出典：文部科学省スーパーサイエンスハイスクール開発指定研究
2007年度（56期生）テーマ研究論文集、発行：筑波大学附属駒場高等学校数学科、pp.44-49、2008年3月

# LEGO によるジェットコースターの再現
# ―回転速度及び運動の方向の変換―

川上　貴史

## １．はじめに

今回私が LEGO を利用して再現しようとしたのは，ジェットコースターだ。ジェットコースターは大抵の遊園地にある人気アトラクションであり，そんなジェットコースターに，一体どんな機構が含まれているのだろうか？という疑問から再現を試みた。ジェットコースターと言えば，安全用のレバーが降りてきてから，カタカタと音を立てながらゆっくりと上昇して行き，レールの天辺まで昇ったところから，急に勢いに乗って猛スピードで駆け抜けていくアトラクションである。コースターが一度上がり切ってしまえば，後は重力に引かれるようにして，最初に上昇したところよりも低いところであれば走り続けることができる。このことから分かるように，ジェットコースターにはコースターを上昇させるところ以外には基本的に機構は使われていないのだ。また，今回は再現するのに使用するのが LEGO ということで当然パーツに制限があり，ジェットコースターそのものを完全に再現することはできないので，コースターに見立てたものをつくり，それをいかにジェットコースターのように発射することが出来るか，ということに重点をおいて再現した。再現する際，岡山県にあるスカイガーデンのジェットペアコースター(右上の写真)を参考にコンパクトでかつ，巻き上げ式のものに近づけるようにした。また，下の写真は実際に作ったものである。

## ２．再現する上で注意または工夫したこと

まずは，当然だがコースターを上昇させることを意識した機構をつくるわけなのであるが，再現するのは LEGO であっても実際には人が乗るものなので，安全性を考慮しなければならない点だ。コースターが上昇する際に，コースターが不規則な動きをすることなく，一定の動きを保つようにすることに最善の注意を払った。

次に，上昇する際のスピードが速くなり過ぎないように気をつけた。というのも，上昇する際のドキドキ感，そして，**１．はじめに**で述べたように，ゆっくりと上昇してから突然下降する，そこにジェットコースターの魅力があると思ったからだ。なので，昇るところから速くてジェットコースターの魅力が軽減されないようにスピードを出し過ぎないように考慮した。

上記の 2 点を踏まえたうえで，本物のジェットコースターに近づけるようにした。

## ３．運動の方向の転換

ここから，実際に LEGO を使って再現し始めた話になる。まずは，運動の方向の変換とタイトルをつけたが，電気を流して自分がつくったものを作動させるとき，電気エネルギーをモーターによって運動エネルギーに変換する。モーターはシャフトが回転するのだが，コースターは回転させるのではなく，斜め上に持ち上げるので，運動

出典：文部科学省スーパーサイエンスハイスクール開発指定研究
2007年度（56期生）テーマ研究論文集、発行：筑波大学附属駒場高等学校数学科、pp.44-49、2008年3月

の方向を変える必要がある。そこで考えたアプローチを大きく分けて 3 つの方法を示す。

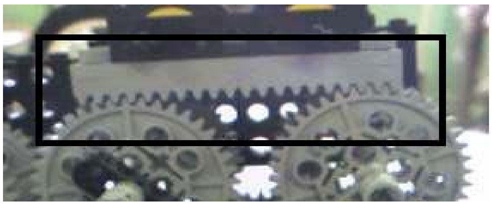
### 3.1. ベルトコンベアの利用

最初に考えたのはベルトコンベアのデコボコにコースターのタイヤを軽く引っ掛けることで，ベルトコンベアをレールに見立て，コースターを持ち上げるというものだ。ベルトコンベアを用いたのは，滑りにくく大きな力を伝えやすいと考えたからである。しかし，実際に作ってみると確かに力は伝わっていたが，ちょっとでもコンベアが揺れてしまうとタイヤがベルトから外れてしまい，何回かの実験の中でコースターが何度も落下してしまったので実用的ではないと考え，却下することにした。

### 3.2. ラックとピニオンの利用

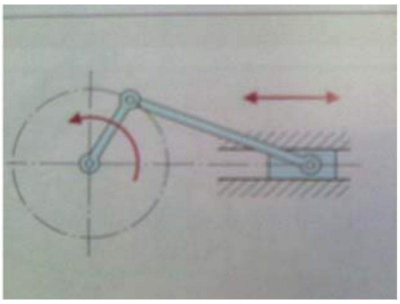
1 つ目の案が失敗した後，KMODEL のホームページを見ていたときに偶然思いついたものなのだが，下のラック(棒状のもの)をコースターと考え，上下逆さまに見れば，回転運動からコースターが直進する運動に変えられるのではないかと考えた。

