

LEGO による機械の再現

—メリーゴーランド—

大寺 貴裕

1. はじめに

2006年度のゼミナールで、僕は「LEGOで実現する世界と数学の世界」を受講した。このゼミは、LEGOで作成・再現した機械の数学的分析をテーマとしており、受講生は全7回の授業と放課後の自主的な活動の時間内で、LEGOを用いた機構の制作活動を行い、その結果と考察を発表しあった。

再現の対象となった機械は機構の利用という点から遊園地のアトラクションが多く、僕が再現を試みたものもそのうちの1つであるメリーゴーランドであった。これから、そのメリーゴーランドの作成の過程から完成品と実物との比較までまとめていきたい(以下、製作した機械を、完成の順に、一号機、二号機、三号機と呼ぶことにする)。

2. 目的

メリーゴーランド(正式には Merry go round)は回転する床の上に支柱が上下に貫通した座席が配置されており、それが回転にあわせて上下する遊具である。別名、回転木馬と呼ばれることから分かる通り、座席は馬に似せて作ってあるものが大半である。ゆっくりとした運動が特徴で、その乗り心地から老若男女問わず利用者がいる。



今回、メリーゴーランドを「回転運動と上下運動を同時に行う機械」と見なし、そ

の同時運動の再現を重視することにした。

3. 一号機

「回転運動を行いながら上下運動も同時に行う」ことを再現するために、まず最後の段階である上下運動をどのように処理するかということを考えた。というのも、動力として使えるものが、支給されていたLEGOのパーツの中ではモーターだけで、それを使うとしたら回転運動を作り出すのには苦勞しないと思ったからである。動力がモーターと決まったところで、上下運動(往復直線運動)を作る方法として真っ先に思いついたのがクランクである。

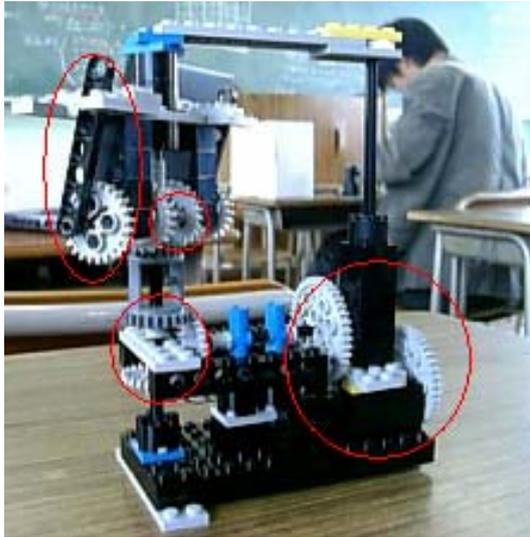


クランクの往復運動はそのまま馬の運動につながるの、クランク機構の円盤部分を馬の真下、回転する「床」パーツの裏に配置することに決めた。

次に考えたのは、クランクを動かすために必要な「相対的に回転するギア」をどうするかということである。クランク自体が「床」と同じ角速度で円運動することと、クランクの位置にかかわらず運動をさせたいことから、床の回転軸を軸としてそのギアを配置したほうが良いと考えた。相対的な回転としていくつか方法はあったが、軸上に逆回転を作ること考えた。この方法は機構を用いることで実現したため、そのまま採用することになった。

