礒田正美、“数学化の立場からみた創造的な学習指導　文字式への数学化を例に”、1986

参考文献

礒田正美, ”数学化の見地からの創造的な学習過程の構成”, 筑波数学教育研究, vo.2~5

第18回 数学教育論文発表会

発　表　要　項

昭和60年11月21日(木)，22日(金)

会場　三重県教育文化会館

主催　日本数学教育学会

共催　日本教育大学協会 第2部会数学部門

数学教育における数学化に関する一考察
ー数学化の概念規定を巡ってー

磯　田　正　美
筑波大学付属駒場中高等学校

はじめに

従来から数学化の重要性は多くの人々から指摘されてきた。例えばウイラーは、「数学教育の人間化」において人間化のための一つの方策として、数学化の重要性を論じている（注１）。またフロイデンタールは「人間活動としての数学」を提案するにあたり、数学化による指導がその方策であることを主張している（注２）。

このように数学化が重視される背景には、数学に対する知識観として、数学を知識体系として観るのではなくて創造的な活動として観る見方が働いている。そして学習過程の考察に際しては、結果より過程を重視しようとする姿勢があるようだ（注３）。

しかし、結果より過程という時に、どのような学習過程が過程を重視した指導と言えるのであろうか？　このことを考えるとき数学化さえ明確な概念でないことに気づく。そこで本稿では、数学化の概念規定を巡って考察を進め、数学化に基づく学習過程の考察にむけての基礎的な究明をすることをめざす。

Ⅰ．数学化の規定

従来、数学化は様々な意味で用いられてきた。多くの場合、数学化と言えば事象の数学化であった。しかし、数学を創造的な活動とみなす人々の中にあっては、数学化は、むしろ数学的な活動を指していると言える。例えば、フロイデンタールは次のように述べている（注４）。「人間が学ばなければいけないのは、閉じた体系としての数学ではなくて、活動としての数学、すなわち、実在を数学化する過程や、可能であれば数学を数学化する過程である」　しかし、数学的な活動自体の意味も広範である。そこで、筆者なりの数学化の規定を与える。

数学化とは「ある現象の考察において用いた操作を対象として、新しい操作を導入、確立し、その新しい操作に基づき新しい考察ができるようにすること」と言える（注５）。この規定は先行研究を参考に設定したものである（注６）。一次変換の指導を例（注７）に、この規定を述べる。

一次変換の指導

一次変換を定義した後、図形の一次変換を扱う。生徒は、様々な一次変換をしてみる。一次変換によって得られる像は、一次変換についての現象である。ここでの操作は一次変換（行列の具体的な計算）である。様々な一次変換を繰り返すうち、生徒は特殊な像ができることを意識する。そして、変換行列と像の関係を意識する。例えばdetA=0であれば図形が原点を通る直線に移されることに気づく。ここで生徒は一次変換を考察の対象とするのである。生徒はそれぞれの変換行列の特徴と像の関係を探りはじめる。生徒は対称移動や回転移動等を意識し、行列の特徴と対応付ける。また、一次変換の線形性等も意識する。ここでの考察で新しく導入される操作は、対称移動や回転移動等にあたる一次変換である。これらの一次変換の確立には、（線形性に基づく）数学的な証明が必要である。証明の後、例えば生徒は $x^2-y^2=2$ と $xy=1$ の関係が 45°の回転であることなどの新しい操作に基づく考察ができるようになる。

以上のような指導過程は、数学化の規定を満たしており数学化の過程である。これは数学の現象を数学化するものである（フロイデンタールの言う数学の数学化）と言える。数学化がどのような種類の数学的な活動を意味するのかこの数学化の規定より考察できる。そこではどのような現象が考察され、どのよ

うな操作や思考が進められるのであろうか？いくつかの先行研究を参考に、これらの問題を、数学化の特徴、数学化の過程、数学化の類型に関連して考察する。

Ⅱ．数学化の特徴

数学化の特徴は次の４点である。

数学化の第一の特徴は数学化が「現象を意識的に高いレベルで分析し組織する」ことである。ここでいう現象には実世界における現象と数学における現象がある。先の例で、様々の一次変換による像は現象であり、この現象を意識的に高いレベルで考えなおし分析した結果、現象は回転や対称変換、線形性というように組織されるのである（注８）。

