

礪田正美, “手段としての教具から媒介としての道具への教具観の転換に関する一考察 数学史上の道具の機能・制約とその反映に関する検討”, 中学校・高等学校数学科教育課程開発に関する研究(8)世界の教育課程改革の動向と歴史文化志向の数学教育—代数・幾何・微積 For All プロジェクトの新展開—, vol.8, pp.89-94, 2001, 筑波大学数学教育学研究室.

概要

メディアの機能・制約が認識に反映されるとみなす社会歴史文化的視野に立てば、教具観は、教える手段としての教具より媒介としての道具によって性格付けられる。媒介としての教具観では、認識に反映される道具の機能・制約とその反映の実際を吟味する必要がある。本論文では、その機能・制約を吟味しやすい数学史教材を取り上げ、その実際を検討すべく、数学科教育法履修生の学習感想を分析する。その結果、道具を利用した数学史教材の学習感想に、道具の機能・制約という歴史文化が反映されていることを確認した、この確認から、テクノロジー選択が教えるべき数学内容の選択に結びつくことが、認識論的かつ認知論的に例証された。示唆として、教具として新しいテクノロジーを採用し学ぶ内容は従来と同じとみる発想は社会歴史文化的視野からは否定されること。テクノロジーを採用する際には、そのテクノロジーの機能・制約を社会歴史文化的視野から認識論的かつ認知論的に吟味することが要請されること。その吟味に際して、数学史上の認識が学習感想を説明するか否かの検討は有意な一方法であることを得た。

参考文献

- 1)関口靖広, “数学の教授・学習過程におけるScaffolding.学校数学の改善～Do Mathの指導と学習～”, 1995, 東洋館.
- 2)Bruner, J., “Actual Minds. Possible Worlds”, Harvard University Press, 1986.
- 3)Isoda, M., “Inquiring Mathematics with History and Software”, J. Fauvel, J. V. Maanen edited, “History in Mathematics Education”, pp.351-358, 2000, Kluwer Academic Publishers.
- 4)Keitel, C., Ruthven, K., edited, “Learning from Computerers : Mathematics Education and Technology”, Springer-Verlag, 1991.
- 5)Wertsch, J., “Voices of the Mind”, 1991, Harvard University Press.

手段としての教具から媒介としての道具への 教具観の転換に関する一考察

数学史上の道具の機能・制約とその反映に関する検討

磯田正美
筑波大学

メディアの機能・制約が認識に反映されるとみなす社会歴史文化的視野に立てば，教具観は，教える手段としての教具より媒介としての道具によって性格付けられる。媒介としての教具観では，認識に反映される道具の機能・制約とその反映の実際を吟味する必要がある。本論文では，その機能・制約を吟味しやすい数学史教材を取り上げ，その実際を検討すべく，数学科教育法履修生の学習感想を分析する。その結果，道具を利用した数学史教材の学習感想に，道具の機能・制約という歴史文化が反映されることを確認した。この確認から，テクノロジー選択が教えるべき数学内容の選択に結びつくことが，認識論的かつ認知論的に例証された。示唆として，教具として新しいテクノロジーを採用し学ぶ内容は従来と同じとみる発想は，社会歴史文化的視野からは否定されること。テクノロジーを採用する際には，そのテクノロジーの機能・制約を社会歴史文化的視野から認識論的かつ認知論的に吟味することが要請されること。その吟味に際して，数学史上の認識が学習感想を説明するか否かの検討は有意な一方法であることを得た。

1. はじめに

マクルーハンは，グーテンベルクの印刷術にはじまるメディア革命がルネッサンス，科学革命，宗教改革を実現したと指摘した。相応するメディア革命である IT 革命が，現在不可避として注目される。数学教育でもメディア革命は進行しており，例えば NCTM の Standard2000 は，「テクノロジーは数学の教授学習において次の意味で本質的である；テクノロジーは，教えられるべき数学を左右するものであり，