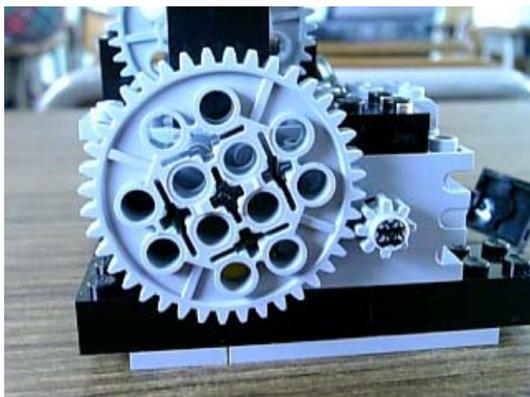
この段階で目的としていた「回転運動しながらの上下運動」がクリアされたので、

これらの構造を元に若干の調整を加えて、一号機が完成した。



以下、一号機を構成する4つの主な機構(写真で囲まれた部分)についての説明をする。

3.1. 変速機構

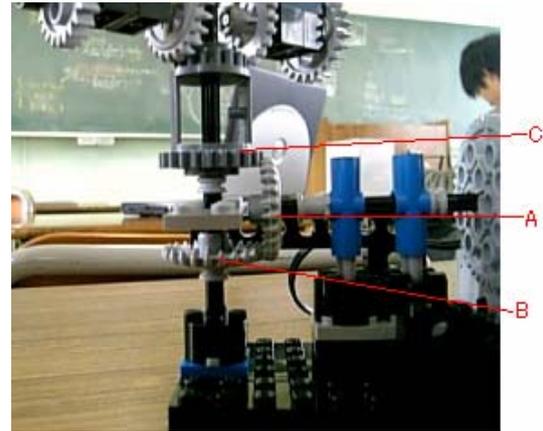


「KMODDL」のサイトで調べたところ、この機構は「Intermittent Spur Gear Pair」と呼ばれるものと一致することが分かった。

役割は見ての通り単純で、ギア比を利用して回転数を調整するだけである。写真の場合、モーターからの回転が右の小さいギアから左の大きいギアに伝わるため、回転数を落とす役割をしている。実際には運動を観測しやすい速度まで落とすために同じ機構をもう1つ使用している。

「回転数を落とすだけ」というのは、目的である「回転運動と上下運動の両立」には必要のないことだが、メリーゴーランドとしての実用化を考えたとき、馬の回転速度を自由に調整する役割を果たしている。

3.2. 逆回転の生成

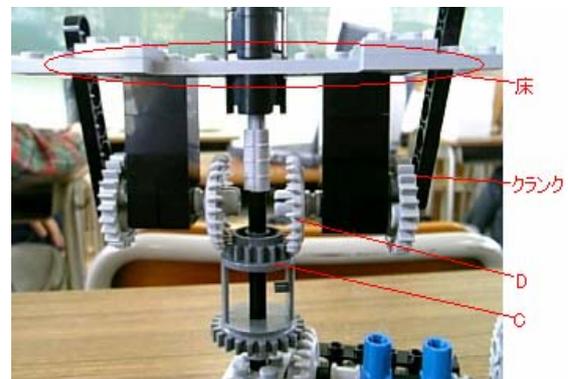


「KMODDL」のサイトで調べたところ、この機構は「Three-wheel Bevel Gear Drive for Belt Drive Reversal」と呼ばれるものと一致することが分かった。

役割はこの章の冒頭で述べた「逆回転を作り出す機構」である。まず、写真右より前節で述べた回転運動がギアAに伝わる。ギアAはギアBとギアCに回転を伝える。ここで、Bは写真中央を縦に横切る軸に固定されているのに対し、Cは固定されていないことに注意してほしい。またこの時、BとCはAの軸を挟んで対称に配置されているため逆回転する。Bは軸に回転を伝えるため、Bと逆回転するCは軸とも逆の回転をすることになる。つまり、Cは同一軸を持ちながら軸に対し相対的に回転することになる。

このギアCの回転を利用することによってクランクの利用が可能になってくる。

3.3. 回転軸の変換



写真のギアCとDの間で行われている回転軸の変換という点で言えば、この部分は1つの機構である。「KMODDL」のサイト

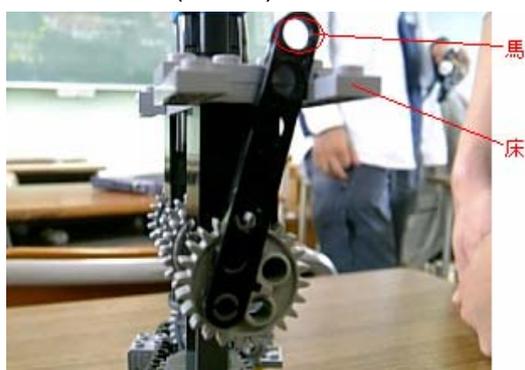
で調べたところ、「Right Angle Straight Bevel Gear Pair」と呼ばれるものと一致することが分かった。

この機構の仕組み自体は非常に単純で、平行でない軸を持つギア同士でも繋げることによって回転の伝達が可能であるということだけである。ただ、それが可能なのは相対的に回転が起こるときであり、今回の場合、何度も繰り返しているようにそこが問題なのである。

写真中央の縦軸は前節のギア B と繋がっているため回転している。この軸はそのまま「床」パーツ(実際のメリーゴーランドにおいて床に対応するパーツ)に繋がっており、「床」は軸の回転速度にしたがって回転する。「床」の下にあるギア D とクランクは「床」に固定されているため、同様に軸の回転速度にしたがって円運動する。ここで、ギア C が軸に対し逆回転、つまり相対的に回転しているため、D から見ても相対的に回転していることになり、機構として成立するのである。

これにより、ギア D は回転し、ギア D と同一回転軸を持つクランクにこの回転が伝わるのである。

3.4. クランク(その 1)



