いものや発展の余地があるレポートを選んでプリントして，解説した。解説は，さらに検討の余地のあることや，ほんとにそう考えてよいのかなど，そのレポートから生まれる新たな課題を全体に提示することを目的とした。そして，興味をもった者はさらに追究しレポートするよう要望した。最終的に配付したプリントはＢ４両面刷りで50枚以上になり，紹介した人数では，120名中30名前後になった。別紙のＲ１～Ｒ７はそこで取り上げたものの一部である。

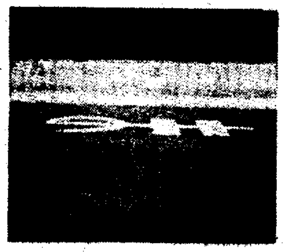
Ｒ１　縦長道路標識はなぜ？（要旨；写真，図文ともに生徒のもの）

道を歩いていると，たくさんの道路標識を見ます。この道路標識は文字も記号もすべてが縦長です。なぜ道路標識の文字が縦長なのかと思って，１月３日に家の近くの道で写真を撮りました。

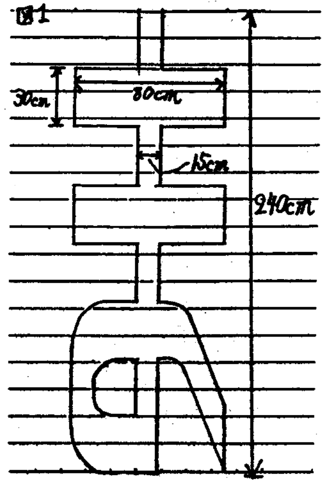
〈車の中から撮った写真〉

〈『ま』の字が１：１に見えるところ〉

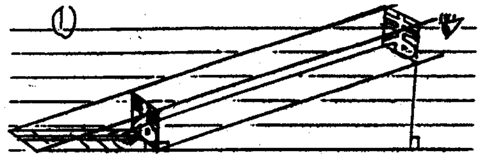
〈『ま』の字を横から撮った〉



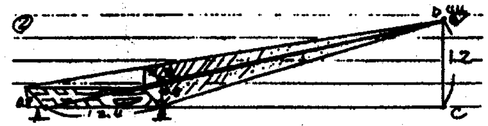
実際の形は，図１のように縦80cm，横240cmのとても長い縦長で，これが本当に１：１に見えるのだろうか？　ぼくは，運転席が低くて，ななめから道路標識を見るので，縦に長く書いてあるのだと思った。どのように比を考えて，縦長にしているのだろう。



まず，次のように考えた。



しかし，これでは像を結ばない。次は，①の時に平行移動させたのではなくて，１点に集まるようにした。



〈考察の概略〉

$1.2:0.8=x:2.5$

$x=3.6$

辺 $BC=3.6-2.4$

$=1.2$

答　辺 $BC=1.2$m

辺 $BC=1.2$m では近すぎておかしい。そこで②と違えて，辺 AD に対して辺 EB を直角においた。

〈考察の概略〉

$2.4:0.8=AD:1.2$

$AD=3.6$

$AC^2=AD^2-DC^2$ から

$AC=3.4$，$BC=1$

答　辺 $BC=1$m

これでも身近すぎると思った。ぼくは三角形の相似を利用して簡単に解けると思っていたけど，全く解けなかった。辺BCに像ができると考えたのが間違いだったと思う。(《玉川児童百科大事典》からピラミッドの高さの測り方を引用。）図が同じだから，これを利用すると解けるのではないか？

〈考察の概略〉

∠DBC=4.5°

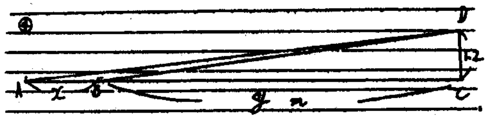
∠DBA=4°

tan B=…，tan A=…

y=14.9

y=2.3

答 辺 BC=15m



反省；角A，Bが測れないので，x，yを実測して tan B=1.2/y から ∠DBC を求めた。最後のやり方の意味はわからないが，事典の図と同じだから，公式通りあてはめて計算した。