生徒の数学学習を促すものである」とするテクノロジー原理を編成の前提としている。その原理は，Standard では，例えば，代数という名の基で小中高一貫した関数指導を提唱する記述などに現れる。

本稿では，このようなメディア革命下で進展する数学教育改革を，その担い手であるテクノロジー利用の側から性格付ける方途として，その現れの典型である教具観の転換の問題を取り上げる。そして，その転換が，数学を教

える手段としての教具から媒介としての道具への教具観の転換にあることを確認する。その教具観の転換では、道具の教育的価値の吟味が要請される。本稿では、その吟味要請に対して、数学史上における道具の価値の認識論的検討と、その利用の認知的効果を検討することで例証し、その吟味の実際を示す。

2. 手段から媒介への教具観の転換

近年の数学教育におけるテクノロジー利用研究のキーワードとして、ヴィゴツキー派による社会歴史文化的視野(J. Wertsch, 1991)の他、テクノロジー環境(C. Laborde, 1991)、マイクロワールド(C. Hoyles, 1991)そして、ミルー(N. Balacheff, 1991)などが知られている。いずれも相互作用に関心を置く点で共通しているが、特に、M. Otte (1991)が、数学とテクノロジー間の相互作用の拡張的探求抜きに数学の社会学は存在し得ないとも指摘したように、社会歴史文化的視野は、数学とテクノロジー間の関係を数学の一認識論へと普遍化していく点で興味深い。ワーチの言葉を借りれば、その認識論は、それぞれの媒介手段(心理的道具、物理的道具)には、社会歴史文化的な機能と制約を埋め込まれており、媒介手段の利用を通じて、認識にその機能・制約が反映されるというものである。そこでは、教具(媒介手段としての道具)を選択・採用する教師の行為は、その教具(道具)が内在する社会歴史文化的な機能・制約を潜在的な教育内容として選択・採用する行為に通じている。その意味で、社会歴史文化的視野において、教具(道具)の選択は、教育内容の選択に通じている。これは前述の Standard のテクノロジー原理で記された立場と一致するがゆえに、この社会歴史文化的視野は、テクノロジーによる数学教育改革を語る主要な視野の一つと言える。

このように社会歴史文化的視野から教育内容を埋め込んだ意味での教具観に対して、伝統的な教具論では、多くの場合「教えるための道具」としての語用のもと、分類や性格付

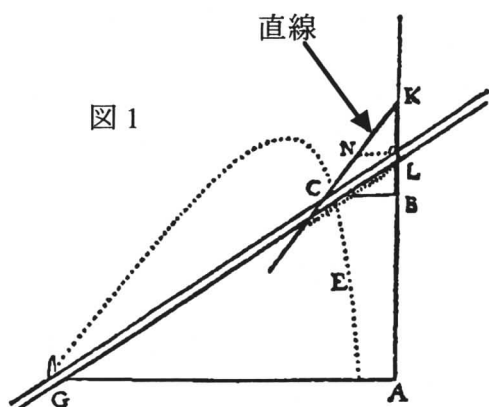
けなどが進められてきた。特に、ブルーナーは、現代化時代、「いかなる教科も、いかなる発達段階のいかなる子どもに対しても、なんらかの知的に正しい形式によって、効果的に教えることができる」として、その時代の教具観を支える仮説を提供した。実際、この仮説は当時話題になった構造教具導入を支持する仮説となった。後に彼は、持論「足場設定」をヴィゴツキーの最近接発達領域説に対応させて提唱する(1986)。手段としての教具観の立て役者ブルーナーが足場設定を最近接発達領域を支持する用語として導入した経緯¹は、本稿の表題である教具観の転換が教育史上のある面において展開してきたことを物語っている。

このような手段としての教具から媒介としての道具への教具観を転換する際の教具論上の課題は、道具選択によりもたらされる価値・奪われる価値としての道具の機能・制約の社会歴史文化的視野からの検討にある。実際、教える手段として教具をみなす場合、何を手段に教えたかは学習後の達成内容とは無縁と仮定される。対する媒介としての教具観では、道具の相違が学習内容自体に反映されるとみるからこそ、その機能・制約の吟味が要請されるのである。