第二の特徴は数学化においては「それまでの操作が対象となり、新しい操作が意識される」点である。先の例では、一次変換が考察の対象となり、新しい操作である回転や対称変換が意識される。この新しい操作で現象が組織されるのである。

多くの場合新しい操作はそれまでの操作に潜在するものである。先の例で、回転や対称変換は、一次変換の像に回転移動、対称移動という形ですでに潜在している。この操作の意識化はゲシュタルト心理学の中心転換に通じるものである（注９）。

ピアジェはこの数学化の特徴を彼のいう論理数学的な思考との関連の中で「操作が次の理論の対象となる」、「操作の操作」というような形で論じている（注10）。ファンヒーレ夫妻はここでいう操作を方法という言葉で、夫妻の思考水準論の中で「方法の対象化」として論じている（注11）。ディーンズは、操作をパターンという言葉で、「パターンを対象としたさらなるパターン化」として論じている（注12）。

第三の特徴は、はじめの操作による活動と新しい操作による活動の間には階層ともいうべき質的な隔たりがある点である。これは、前出の２つの特徴から導かれるもので数学化の過程に関連する。この階層は次の意味で活動が質的に異なることによる。２つの特徴にみるように、新しい操作による活動ははじめの操作による活動を意識的に高いレベルで組織しなおした結果に基づく活動である。２つの操作は異質なものであり、従って活動も異質になる。新しい操作に基づく活動が高次とみることもできる。

第四の特徴は数学化が反省（的思考）により進められる点である。第一の特徴で述べた「意識的に高いレベルで組織する」際に働くのが反省的思考である。数学化における反省は、次のようになされてゆく。反省されるのは現象を創り出した活動である。まず現象の原因であるはじめの操作が考察の対象として意識される。そしてはじめの操作を分析する中で潜在的に存在した新しい操作が意識され、その操作で現象を組織する（注13）。現象を組織する中で新しい操作も確立してゆく。そして、反省の結果、様々の知見を得る。例えば線形性という知見は一次変換の基本原理である。知見により第三の特徴にみるように活動の質が改まるのである（注14）。

Ⅲ．数学化の過程

これまでの議論から、数学化の過程は、次の３つの活動から構成され、この順で進められると言える。

① はじめの操作に基づく活動
② ①を反省する活動
③ 新しい操作に基づく活動

例では、①にあたるのは一次変換で点（図形）を移してみる活動である。②にあたるのは一次変換を考察の対象として、回転や対称変換、線形性等を意識し確立してゆく活動である。③は一次変換で $x^2-y^2=2$ と $xy=1$ 等の関係を考察する活動である。数学化においては②が本質的な活動である。

活動の反省に基づくこの数学化の過程はウ

別式が付加され新しくなるのみである。

②はファンヒーレ夫妻の幾何の思考水準論において典型的にみられるタイプである（注19）。このタイプの数学化は次の３つの特徴をもつ。一つは、このタイプの数学化が組織する現象とは理論そのものである点である。例えば、幾何の第２水準には図形を命題で議論する（四角形の分類等の）理論があると言え、第３水準には命題を論証する理論があると言える。第２水準の命題の理論は、第３水準で論証により演繹的に再組織され体系化（理論化）される。この意味でこのタイプの数学化はすでに存在した理論に対して新しい理論を創り出す理論化と言える。二つは、このタイプの数学化が長期の指導により達せられる点である。アハ体験にみるように即座に数学化が進められるというようなものではなく、指導が必要なのである。三つは、このタイプの数学化の知見が、認識方法と言葉で特徴づけられた思考水準の移行にある点である。思考水準の移行において、①のタイプの場合のように具体的な知識も進歩するが、むしろ特徴的なことは知識そのものが認識方法に応じて改められる点である。例えば第１水準では図形と図形の性質とを区別できない。正方形の辺の長さが同じであるという性質と、菱形のもつ同じ性質とは、全く別のものなのである。第２水準では図形と性質を切り放した議論ができるようになる。そこでは、第１水準における知識が第２水準において認識方法に応じて改められたと言える。