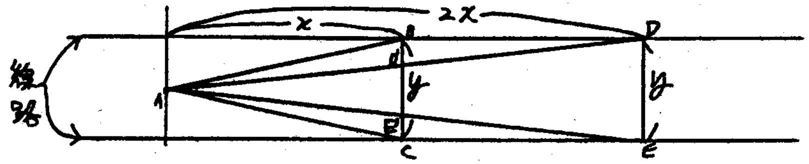
R 2 平行な線路（要旨；写真，図ともに生徒のもの）

直線区間では，線路は平行である。つまり2本のレールの幅は一定でなければ，列車は走ることができない。その2本のレールは遠くへ行くほど幅が狭く見える。そのままいけば，レールが交わりそうである。しかし，そのようなことは絶対にない。そのことについて考えたいと思う。

2本のレールの幅は遠くへ行くほど狭くなるように見える。その割合は，距離が2倍になると幅が1/2になるように見える。距離と幅は，反比例するわけである。だから，無限に遠くの線路を見ても，幅は，無限分の1になるだけで，決して0にはならない。だからレールは交わらない。

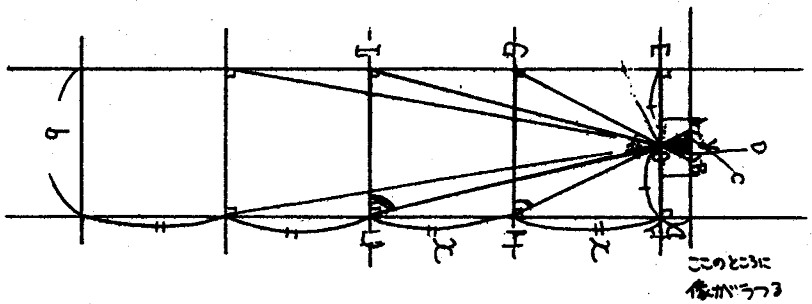
R 3 平行な線路（肯定的な解答例）

R1を参考に，下のように図式化する。相似な三角形の性質を利用すると，距離を2倍すると線路の幅は1/2倍になることがわかる。だから距離と幅は反比例する。



R 4 平行な線路（肯定的な解答例）

R3と基本的には同じだが，カメラで写真を撮ったことから，下のように図式化して解答したもの。



R 5 平行な線路（否定的な解決例）

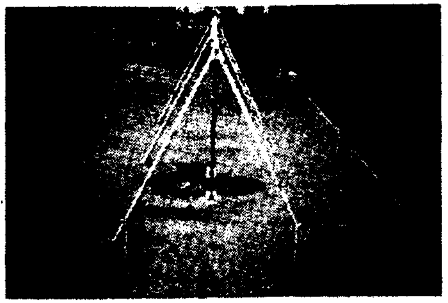
実際に調べてみる。写真を撮って，枕木で距離を測り，幅は写真上の距離を測ると，反比例していないことがわかる。

R 6 平行な線路（否定的な解決例）

R4と同じ図で，距離xをフィルムの位置を基点に測った考察から，反比例しないことを結論付けた。

R 7　黄金長方形について

黄金長方形とはなんであろうということで，黄金長方形を知るためには，黄金分割と黄金比について調べないとわからない。（この後，正五角形の作図と黄金分割，黄金比の説明が進めらた，縦横の辺の比が1：1.6… となる黄金長方形の定義がなされる。続いて，家の中や通学途中で，あらゆる長方形の写真を撮り，辺の比を調べている。例えば上の写真）



黄金長方形は，人間がみて一番美しい長方形といわれている。この長方形をどのようにつかっているのか？　これは見た目というのもあるし実用性というのもあるし定型というのもある。

見た目：本類，まど，机，額，看板，ぶらんこの周囲の柵

実用性：電卓，レンジ，ガスコンロ，ふろ，タンス，紙

定　型：はがき，テレホンカード，定期，カセット

これらの使いみちを考えるとたいへんおもしろいものがあり，数学がこんな分野まで関係していることに感動を覚える。毎日，ボーッとすごしていると，こんなことには気がつかない。数学の図形には特ちょうがあって，その特ちょうを生かしていろいろな物がある……

4.　生徒の活動の分析

ここでは，生徒から提出されたレポートと授業実践の過程にみられる数学的活動を，2で述べた研究の背景にある「数学の創造活動の実現」「事象的よさ・数学的よさの認識」「数学的考え方の育成」に関わって分析し，その活動の特徴，意義そして実践課題を明確する。