3. 数学史上の道具の機能・制約とその反映

ここでは、媒介としての教具観における道具の価値吟味が、社会歴史文化的視野からみた道具の機能・制約によっていかにしえるかを検討する範例として、数学史教材における事例研究を行う。数学史教材では、媒介手段の持つ社会歴史文化的機能・制約を、歴史に見いだす行為そのものさえ学習課題となり、媒介手段による学習を通じてその媒介が持つ機能・制約が認識に反映しえるか吟味しえる。

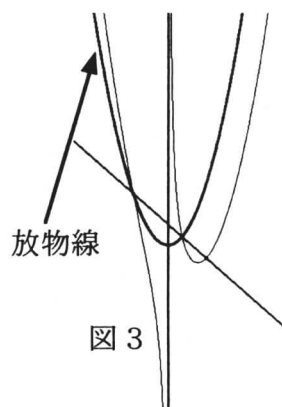
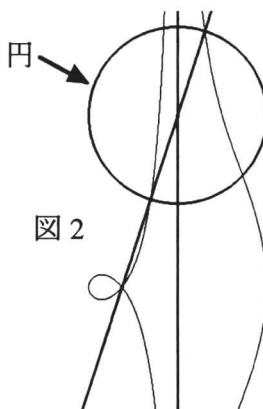
以下、取り上げる歴史事例において、道具の社会歴史文化的機能・制約を検討する。次に、その教材を道具で学習した際の効果を、学習感想によって検討し、その変容が、道具の機能・制約によって説明しえることを確認



する。そして、その確認を通じて、媒介としての教具観にたつ道具の価値吟味を行う。

(1).デカルトとパスカルの道具観

デカルト (1637) は、真理を得る方法を述べた「序説」に続く試論としての「光学」並びに「幾何学」において、当時の先端技術 (テクノロジー) である機械を積極的に採用している。デカルトは、「幾何学の問題のうち、或ものは平面的、或ものは立体的、或ものは曲線的であることに古代人は十分気づいていていた。すなわち、或ものは直線と円を描くだけで作図しうるが、或ものは少なくとも或る円錐曲線を用いなければ作図しえず、最後に他のものはより複雑な他の曲線を用いなければ作図しえない、という意味である。しかし、～中略～彼らがこれらの線をどうして幾何学的と呼ばずに機械的と呼んだか、理解に苦しむ。なぜならば、これらを描くには何らかの機械を使うことが必要だからというのであれば、同じ理由で円と直線も (幾何学から) 退けねばなるまい。これらを紙の上に描くにはコンパスと定木を使わねばならず、これも機械にちがいないからである (原訳, p.17)」と記す。デカルトは、定木 (直線) とコンパス (円) で構成される幾何学に対する制約、すなわち、定木とコンパスという道具による社会歴史文化的制約を強く意識し、古代人の機械に対する見識に対して懐疑を投げかける。彼自身が自分の機械観を念頭に議論するのは例えば次のくだ



りである (Isoda, 1998, 2000)。「定木 GL (図 1) と直線に囲まれた平面 CNKL との交わりによって、線 EC が描かれたと想像し (原訳, p.19)」線 EC がいかなる曲線になるかを考える。このくだりで、図 1 は明らかに作図器具として描かれている。デカルトは、この器具によって描かれる曲線を代数的に解き、双曲線になることを確認する。そして、次のように続ける。「CNK が L を中心とする円であれば、古代人の第一コンコイドが描かれるであろうし、KB を直径とする放物線であれば、私がさきほどパプスの問題に関して最初の最も単純な線と言ったもの、つまり位置に関して与えられた直線が 5 本しかない場合の線が描かれる (p.20)」この引用中には、直線 CNK を円 (図 2) や放物線 (図 3) へ条件替えをすることが記されている。この条件換えは、作図器具としてみれば、直線から、円、放物線へのパーツ交換に相当する。いうなれば、デカルトの条件換えの発想は、機械におけるパーツ交換をメタファにしていた。すなわち、この議論展開は、パプスを話題にしながらも、作図器具の機能に依存した議論展開となっている。