具体的には，ピニオン(回転する方)を同一直線上にいくつか用意し，それにコースター代わりのラックを乗せて(下の写真の黒い枠の中)全てのピニオンを同時に回すことで，ラックを特定の方向に運ぶというものだ。この機構を使う利点は，滑らかに運動の向きを変えられる点である。



### 3.3.往復スライダクランク機構の利用

今回は，二つ目のラックとピニオンで製作してしまったために実際には作っていないのだが，右上の写真のような往復スライダクランク機構を利用することも可能である。この機構はクランクと呼ばれる短い棒が回転することでクランクにつながれ，かつ溝によって運動の方向が制限されたスライダが直線的な運動を繰り返すものだ。この真っ直ぐに伸びる際の力を利用してコースターを押し上げることができると考えられる。



## 4．減速させる機構

次に，コースターを上昇させるときに速度を落とすのに考えた機構について。ここでは，2 つ紹介したいと思う。

### 4.1. 歯車の利用

1 つ目は歯車を利用した減速の仕方だが，一口に歯車といっても種類は様々なので，いくつかに分けて紹介する。

最初は，実際に使用したウォームホイールだ。これは下の写真にあるように，上で回転するウォームホイールと，下にあってウォームホイールと垂直方向に回転するウォームで構成されており，ウォームを回すことで上のウォームホイールを回して使用する。しかし，ここにウォームホイールの最大の特徴が表れているのだ。というのは，ウォームからウォームホイールへと回転運動を伝えることはできるけれど，ウォームからウォームホイールには運動を伝えることはできないからである。また，1 つの機構で大幅に速度が落ち，スペースをとらない点も利点の 1 つである。

出典：文部科学省スーパーサイエンスハイスクール開発指定研究
2007年度（56期生）テーマ研究論文集、発行：筑波大学附属駒場高等学校数学科、pp.44-49、2008年3月

次は，クラウンギヤを利用するものである。クラウンギヤには小ギヤ部とクラウンギヤ部の２箇所に歯がついており，クラウンギヤ部の歯の向きが回転方向と直交しているのが特徴だ。この歯の位置の半径に差があることである時間に進む歯の数が変化し，回転速度を落とすことができる。

最後は普通の歯車だけで，速度を落とすことが可能な歯車の大小の差を利用したものだ。大小の差があることで，大きい方の歯車が一回転するためには，小さい方が何回転かする必要があるため,「モーターに近い方の歯車を小さくすることで速度を落とすことができるのでは？」と考えた。また，歯車の大きさが異なるだけで良く，かさ歯車のように速度だけでなく，運動の向きも変えてしまう歯車でも同じことが言える。

### 4.2. 歯車でないもの

4.1.では歯車の大小を利用したが，これはベルトを使用するプーリ(右上左の写真)や歯のついていない摩擦車(右上右の写真)についても同じことが言える。歯車の方が滑ることがないので，大きい力を伝えるのには歯車のほうが優れていると言えるが，回転の方向が反対になってしまう，音が大きいといった欠点を持っている。そこで，ベルトによって同じ方向に回転することのできるプーリを用いたり，摩擦によって回転を伝えるため音の静かな摩擦車を用いたりすることも検討した。しかし，実際にLEGO を組み立ててみるとコースターが歯車に対して大きいということもあって，力を伝動する際に滑ってしまい，ジェットコースターには使えそうになかった。

### 4.3. 往復スライダクランク機構

先ほど実際は使わなかったと書いたが，往復直線運動を行うところに着目すると，スライダが一定の運動を行うよう常に溝に触れている。するとどちらも細かな凹凸があるため当然摩擦力が働くことになり，このため自然に速度が多少落ちることになります。また，クランクが回転し続けるのに対して，スライダはクランクがスライダの作用線上にきたときに運動の方向を反対に変えるため，一瞬動きが止まる。このことからクランクの回転運動の方がスライダの往復運動よりも速いと考えられる。したがって，仮に摩擦力が働いていなかったとしても減速させていると考えられる。