(1)　数学の創造過程からの分析とその意義

生徒による事例にどのような数学的活動が認められるかを述べる。レポートのテーマとそれに対するアプローチの仕方は多様であるが，事象からの数学の問題設定の仕方として，次の2つの方向性が認められた。

A．事象における問題を数学的に考察したもの。

B．自分のもつ数学的知識を反映させる事象を探したもの。

多くの生徒のレポートではA，Bが混在している。Aの典型から述べることにする。レポート（R1）は「縦長道路標識はなぜ？」というテーマで書かれたもので，事象における問題（疑問）を数学的に考察したAにあたる。三輪辰郎氏によれば，事象の数学的解決は通常数学的モデル化過程を踏むと言える[10]。

そこで，数学的モデル化の立場からこのレポートを分析する。

氏は，数学的モデルMの決定要因として，事象O，作成主体S，主体のもつ目的P，主体の使い得る手法・理論Tをあげて，M=f（O，S，P，T）と説明している。この場合Oは縦長道路標識であり，Sは縦長道路標識に疑問を抱いた生徒，Pは縦長の比の設定要因を知ること，Tは初等幾何（この生徒たちは相似の考え方既習）と事典からの引用ではあるが三角比である。三輪氏は，モデル化過程を「(1)事象からの数学的問題（モデル）への定式化，(2)数学的解決，(3)解の事象への解釈によるモデル評価，(4)より進んだ定式化（モデル化）」と階層化している。R1の場合，(1)は「縦横文字の比」の決定法が動機となり①のモデルを作る。(2)では数学的解決を試みるが，(3)像が結ばないという現実的理由から，(4)再度のモデル化と(2)，(3)を繰り返していき，②〜④のモデルが設定される。特に，R1が興味深い点は，モデルの評価と再構成の過程を含んでいる点である。ここでモデルの評価は，数学的に得られたBCの距離が，経験に照らして適切か否かという基準で進められている。授業で取り上げたR1に対して，生徒は意外な所に数学的考え方が潜んでいることを知ることができたばかりでなく，数学的モデル化の過程，特に(3)，(4)過程の説明を受けることができた。三角比については，説明していない。

生徒R1の活動は，1人の課題解決に留るものではなく，授業で生徒全体がレポートを読む過程でも写真の存在により実態化され追体験される。教師の側としては，R1の結論（④のモデルの評価が現実的でない）に対するより詳しい究明が他の生徒から出ることを期待したが，多様なモデル設定がなされてい

たことと，未習の三角比によるモデル④が登場したことからそれ以上の報告はなかった。次に，１人のレポートを発端に多数の生徒がモデル化過程に参加した事例Ｒ２～Ｒ６を取り上げる。Ｒ２は，下線部分の説明が不十分であるためにより詳しい検討の余地を残していた。授業でＲ２を配付した際に「下線部分はほんとに正しいか？」という課題を出し，興味を抱いた者は解答するように指示した。その後，７名がレポートを提出し，４名が肯定的結論を，３名が否定的結論をした。見解が分かれたのは，距離を測る基点の相違にある。肯定的結論を得るのはＲ４のように距離をレンズの位置から測る必要がある。このカメラのレンズ位置は写真上ではわからない。したがって，Ｒ２が写真を見て「距離を２倍とすると幅は1/2倍になる」と考えたなら誤りと言えるが，距離の測り方によっては正しい結論と言える。授業では，肯定意見・反対意見両方の見解をプリント配付し，考察の仕方がどう違うか問題を投げかけ，時間もなかったので距離の測り方の違いを解説した。

Ｒ２にはじまり，Ｒ３～Ｒ６に至る考察過程は，Ｋ．ポパーの「問題P_1→暫定的理論〔ＴＴ〕→評価による誤り排除〔ＥＥ〕→問題P_2」という知識の進化理論[11]やＩ．ラカトシュの証明と論駁の過程[12]に類似し，日常世界の数学化過程の一つの典型とみなすことができる。実際Ｒ２のレポートはあいまいな暫定的理論を提示しており，それに対する論駁が加えられることで，より適切な説明理論が構成されたのである。この事例は，この学習指導過程において，課題の連鎖が個人のレベルだけでなく生徒全体の中で進行し得ることを示している。