一方、ギリシャ的思考やデカルトの機械メタファを持たない我々の場合、作図器具や作図ツールの支援抜きで、この条件換え後の曲線をイメージすることはかなわない。実際、デカルトの幾何学には図 1 しか示されておら

ず、図のないテキストから、図2、3に示された内容を想像することは、困難である。今日、我々が、デカルトの意図を容易に実体化できるのは、そのメタファを作図ツールで再現できるからである。すなわち、デカルトのテキストを我々が解釈しようとする文脈では、作図器具、作図ツールは、曲線を軌跡として動的かつ視覚表現する道具として、また、容易な条件換えを発想する道具として機能している。その条件換えと曲線の動的視覚表現は、座標平面と方程式では再現しえない。

以上、作図器具の持つ歴史文化的機能・制約を検討したが、社会的機能・制約についてはどうであろう。デカルトが古代人が与えた制約に疑問を投げかけたことは、対話となってその時代をめぐる。特に、古代人の幾何学で示された演繹的証明に幾何学的精神を認めたパスカルは、パンセの中で、次のように述べている。「79.デカルト。大づかみにこう言うべきである。『これは図形と運動から成っている』と。なぜなら、それはほんとうだからである。だが、それがどういう形や運動であるかを言い、機械を構成してみせるのは、滑稽である。なぜなら、そういうことは、無益であり、不確実であり、苦しいからである。そして、たといそれがほんとうであったにしても、われわれは、あらゆる哲学が1時間の労にも値するとは思わない」ここに数学的真理を古代の幾何学の方法に認めるパスカルと、代数的方法を基礎とした普遍数学への転換によって確立しようとするデカルトとの対立が読みとれる。パスカルは、機械を前提としたデカルトの幾何学こそ、真理を歪めるものとみなす。デカルトの機械のメタファは、パスカルには、逆に真理に至る上で制約に映ったのである。このエピソードは、数学史上、数学者が道具を用いて探究する方法に関わって、真理探究のあるべき姿は何かを論点としたこと、道具の機能・制約を直接問題にしたことを示している。

(2). 道具の機能・制約の反映

ここでは、道具を利用して学習することで、その道具のもつ機能・制約が学習者の認識に反映されるか否かを検討する。授業は、数学科教育法受講者に対して「歴史的テキスト・道具を、その時代の文脈において解釈することを通じて、数学を、文化として相対化し、人間の営みとみなす」ことを目的として、次の4回行った。

第1回。スコーテンの楕円コンパスの探究

第2回。作図ツールによる軌跡作図の方法

第3回。デカルト「幾何学」の曲線論

第4回。デカルト「精神指導の規則」「幾何学」、パスカル「幾何学的精神」「パンセ」の解釈

以下、媒介としての道具の効果、すなわち道具の持つ認識論の問題である歴史上の機能・制約の認知への反映を解釈するために、受講学生26名の感想を参照して検討する。授業では、歴史的道具を玩具レゴで再現する。検討では、採用した道具レゴの社会歴史文化的機能・制約も同時に検討対象となる。

[第1回] 図4(Maanen,1992を利用)の器具で、点Aを固定し、点Dを固定定木方向に動かすとき、点Eはどのような図形を描くかを問う。反応は、図5のように、曲線、直線など様々である。次に、レゴで、その機構を再現して、実験することを求める。学生は、作り、再現して曲線を描くと同時に、即、勝手な条件変更はじめて、楕円の場合(図6)、楕円にならない場合(図7)など、様々な器具を作り出す。教師は、どのような条件を与えてどのような曲線が描けたかを発表させた後、 $BA=BD$ の場合が楕円コンパスと呼ばれることを指摘する。証明の希望があるが、時間切れで宿題とする。