## ５．減速比

ここでは**４．減速させる機構**で紹介した減速させる機構によって具体的にどの程度減速させることが可能なのか，ということについて考えていく。

### 5.1. 歯車

2 つのギヤを組み合わせたとき，その回転の比は次のようになると考えられる。

$$(\text{回転の比})=\frac{(\text{小さいギアの回転数})}{(\text{大きいギアの回転数})}$$

$$=\frac{(\text{大きいギアの歯数})}{(\text{小さいギアの歯数})}=\frac{40}{8}=5$$

したがって，この式を利用すれば，回転の速さの変化の割合がわかる(具体的な数値はLEGO に含まれていたパーツで実現可能な回転比の値。以下同じ)。

### 5.2. プーリとベルト及び摩擦車

プーリとベルトや，摩擦車を利用する際も歯車と同様にプーリあるいは摩擦車同士の大小の差を利用して速さを変えることが出来る。プーリの場合ベルトを用いているが，2 つのプーリの速さは摩擦車のように直接接触しているのと変わらないので，同

出典：文部科学省スーパーサイエンスハイスクール開発指定研究
2007年度（56期生）テーマ研究論文集、発行：筑波大学附属駒場高等学校数学科、pp.44-49、2008年3月

じようで速さの変化の割合を求める。

$$(\text{回転の比}) = \frac{(\text{小さいプーリの回転数})}{(\text{大きいプーリの回転数})}$$

$$= \frac{(\text{大きいプーリの直径})}{(\text{小さいプーリの直径})}$$

$$= \frac{2.2cm}{0.9cm} = 2.4$$

よって，この式を用いれば，変化の割合を求めることができる。

## 5.3. ウォームホイール

次に，実際に使用しているウォームホイールの減速比を求める。ウォームギアの場合，ホイールの歯 1 枚 1 枚をウォームのねじれたギヤ歯で挟んでいるので，ウォームが 1 回転するとホイールの歯が 1 つ分進むことになるので，

$$(\text{回転の比}) = \frac{(\text{ウォームの回転数})}{(\text{ホイールの回転数})}$$

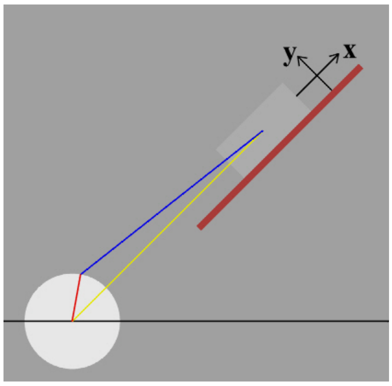
$$= \frac{1}{(\text{ホイールの歯数})} = \frac{1}{24}$$

となる。よって，この場合，前述の①や②とは異なり，ホイールの歯数によって回転の比が決まることになり，ウォームがホイールの歯数分回転すると，ホイールが一回転する。

## 5.4. 往復スライダクランク機構

この機構は実際には利用しなかったが，実際に利用したウォームホイールの回転比を求める計算はあまりにも単純すぎた，また，往復スライダクランク機構は運動の速度と方向の両方を変えるという点でテーマに即している，という理由からこの機構を用いた場合の速度の変化の割合を求めてみたい。

往復スライダクランク機構を設定する際，本来ならばスライダを上と下の両側から押さえ込む様にして，スライダの動きを直線的にするが，今回はスライダの下部を重くすることで常に反時計周りに回転するようにし，それを下側に用意した斜面で支える形にする。下図において，回す円の中心を A, 赤いクランクと青いクランクの交点を B, スライダの対角線の交点を C として，AB の長さを $r$，BC の長さを $b$，AC の長さを d，AB と AC のなす角を $\theta$ ($-\pi<\theta<0$，$0<\theta<\pi$)，BC と AC のなす角を $\varphi$ とし，$x$ 軸と $y$ 軸を図のように設定する。




すると，スライダは $y$ 軸方向には動かないので, $x$ 軸方向への速度をクランク上の点 B が円周上を動く速度と比較する。

まず，$r$，$b$，$d$ の関係式を求めるために，クランクで構成されている三角形を抜き出して考える。B から AC に垂線を下ろすと，

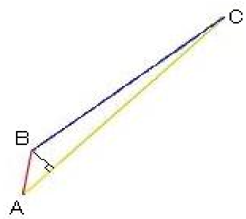
$$r\sin\theta = b\sin\varphi \Leftrightarrow \sin\varphi = \frac{r}{b}\cdot\sin\theta$$

したがって，

$$\cos\varphi$$

$$= \sqrt{1-\sin^2\varphi} = \sqrt{1-\frac{r}{b}\cdot\sin\theta}$$

また，図より，




$$d = r\cos\theta + b\cos\varphi$$

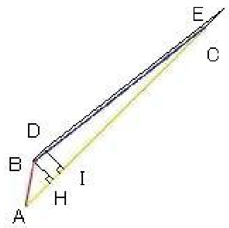
$$= r\cos\theta + b\sqrt{1-\left(\frac{r}{b}\cdot\sin\theta\right)^2}$$