冒頭のクランクの写真とは若干異なり、円盤パーツと棒パーツだけで構成されている。これは製作を先に行い、「KMODDL」との対応を後付で行ったからである。それによると、一応この機構は、「Eccentric slider crank Mechanism」と呼ばれるものと似ていることが分かった(発表の際は「Slider-Crank Linkage With Variable Angle Slider」としていたが、どちらも似ている程度。どちらかといえば前者のほうが近いと思う)。

写真のクランクの円盤部分は前節の通り、ギア D から回転が伝わっているため機構としての運動は成立している。また、実際のメリーゴーランドとの対応関係として、前述の床に加え、クランクの棒部分の先端を馬とすれば、馬は床の回転に合わせて円運動をし、さらにクランクによって上下運動をする。

これにより、一応当初の目的であった「回転運動をしながら上下運動をする機械」の再現には成功したが、細かいところでいくつか問題点が出てきてしまった。

3.5. 一号機と実物との比較

完成した一号機を改めて実際のメリーゴーランドと比較してみると、相違点が 2 つ見つかった。

第 1 の点は、規格が違うことである。これは人が乗るサイズに設計してある実物と、限られたパーツしかない LEGO を比べた場合、仕方のないことである。また、規格が違うことに関連して、馬の数(現状 2 体)をこれ以上増やそうとしても、ギアの規格が少ないため、ギア D を配置しきれず、不可能であると言える。しかし、これも実用化という点で考えたらギアの規格も自由に選べるはずなので、問題は無いだろう。

第 2 の点は、馬の運動が違うことである。前節で述べた通り馬は床に沿っての回転運動とクランクによる上下運動をするが、今回用いたクランクの構造を見てもらえば分かる通り、馬は前後にも運動をする。さらに、一部重力による運動がある。これは実用化の点から見ても問題だ。というのも、重力による運動があるということはしっかりと固定がなされておらず、座っていても間違いなく不安定に感じると推測できるからだ。加えて実物にはありえない前後運動までであるとすれば、それはもはやメリーゴーランドとは呼べないだろう。

そのため、この点について再検討する形で二号機の製作に取り掛かることにした。

4. 二号機

一号機の失敗を踏まえてクランク機構の代わりとなるものを探した。あまり大枠を変え

ずすむよう、クランク同様に回転運動を上下運動に換えることの出来る機構を選択することにした。そこで、他の生徒の作品も参考にして選んだ方法がカムの利用である。



さらに他の部分もデザインの変更や安定性の強化などを行い、二号機を完成させた。

4.1. カム



写真が変更点としてカムを用いた機構である。「KMODDL」のサイトで調べたところ、構造的に特に一致するものは無かったが、「Eccentric Drive」と呼ばれるものが比較的似ていた。

「カム」自体は写真中央の卵形をしたパーツのように、中心からの距離が一定でない装置の総称で、回転により周辺の素材に影響を与える特徴がある。今回の場合、カムが回転することでその上に乗っている軸が上下運動をする。この軸は特に固定はされていないが、「床」と「天井」のパーツの穴を通ることによって前後左右へのブレが起きないようにしているため、カムの運動を受けて上下方向にのみ運動する。馬の運動についての問題点は、馬をこの軸上に配置することで解消された。

4.2. 二号機と実物との比較

二号機はカムの採用により馬の前後運動の問題を解決することが出来た。稼動した際も実物のメリーゴーランドによく似た軌跡が観測された。

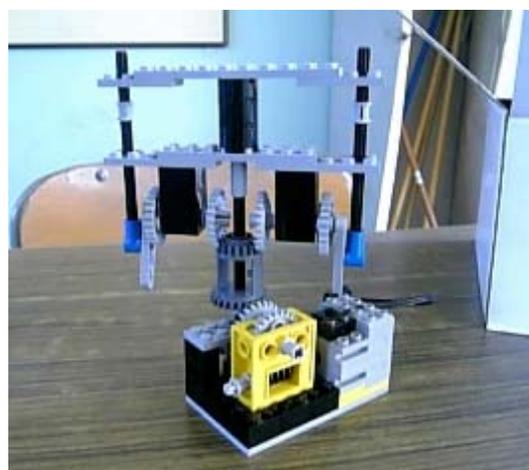
一号機が残した問題点を解消した一方で、二号機からは実際のメリーゴーランドとの相違点であり、また問題点として、馬が回転してしまうことが挙げられた。その原因は馬を支えている軸が、カムの採用によって固定できなくなったことにある。クランクの場合は軸とクランクが直結しているため、このような問題は起きない。しかし、カムの場合は軸がカムの表面を滑り続けなければならないため、床にも天井にもカムにも固定できないのだ。