次に意義を述べる。

Ｒ１やＲ２～Ｒ６は，数学的モデル化の過程とみることができるから，数学的モデル化を数学教育に取り入れることの意義を含みもつと言える。三輪氏はその意義として次の点を指摘している。「ア）学校数学をさらに応用可能なものとすること，イ）モデル化過程を通して数学的な考え方を育成できること，ウ）現実問題の取り組みとして一層の数学学習への動機付けとなるとともに事象との対決における知識開発過程に積極的に参加できること（要約；筆者）」

通常の学校数学では，モデル設定の過程である(1)やモデル再構成の(4)の過程は省略されていた。過程(1)では事象から数学的構造を見出すことが必要になる。数学を見出して写真を撮るという課題はまさにその点を学校数学にもたらすものである。実際，この課題では，自分が意識したことから問題設定することを要求され，事例のような問題を見出している。そして，モデルの再構成(4)が個人や共同でなされる。生徒が取り上げた問題は，従来の数学学習にない動機付けを与えている。一つは，題材が，身近で意外性を備え，写真という real な実態が級友から提示される点である。級友の撮った写真は，生徒の世代に共通な認識の視点や着想を含んでおり，同じ題材を教師が提示する以上に実感をもたせると考えられる。もう一つの点は，数学自体に興味を持てなくなった生徒も，このような課題なら自分との接点を自由に作れ，興味を見い出せる点である。さらに事象との対決における知識開発過程への参加が認められる。例えば，Ｒ１で得る新知識には，事象に対するものばかりでなく，最後の④のモデルによる方法があり，この主題における一般性の高い方法となっている。数学的知識の活用としては，Ｒ１では比の利用と三角比がみられる。特に三角比は未習であるが，生徒は積極的に調べこれを活用している。従来，発見的，創造的と冠する学習指導においては生徒が未習であることを暗黙の前提としていた。しかし，現実には塾等で先取りした生徒が都市部では認められる。むしろ，その前提を排除し，生徒自身が自分で調べ活用して知識開発を進めることを是認することが，高度情報化社会における今日的な創造的学習指導において強調すべき一点ではないだろうか。調べてわからなかったことは，後に学校で学ぶ際の動機にもなろう。

以上は，事象の問題解決に関するＡタイプの活動である。一方，自分の数学的知識を事象に反映させるＢタイプの活動の典型としては，Ｒ７のレポートがある。黄金比は図形（授業担当：井上正允教諭）の学習で既習であり，その黄金比を黄金長方形として周囲から探した活動の報告としてＲ７が提出されている。このＢタイプの活動は，Ａタイプの数学の創造過程とは異質であるが，数

学的知識の反映を進めたもので，モデル化過程では「(3)数学的帰結の解釈」に相当し，数学自体に意味ある認識をもたらしている。この生徒は次のような感想を述べている。「毎日ボーッとすごしていると，こんなことにはきがつかない。数学の図形には，特ちょうがあって，その特ちょうを生かしていろいろな物がある。黄金長方形には，見た目と実用的というつの特ちょうがあり，数学的には，黄金出割という分けかたがあって，その応用の一つであるという特ちょうがあろう。黄金長方形。なぜ人々が後に黄金とつけたのかわかってきたような気がする……」ここで生徒は，数学的知識のよさを実用の中で認めたのである。このような報告は，やれば誰もができるのであるが，実際にはなされていないようだ。これを授業で紹介することによって，このような認識がすべての生徒に共有されるのである。Ｂタイプの活動の意義は，Ａタイプの意義を含めて次節で数学的な考え方の立場から述べることにする。

先に述べた「よさ」の学習との関連では，上記のような「事象的よさ」を認めさせる内容が多いが，Ｒ７のように「数学的よさ」とかかわる内容もある。例えば「カレンダーの数学」という内容の報告がある。カレンダーの数字の配列を研究したもので，古藤氏の「九九表の法則」と類似の考察を進めている。このレポートに対しては，課題の連鎖として「万年カレンダーを作る」という報告が他の生徒から提出された。それらの報告は，動機や発端は事象にあっても，その追究過程は純粋に数学的な考察の性格が強く，数学的考え方のよさを味わえるものとなっている。