1) レゴの機能；学生が、求められることなく条件変更をはじめたことは、レゴの機能で説明できる。元来、レゴは、構成過程でその組み合わせの可能性を試行錯誤する本性を内在しており、それが、図7に隠された構成

条件の所在を明確にし、それを自由に変えることに役立っている。部品を変えることでの条件換えはデカルトも発想したことだが、それを一層容易にしたのはレゴの機能である。次の感想は、レゴが条件を保存したり、変更したりする際に機能したことを語っている。

○軌跡を教える上でレゴは使える。長さ一定がよくわかるし、動く様子もわかる。

○教科書の内容を理解するのではなく、道具で作図することは興味深いし、いろいろ工夫したくなる。生徒も同じだろう。

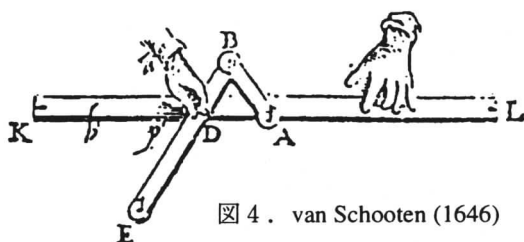


図 4. van Schooten (1646)

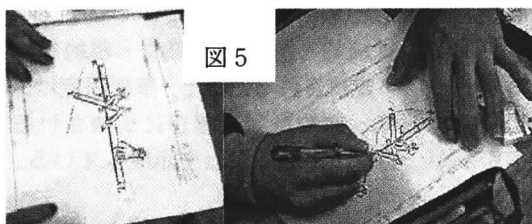
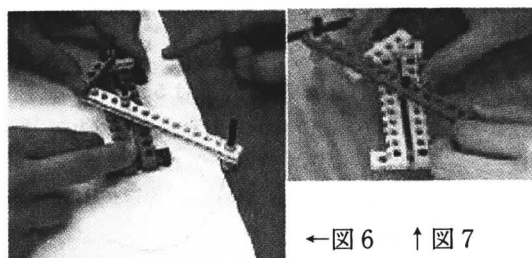


図 5



←図 6 ↑図 7

2) 媒介としての道具の機能；歴史的道具、楕円コンパスは数学史上の曲線の扱い、楕円の歴史的な概念を媒介する機能を有する。楕円コンパスの再現・利用を通じて、学生は自らの代数的楕円概念を相対化した。道具の利用が、その道具が媒介した数学史上の概念定義を解釈しなおす機会を提供したのである。

○直線上を動かして楕円を描けるという発想が意外だ。

○ちょっとした道具できちんと作図できることに驚いた。作図する道具がどのような目的で作られたのかよくわかった。

○今まで、楕円を方程式で理解していたが、実際に楕円を作図することを問題にしてこなかったことに気づいた。

○道具は使い方がわからなければ使えない。道具を作ることや使い方を考えることが数学の課題になることがわかった。

○どのような試行錯誤からこの道具ができたのであろうかと考えさせられた。

○昔は、円や楕円をなわとくいでかいたというが、レゴを手にして、自分も、数学をなにも知らない状態に立ち返れた。

3) レゴの制約；第1回授業前後で、機構の軌跡予想を問う同質課題を出している。指導前には、的確な解答をした者の中で、指導後に誤答した者が出る。レゴで作成した機構の多くが曲線運動をしており、そこでの運動イメージが先行して推論が欠落する状態を招いた結果と考えられる。これはレゴで試行錯誤したことによって現れた制約でもある。例えば、次のような感想がある。

○考えるより先に手を動かした。

○何のために作業をするのかを考えよとのことだったが、ただ楽しんでしまった。

4) 道具の制約；道具で幾何学的に推論できない学生の現実、デカルトと我々の思考様式の違いを反映している。特に証明や推論の要請はパスカルの言う幾何学的精神に通じるものである。次の感想がある；