これらの数学化は、学習過程の中で複雑に連鎖し交錯して進められる。②は、扱う現象が理論という規模の最も大きなものである。②の過程において、①－１，２が進められる。続いて現象の規模が大きいのは①－１であり、①－１の過程にはしばしば①－２が含まれる。現象の規模の大きさは数学化の規模の大きさでもある（注20）。数学化の規模が大きいほど、数学化により得た知見の適用可能性は増大する。

おわりに

従来、数学化といえばゲームとかパズルというように特別な教材について議論されることが多かったように思う。それに対して本稿における数学化は、「活動としての数学」を学校数学全体の中で実現してゆくことを意図している。本稿での数学化の概念規定を巡っての考察は、先に述べた「どのような学習過程が適切か」という問題に対して、数学化の立場からの示唆を与えるものと思う。

＜注および参考文献＞

1) Wheeler "Humanising Mathematical Education" M.Teaching 71
2) Freudenthal "Mathematics as an Educational Task'
3) Lerman "Problem-Solving or Knowledge-centered "I.J.Math. Educ.Sci.Technol.vol.14.1;op.cit 2;筆者の立場も同じである
4) Freudenthal "Why to Teach Mathematics so as to be Useful?" E.S.M.1
5)後で述べるように、数学化が扱う現象には現実世界の現象と数学の現象がある。また、数学化の規定でいう操作は数学的な考察の方法、考察の仕方の意味である。
6)以下の研究を参考にした（紙面の都合上本文で引用したもののみ）
Freudenthal 'Task'; op.cit 2 ,op.cit 3 'Weeding and Sowing'. 'Didactical Phenomenology of Mathematical Structues'
Wheeler "Mathematization matters" F.L.M 3,1
Dienes 'An experimental study of Mathematics learning'
Van Hieles "A method of Initiation into Geometry at Secondary School"
Wittmann "Mathematizing around Convexity" E.S.M.'7 , "The compulementary roles of Intuitive and Reflective Thinking in Mathematics Teaching" E.S.M. 12
Piajet 'Genetic Epistemology' , 'Mathematical Epistemology and Psychology'
7) 1985.10.11 付属駒場教育研究会においてコンピューターを用いて筆者が実践した。従来との違いは、こども自身が実際にシミュレーションで様々な一次変換を扱い、一次変換による像の特徴からそれぞれの一次変換の特徴を探り出し、一次変換を類型し、さらに図形性質等を見出そうとする点である。
8) Freudenthal op.cit 2　9) Freudenthal op.cit 2 ,5
10) Piajet op.cit 5　11) Van Hiele op.cit 5；後述Ⅲ②
12) Dienes op.cit 5　13) 実際にはさらにダイナミックである。
14) Dewey 'Democracy and Edyucation'
15) op.cit 5　ただし、ウイットマン自身も指摘しているように２つの思考の相互作用は①と②というように単純には分けられない。
16) ポリアの問題解決の段階にみられるような「振り返ってみる」というストラテジーは、数学的な概念を含んでいない。数学的な概念を含む意味であれば、ここでいう手立ては古藤怜氏のいうMathematical Strategy に近い意味である。筑波数学教育研究 vol.2で氏はストラテジーを数学的な考え方の構造として考え方に関連して述べている。多くの場合ストラテジーと言えば見方の変更に関して見方や方向づけるために論じられるが、本稿でいう手立てとはむしろ見方・考え方で実際にする操作を指していることに注意されたい。
17) 証明という認識方法が意識されるためには「証明とは何か」というようにこどもが証明を意識するような特別な状況が必要である。
　なお、方法が使えること、意識できること、理解できることは、各異なる意味であることは注意を要する。例えば、論証の意義の理解には発達水準があることを小関・國宗氏等のグループの研究は示している。この水準の区分は、論証の意義の理解に焦点をあてたもので、数学化の階層とは観点が異なる。数学化の立場からは、Van Dormolenによる証明の水準が論証（推論）の階層と言える。彼は実践をもとに Van Hiele夫妻の思考水準論を利用して考察した。
18) Freudenthal 'W.& S.'op.cit 5
19) 夫妻によれば、思考水準は、各水準の認識方法と認識方法に規定される言葉によって主に特徴付けられる。思考水準をふまえた学習過程において水準の移行が数学化と言える（Freudenthal op.cit 2）。数学化の規定を夫妻による思考水準において述べれば、水準の移行に際して「前の水準の認識方法を対象化し、新しい水準の認識方法を意識し、新しい水準の思考ができるようになる」ことと言える。詳細は論文：筑波数学教育研究 vol. Ⅲ, Ⅳ参照
20) ただし、類似の現象をただ単に繰り返すことと数学化は結びつかない。:op.cit 18