馬が回転するメリーゴーランドなら、ある意味で遊園地界の革命ではあるが、結局一号機同様に今回の主旨からずれているため、振り出しに戻る結果となった。

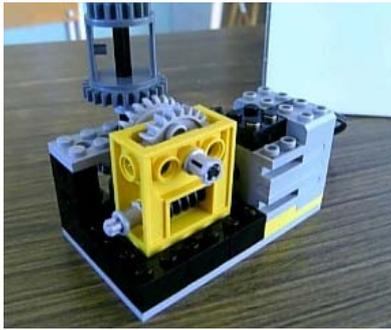
5. 三号機

前章の結論として、カムを使用する際に避けては通れない問題が存在することが明らかになった。そこで、改めてクランク機構に戻ってみて、そこに改良を施すという方針で三号機の製作に取り掛かった。

また、他の生徒の作品を参考にして、モーターの変速機構もよりコンパクトなウォームギア機構を採用することにした。それに合わせて、二号機の段階でかなり大きくなっていった装置全体の小型軽量化を試みて、三号機を完成させた。



5.1. ウォームギア



ウォームギアはねじ状のギアと円盤状のギアを組み合わせた機構である。「KMODDL」のサイトで調べたところ、「Endless Screw or Worm Drive Mechanism」と呼ばれるものと一致することが分かった。

ウォームギアの特徴として、大幅な回転率の変化を作り出せることが言える。従来の変速機構よりも明らかに優れている。

また、力の伝達が一方的であることも挙げられる。写真の場合、モーターを回して先の装置に回転を伝えることは出来るが、その逆はできないということである。これは実用化の面でも有効な利点で、客がどのように乗っても装置は決められた運動を守るようになる。馬に座ったら逆回転した、といった事故が防げるのだ。

5.2. クランク(その2)



一号機での失敗を受け、「KMODDL」のサイトを参考にして、円盤・棒パーツに加え、軸パーツを取り付けたクランク機構である。「Eccentric slider crank Mechanism」と呼ばれるものと一致している。

軸パーツが前後左右にブレないように、カムと同様、天井と床のパーツの穴を通して。さらに、クランクとも直接繋がっており、しっかり固定されている。これにより、軸上にある馬は、床から見て完全な上下のみの運動を実現することが出来た。

5.3. 三号機と実物との比較

クランク機構の改良により馬の運動は当初の目的であった「回転運動をしながら上下運動をする」を達成することが出来た。これは実際のメリーゴーランドの動きとほぼ同じとって遜色ないものと思われる。

6. 数学的分析

三号機の運動は見たところ実用面に耐えうるものである。ここで、三号機における馬の運動を数式化してそのことを確かめてみることにする。

馬の位置を表す量として、メリーゴーランドの中心からの距離は変わらないので、床からの高さ h を回転角 θ の関数で表すことにする。

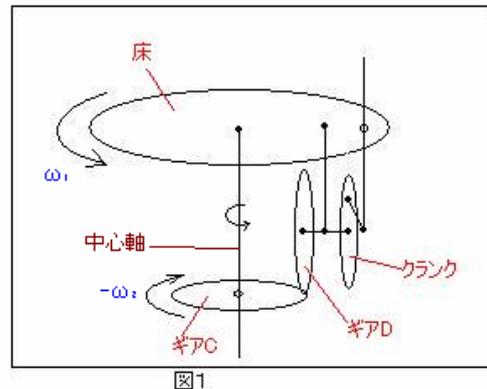


図1

図1は三号機の床パーツ真下のモデルである。便宜上、ギアも床パーツも円で表現することにする。

まず、クランクの回転角 θ_0 を床の回転角 θ で表すことを考える。床および中心軸の角速度を ω_1 、ギアCの角速度を $-\omega_2$ 、半径を r_2 、ギアDの半径を r_0 とおく。

今、床が θ 回転すると、ギアCの回転角は角速度に比例するため、 $(-\omega_2/\omega_1) \cdot \theta$ である。ギアDは床と同じ角速度で運動するため、ギアDの中心軸に対しての回転角は θ である。よって、ギアCから見たギアDの相対的な回転角は

$$\theta - (-\omega_2/\omega_1) \cdot \theta = \{(\omega_1 + \omega_2)/\omega_1\} \cdot \theta$$
 である。ギアCの半径は r_2 なので、ギアCから見たギアDの移動距離は

$$r_2 \times \{(\omega_1 + \omega_2)/\omega_1\} \cdot \theta$$
 である。ギアCから見たギアDの移動距離