(2)　数学的な考え方の育成の立場からの意義

この学習の意義を数学的な考え方の育成と関わりでさらに明らかにする。数学的な考え方の先行研究は膨大である。ここでは，その中から態度も含めた片桐重男氏の研究[13]とストラテジーとの関連で位置付けた古藤氏の研究[14]を前提にする。レポートに表れる生徒の多様な活動には，多様な数学的考え方が認められる。ここでは具体的に事例にみられる個々の考え方の意義を論ずるのではなく，数学的な考え方の活用態度の育成とその活用領域の拡張という立場で意

義を述べる。

この学習の一特徴は「写真を撮る」という課題設定にはじまることである。この設定により，生徒は自分自身の数学的知識や考え方，数学観に応じて被写体を探さねばならず，長期休業中の生活を通して事象を数学的に観察し数学的に考えることを要求される。片桐氏は数学的な考え方の育成には数学的に考えようとする態度の育成が伴うべきことを強調し，数学的な考え方・態度が「……しようとしている」という構えをしているかどうかに着目してとらえられる点を強調している。この学習もこの「被写体探し」という行為を通して事象を数学的に考えようとする構えを育成していると言える。例えば，ゲシュタルト心理学者であるドゥンカーは，赤色に着目して回りを見回すと赤い物が飛出して見えるようになり，円形に着目すると丸い物が飛び出して見えるようになることを指摘している[15]。幾何の思考水準を設定したファンヒーレは最初の幾何の学習を「空間のゲシュタルトの獲得」と呼んでいる[16]。そこでは，生活空間を形に着目して意識的に把握できるようにすることが本質的だからである。形に着目することにより，実世界は，形を視点に構造化されていき，事象に対する図形的見方・考え方が育成されていくのである。同様なことがこの学習において，生徒の特定領域に限定されない数学的知識・見方考え方・数学観等を反映して進められる。実際「写真を撮る」課題は，被写体探しの過程において，所有する様々な知識や考え方をあれこれ思い浮かべながら周囲を見回し，逆に周囲を見回してはどんな数学と関係するか考えることを生徒に要求する。そして，その結果，事象を数学的に考えようとする態度や数学的構造を見抜く力を育てることができると考えられる。先に引用したＲ７の生徒の感想は，「ボーッ」と眺めた状態から数学的に被写体を対象化し，数学的な視点で周囲を観察できるようになったことを物語っている。認知心理学ではこのような見方設定の重要性は，視点との関わりで指摘されている[17]。被写体探しは数学的視点の設定であり，理解を深める意味でも，上記のような構えをもたせる課題は意義がある。

またこの学習の一特徴は，事象における問題設定と，事象に数学の内容と方法に関する考え方を適用する点にある。これは数学的な考え方の活用領域の拡大を意味するものである。古藤氏によれば数学的な考え方をストラテジーとして読みかえることができる。最近の認知心理学の研究によれば手続的知識（ストラテジーを含む）は領域固有な知識としての性格が強く，他領域へ転移しにくいことが指摘されている[illegible]。すなわち，その手続きを利用してきた領域の文脈をはずれてその手続きを利用することは，それ自体学習を必要とすることなのである。すでに述べたように，中学校・高校の通常の教材はすでに数学化されており事象に対する数学的な考え方の活用能力を育てるものとは言い難い。そこで事象への数学的考え方の活用に関る学習が意義をもつと言える。

最近，筆者は事象から数学化していく教材を「映像」と従来型の「問題文＋図」で提示し，生徒の思考過程の違いを比較検討した[illegible]。そこでわかったことは，「問題文＋図」では本来望まれる思考過程とは全く異質な思考が展開されることであり，「映像」では望まれる思考過程を進めるか，期待したような考察が深まらないかどちらかであることである。従来型の課題提示が適切な思考過程をとらない背景には，その提示法がモデル化の過程(1)，(4)を含まないことがあり，事象への数学的考え方の活用力を育てるものとは言い難い。一方，「映像」で考察を深められなかった生徒の存在は，事象への数学の活用の仕方自体の学習がなされていないことを示唆している。それゆえ，この学習ではその活用力を育てることを狙いにしているが，活用力をもっていない生徒にとっては酷な課題となる。実際，多くの生徒は，事象において被写体とする数学的構造を見出し問題を設定する最初の過程で悩んでいた。対象とした生徒が中１ということもあり，吉田氏の提案するような数学的な意味の命題がなかなか作れない点がその一つの背景にある。