イットマンの主張からも裏付けることができる。ウイットマンは直観的思考と反省的思考の関連を、直観的思考による活動を反省するというモデルで議論している。彼の主張によれば、①の過程は直観的思考による活動と理解され、②の過程は反省的思考による活動と理解される。例では一次変換で図形を移して一次変換の意味を探っている①の活動は直観的思考によるもので、それを反省するのが②の活動と言える（注15）。

Ⅳ．数学化の類型

数学化は、扱う現象、操作の観点から類型できる。ここでは操作を、数学的な考察の方法（仕方）という意味で考えている。類型にあたり方法の意味から操作の意味を考えなおす。ここでいう方法には、次の２つの意味がある。

① 具体的な課題に対する考察の手立て
② 考察において議論の前提となり無意識的に採っている認識方法

①では、数学的な概念を含んだ考察の方法を手立てと呼んでいる。先に述べた例において、はじめの操作における一次変換は、定義による一次変換の概念を含んだ、点（図形）を移す手立てである。回転移動と言うような新しい操作は、座標上の回転という概念を含んだ図形を移す手立てである。ここで言う手立ては問題の解決において用いられるものだが、よく言われるストラテジーとは異なり、数学的な概念を含んだ見方、考え方、考察の仕方そのものを指す（注16）。

②では、数学的な議論の中で暗黙裏に潜在し、議論の仕方や考察の枠組みを規定している考察の方法を認識方法と呼んでいる。例えば、一次変換の学習で $x^2-y^2=2$ と $xy=1$ との関係を考える時、子供は 45°の回転行列で議論するが、一次変換で議論しょうとは言わない。一次変換の学習においては一次変換という認識方法は潜在的に規定されているのである。これは、論証幾何ができるこどもが証明をするときに証明を意識せず、証明することがあたりまえのようになるのと同じである。証明せよという問いには既に証明という認識方法が規定されているのである（注17）。

①②の方法の意味をふまえると、数学化を次の２つのタイプに分けることができる。

① 手立てを対象として新しい手立てを導入するタイプ
② 認識方法を対象として新しい認識方法を導入するタイプ

①は先の例にみられるタイプである。この数学化の特徴は次の３点である。一つはこのタイプの数学化が実世界や数学の具体的な現象を扱う点である。二つはこのタイプがアハ体験をふくむことである（注18）。先の例で detA=0と像が直線になることの関係を意識するときはアハ体験と言える。三つはこのタイプの数学化により得られる知見が具体的な知識の成長にある点である。例では回転や対称変換は知識の成長である。この知識の成長の尺度は、はじめの操作と新しい操作がどれだけ質が異なるかにあると言える。

この知識の成長という観点からこのタイプはさらに２つに分けることができる。

①－１；先の例にみられるように概念自身が改められ新しくなる場合である。先の例では回転や対称は図形の移動についての概念から一次変換による座標平面上の概念へと改められている。そこでは、操作が、定義式に基づく一次変換の計算から回転や対称移動等による一次変換へと進歩している。

①－２；概念の一部が改められ付加され新しくなる場合である。例えば２次方程式を解の公式で解くうち解のタイプに気づき判別式を見いだす。ここでは、解の公式で解くという操作に対して、解の判別という操作が生まれている。しかし、解の判別自体解の公式に由来する操作であり、ここで操作はあまり進歩していない。２次方程式の概念の一部に判