○ブロックを使って実際作図してみる授業は面白い。既習のこととどう関係しているのか、自分で説明しようとする気になった。

○かいてみたら楕円のようなのだが、どうして楕円になるのか理解できていないので、だまされた気分。どうして楕円になるか、考えたい。

○実際に作ってみると、紙と鉛筆では得られない驚きがあった。作図、性質と結びつけて説明できれば、より深く考えられると思う。

以上の1～4の学習感想の解釈は、実際の学

習者が意識したレゴの機能・制約、楕円コンパスの機能・制約は、その道具が備えた機能・制約並びにその道具を媒介に表された楕円概念という認識論的視野から行われている。すなわち、媒介である道具の機能・制約を認識論的に検討することは、学生が意識した認知的問題を説明する際の根拠を提供している。

[第2～4回] 第2回は、作図ツールによる軌跡の作図法の習得をめざしており、第3、4回は前述のデカルトの曲線論とパスカルとの関係を取り上げた。全4回を終えての総括には次のような感想があった。

○現在、学校教育で教えている数学がいちばん簡素化されて理解しやすいと考えていました。しかし、昔つかわれていた数学には、それが使われていた理由があり、理解しやすいなど今のものより優れている。このような違う立場から、現在の数学を考えることができた。

○例えば、楕円の作図法といえば、教科書に書かれたもの以外にはないと思っていたが、様々な作図法がある。現在の表現だけに目を向けていたらそれしかみえないが、過去の方法に目を向けると様々なことがわかる。過去、つまり歴史を遡ることで自分の知識の輪を広げることができると思った。

○今までやってきた数学というのは、仮定から何かを導いてそれをまた何かの仮定としてという形式でしたが、逆に数学の歴史をみると機械によって結論を得たとみて解析したり。表現法にしても「と表します」というように定義したことを、異なる表現で異なる視点からみたりと、新しい数学、いろいろな数学があるということを学ぶことができます。数学史は彼らの数学体験を相対化する機会を与えている。授業を通じて、現在の学校数学の持つ制約を学生は意識し、その数学観を変更している。その変更には、1～4で述べたような道具利用が寄与していることがその感想からも読みとれる。パスカルのテキストを読む時間が適切にとれなかったこともあり、数学者間の確執に関わる営み、すなわち社会

より、文化に関わる感想が多く認められた。

むすび

本稿の前半では、近年、教具論が、社会歴史文化的視野から、教える手段から媒介としての道具へと転換してきていることを指摘した。そこでは、道具に埋め込まれた社会歴史文化的機能・制約が、いかなるもので、それが認識にどのように反映されるかを吟味する必要があることを示した。後半では、事例研究から、道具の持つ機能・制約、歴史文化が認識に反映されることを確認した。本稿の価値は、道具のもつ社会歴史文化的な機能・制約を、数学史事例において認識論的においてまず確認し、その機能・制約の反映を、学習感想で説明しえるか否かに求めた点にある。

この結果からすれば、教具として新しいテクノロジーを採用することが、教育内容の選択に通じるとする NCTM のテクノロジー原理は肯定されるとともに、選択に際してテクノロジーのもつ認識論的・認知論的機能・制約を吟味することが要請される。また、事例研究は、歴史上の機能・制約が学習感想に反映されるか否かが一吟味法となることを示唆している。

脚注

1 文化心理学を志向したブルーナーだが、道具の機能・制約の反映という唯物論的議論には深入りしていない。「足場設定」が、手段から媒介へと展開する彼自身の思想的発展の連続性を保証する足場を提供していることも確かであろう。

参考文献

- 関口靖広, 数学の教授・学習過程における Scaffolding, 学校数学の改善～Do Math の指導と学習～, 東洋館 1995 所収
- Bruner, J., *Actual Minds, Possible Worlds*, Harvard University Press, 1986
- Isoda, M. *Inquiring Mathematics with History and Software*, J. Fauvel and J. V. Maanen edited, *History in Mathematics Education*, Kluwer Academic Publishers, 2000, pp. 351-358..
- Keitel, C., Ruthven, K. edited, *Learning from Computers: Mathematics Education and Technology*, Springer-Verlag, 1991
- Wertsch, J., *Voices of the Mind*, Harvard University Press, 1991