このような点に配慮して，事前指導では「おや，どうやって，なぜ」という発想と「どうして～か」「～でなければどうなるか」というような自問を強調したわけである。「でなければどうなるか」という自問は，'What if not'[illegible]

と呼ばれ，問題設定や解決に際してのストラジーとして有効性が認められてきた方法である。このストラジーは多くの生徒の考察に認められ，この課題においても有効であったと言える。先の生徒の感想にもみられるように，ただ「ボーッと」周囲をながめても考察は深まらない。認めた対象に対して「でなければどうなるか」と発想することで考察の対象や考えるべき方向が明確化される。課題プリントのマンホールの発想を利用した例で言えば，どんぶりやコップ，皿などの食器は円形が多いが「円でなければどうなるか」，路上のタイルは正方形が多いが「正方形でなければ～」という具合である。正方形のタイルを認め「なぜ正方形のタイルが使われているのだろう？　正方形なければどうなるのだろう？」と考える過程で，考察の対象は「タイルの形状」に限定されていく。そして，さらに合同図形に限定されていく。その後，さらに合同図形の敷き詰めの問題として数学的な対象となり，敷き詰めの可能性の考察へと向かうのである。このような問題設定の方法を明らかにしていくことは，実践的な課題である。

5.　自己学習力の育成の課題

この課題学習は，授業を離れた自己学習を基本として，生徒を主体的に研究する情報の発信者として位置付け，教師の課題提示と解法の特徴把握，疑問点など情報交流の場を担う立場に位置付けている。これまでの考察から，自己学習力の育成とのかかわりでこの課題学習の具体的特徴を箇条書にあげよう。

- 生徒自身の視点に立って，疑問や驚きなどに発する必然性を含んだ考察の動機までも要求すること
- 課題選択や考察の方法などを，生徒が能力に応じて自由に決定できること
- 被写体を探す過程で，事象から数学を見出そう，利用しようとする態度と事象における数学的考え方の活用力を育てること
- 被写体を探す過程で，生徒は自分の数学的知識を事象に反映させる方法を身につけていくこと

・生徒は解決のために不足する自分の数学的知識や考え方を補うために，新たな学習の必然性に基づく学習経験をすること

・報告をまとめる過程で，数学的に知識を整理する方法を学ぶこと

・事後指導は級友の視点や方法など教え合う情報交流の機会となること

・そこでの情報交流では，課題設定の状況が reality を備えた写真を含めて提示されることや提示者が共通の視点を持ち得る級友であることなどから，聞く者は提示された課題に共感を憶え，その課題に引き込まれていくこと

・発表されるレポートは生徒が書いたものであるため，通常の授業のような教師による新出内容の解説をほとんど要しないこと

・情報交流では，生徒は情報の洪水を体験する。そこでは，各自報告の題材や方法，結果の評価などを，自分の興味や知識，数学観などと対照して選択・評価することが求められること

・共通の好奇心をもった級友による再度の追究にみるような批判的交流によって課題が連鎖し，さらに研究が深まること

以上のような特徴は，波多野誼余夫氏等の主張[10] などにみられる自己学習力育成の強調点ともよく符合している。従来の創造的な学習指導に関する研究の多くは，授業時間内を対象としており，生徒がいかに主体的に情報を発信するような場を作るか，教師はいかにその情報をコミュニケーションの中で，整理し制御して1時間のドラマを作り上げるかという点に焦点が当てられたため，上記のような特徴の実現には制約が多かった。実際，従来の授業では生徒は潜在的に「～を学べ，考えよ」という文脈に立たされている。自己学習力は生涯学習との関連で提案されてきたが，学校卒業後の学習の文脈は「必要にかられて」や「興味があるから」等であるから，学校の授業とは異質な文脈にある。授業外での生徒自身による研究を基本として，レポート提出義務以外は生徒の自由意志にゆだねられたこの学習は，学習の必要感一つにしても生涯学習により近い形態をとっており，従来型の学習指導にない自己学習力の育成要因を含んでいると言える。