と同じだけギア D は転がっており、ギア D の回転角はクランクの回転角と等しいため θ_0 なので、

$$r_0 \cdot \theta_0 = r_2 \times (\omega_1 + \omega_2) / \omega_1 \cdot \theta$$

$$\therefore \theta_0 = (r_2 / r_0) \cdot \{(\omega_1 + \omega_2) / \omega_1\} \cdot \theta$$

ここで、 $k = (r_2 / r_0) \cdot \{(\omega_1 + \omega_2) / \omega_1\}$ として、 $\theta_0 = k\theta \dots \dots \textcircled{1}$ とおくことにする。

次に、馬の高さ h をクランクの回転角 θ_0 で表すことを考える。図 2 はクランク機構を正面から見た模式図である。O はクランクの円盤部分の中心、A は円盤上で棒パーツが固定されている点、B は棒パーツと軸パーツが固定されている点である。

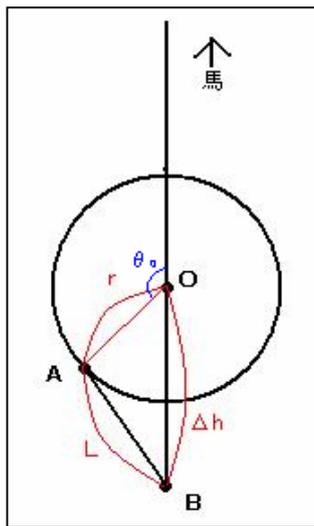


図2

円盤パーツの半径を r 、AB の長さを L とし、 θ_0 を図のように取ると、BO の長さ Δh は θ_0 の関数として次のように表せる。

$$\Delta h = \sqrt{L^2 - (r \sin \theta_0)^2} - r \cos \theta_0$$

このことは A から OB 上に垂線を下ろせばすぐに確認できる。ここで、B から馬までの長さとして O から床までの距離は一定であるから、それぞれ α 、 β とおくと、床から馬までの高さ h は $h = \alpha - (\beta + \Delta h)$

$$C = \alpha - \beta \quad \text{とおけば、} \quad h = C - \Delta h$$

$$\therefore h = r \cos \theta_0 - \sqrt{L^2 - (r \sin \theta_0)^2} + C \dots \dots \textcircled{2}$$

①、②より、

$$\therefore h = r \cos(k\theta) - \sqrt{L^2 - \{r \sin(k\theta)\}^2} + C \dots \dots (*)$$

これで、馬の高さ h が床の回転角 θ の関

数で求まった。(*)式から、2つのことが読み取れる。第1に L と r の関係である。

$$-1 \leq \sin(k\theta) \leq 1 \quad \text{より、} \quad L^2 - r^2 > 0 \quad \therefore L > r$$

このことからクランク機構について、棒パーツの長さは円盤パーツの半径以上の長さがないと機構として成立しないと言える。

第2には実用面に関してである。(*)式より、 h の周期は $2\pi/k$ だと分かる。ここで、 $k = r_2 / r_0 \cdot (\omega_1 + \omega_2) / \omega_1$ なので、実用化を考えれば、ギア C やギア D の半径を変えることで k の値を自由に変えることが出来、周期を自在に調節できる。周期をうまく調整すれば、同じ地点でも違う高さを楽しむことができるため、アトラクションとしてのメリーゴーランドの目的に適した機能を備えていることになる。また、図2より、 h の最大・最小値はそれぞれ、

$$h_{\max} = r - L + C, \quad h_{\min} = -r - L + C$$

であるため、馬の最大高低差は $2r$ となる。これは、クランクの円盤パーツの半径を変えれば調節できる。実際において、馬の高低差は客が視覚的に得る最大の情報なので、これが自在に調節できることはやはりメリーゴーランドの目的に適している。それに加えて $C = \alpha - \beta$ や L を調節することで、馬への跨り易さや万一の落下事故での安全性を確保できる。さらに注目すべきは、これらの要素を調整するに関わるパーツはどれも異なり、しかもほとんどが互いに独立しているため、どの要素もかなり自由に調整できるという、実用化において重要な長所が備わっていることが良く分かる。

7. おわりに

6. で述べた通り、三号機は運動面において実用化を目指せるものであることが分かった。これは、LEGO の世界を通して現実の世界を再現・分析できたということである。その面でも、今回のメリーゴーランドの再現は成功したと言えるだろう。

参考文献・参考 Web サイト

<<http://kmoddl.library.cornell.edu/index.php>>
 [2006, September 30]