この課題学習の実践上の課題は，従来型の学習指導の範囲を越えた点にある。例えば，従来の夏休みの課題等は，通常教師が評価して終わりであり，一部の教師によって発表会や展示がなされるに留まってきた。多くの数学科教師が考える指導法には，発表会や展示会などにより生徒が互いに評価し合うような芸術系教師の方法が積極的な意味では含まれていないためである。発表会をもった場合でも，さらに不十分な点の考察を要求するようなことはなかったように思う。それゆえ，課題の連鎖にみられる知識の批判的形成の機会は少なかったのではないだろうか。実践上の蓄積がないゆえに，このような実践の実現のためには，研究すべき課題が多い。筆者の実践が成立した背景には，附属の生徒を対象とした特殊条件と，この学習以前に数回に渡ってレポート学習を課してきたため生徒が熟練していたことがあげられる。この実践経験から，次の点が今後の実践上の課題となる。

① 問題設定に関して；この学習では，生徒自身による問題設定が求められる。問題設定の方策を明らかにし，生徒に身につけさせていく指導法を検討する必要がある。

② 考察の持続と考え方；1時間の授業では一つの問題を20分考察することができればまずは成功である。それに対して，このような学習では場合によっては数時間の考察が要求される。そこでは様々な数学的な考え方を総合的に利用する能力やその持続力の育成が課題となる。

③ 報告・発表力に関して；生徒は当初レポートとはいかなるものかを知らない。レポートの書式や考察の進め方，発表の仕方などの指導が課題となる。

④ 情報交流のあり方；交流を発表会に終わらせるのではなく，さらなる課題を意識し得る場やさらに考察を深める場としていく方策を検討する必要がある。そこでは，批判的な精神の育成なども課題となる。

このような課題は，日頃の学習指導のあり方と関っている。学習指導における写真の利用法は，ここで取り上げた実践事例だけでなく，写真による課題設定や概念の実態的理解での利用など多様である。いかなる利用法があり，いか

なる指導場面に有効か，どのような生徒に有効かなど詳細に検討すべき点は多い。

現在，北海道教育大（札幌分校）大久保先生，附属札幌中里谷・笠倉先生，浦臼中松山先生等と共同研究を進めている。その成果は，別の機会に報告したい。

なお，本研究に際して筑波大学の吉田稔先生から，多くの示唆をいただいている。

〔参 考 文 献〕

(1) 拙稿「数学化の立場からの 創造的な学習過程の構成」 筑波数学教育研究 vol. 2〜7，8-A

(2) H. Freudenthal 'Mathematics as an Educational Task' D. Reidel 1973 他 拙稿「H. Freudenthal の学習過程論」中学校数学教育研究会誌№20-23（合併）pp. 17-14参照

(3) 古藤怜「課題学習について」数学教育研究上越教育大学数学教室　第４号　p. 1-10

(4) 拙稿「中学校教育過程の問題」中学校数学教育研究会誌 №24-26（合併）p. 24

(5) 飯島康男「算数数学教育に取入れる実験の意義」数学教育学論究 vol. 49. 50, pp. 3-27

(6) 吉田稔（平岡忠編）「新しい中学校数学授業プラン３」大日本図書1989 p. 75

(7) C. Gattegno 'For The Teaching of Mathematics' vol. 1-3

(8) 1988年の ICME-6 の中で発表されていた。写真スライド集には NCTM 'Geometry in Our World' などがある。

(9) 吉田稔「数学における問題解決と創造力」筑波大学学校教育部紀要第11巻 pp. 157-169

(10) 三輪辰郎「数学教育における数学的モデル化についての一考察」筑波数学教育研究 vol. 2, pp. 117-125

(11) K. ポパー「客観的知識」木鐸社

(12) I. ラカトシュ「数学的発見の論理」共立出版

(13) 片桐重信「数学的な考え方・態度とその指導１・２」明治図書1988

(14) 古藤怜「Problem Solving と数学的な考え方」筑波数学教育研究 vol. 2, pp. 1-8

(15) ドゥンカー「問題解決の心理」金子書房1952

(16) van Hiele 'Structures and Insight' Academic Press 1987

(17) 佐伯胖「イメージ化による知識と学習」東洋館，宮崎清隆他「視点」東京大学出版会

(18) 佐伯胖「人工知能と人間の思考」サイコロジー，1982. 3, pp. 4-11

(19) 拙稿「課題提示方法の違いによる変量抽出過程の比較研究」日本科学教育学会論文集13, pp. 279〜282

(20) Walter. M. & Brown S. I. 'What if not ?' M. Teaching 1969

(21) 波多野誼余夫編「自己学習能力を育てる」東京大学出版会