と，$d$ は $\theta$ の値によって 1 つに決まり，かつ，今求めた値はクランクが受ける図形的な制約であり，クランクが変形しない限りこの式は変化しないので，クランク AB の回転速度または，スライダの速度が片方だけが落ちることは考えられない。したがって，斜面による摩擦力によってスライダの速度だけが落ちることはないと思われる。

そこで，クランク AB とスライダの純粋な速度の比を求めることにする。

出典：文部科学省スーパーサイエンスハイスクール開発指定研究
2007年度（56期生）テーマ研究論文集、発行：筑波大学附属駒場高等学校数学科、pp.44-49、2008年3月

考え方を変えて，$\theta = 0$ のときの C の位置を E とし，四角形 BCED が平行四辺形となるように点 D をとり，点 B，D から AC に下ろした垂線の足をそれぞれ H，I とする。すると，



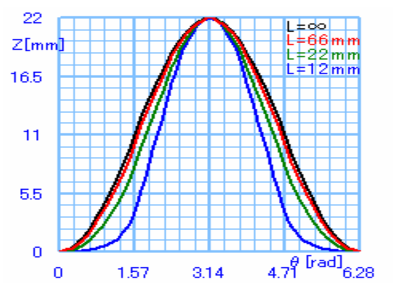

AE =AH + H I + IC = $r\cos\theta$ + BD + $b\cos\varphi$
AE は上の図で $\theta = 0$ を代入して，AE = $r + b$ なので，次のようになる。

$$\mathrm{BD} = r + b - r\cos\theta - b\sqrt{1-\left(\frac{r}{b}\cdot\sin\theta\right)^2}$$

これは $x$ 軸と平行な直線の半径 $r$ 中心 A の円，及び半径 $b$ 中心 E の円との交点の距離を表している。

ここで，最初に $d$ を求めた式の根号の中を見ると，$1-\left(\frac{r}{b}\cdot\sin\theta\right)^2$ となっており，これは負ではないため，$0 < \sin^2\theta \leqq 1$。よって $r < b$ が成立条件である(これは往復スライダクランク機構の成立条件でもある)。

このとき，$b$ を $r$ に比べて非常に大きくすると，BD は限りなく $r - r\cos\theta$ に近づくと考えられ，BD → $r - r\cos\theta$ ならば，
$d$ = AC = AE－CE = AE－BD → $r\cos\theta + b$
となる。この式の $b$ をスライダの初期位置と見なすと，スライダの位置は $\theta$ の値によって一つに定まるので，スライダの位置は $\theta$ の関数になっていると言える。




上のグラフは「3 次元電光掲示板」のホームページから引用してきたものだが，グラフ中の L は BC (= $b$)を表している点で同じである。しかし，Z が表す位置，$\theta$ の表す角度や初期位置が異なっているため(具体的に言うと Z は $\theta = 180°$のときの C の位置を F としたときの CF に，$\theta$ は 180°－∠BAC に，初期位置は，$\theta = 180°$ のときの位置に相当する)，$\pi / 2$ 分のずれが生じているが，このグラフから L = $b$ → ∞のときに，このスライダの運動は等速円運動をしている物体の $x$ 成分を正射影したものであるため，スライダの運動は単振動になっている。

単振動の周期を $T$ とすると，$T / 2$ 秒ごとにスライダの変位は $0 + b$ となり，T 秒ごとに初めの状態に戻って，同じ運動を繰り返すことになる。時間と角度の関係を対応させると，1 周期($T$ 秒)は角度 $2\pi$ [rad] 増加に対応します。つまり，1 秒間で角度は $2\pi$ / T [rad/s] 増加する。したがって，$t$ 秒後の角度は $2\pi t$ / T [rad/s] で表される。

以上のことから，原点を $t = 0$ で上向きに通過する，振幅(最大変位)A，周期 $T$ の単振動の変位 $x$ は次のように表される。

$$x = A\sin(2\pi t / T) \quad \cdots\cdots(1)$$

ここで角速度という単位を導入する。角速度は一秒当たりに回転する角度を指し，$\omega$ で表す。すると，$\omega = \Delta\theta / \Delta t$ [rad/s] という関係が成り立つ。
また，単振動をしている物体は周期 $T$ の間に $2\pi$ 進むので，$\omega = 2\pi / T$。したがって，(1)は $x = A\sin\omega t$ となる。スライダの場合，$x = d - b$，A = $r$ としており，角速度は $\omega = \omega'$とすると，$t$ 秒後のスライダの回転運動をしている円の中心からの距離 $d$ は $d = b + r\sin\omega' t$ と表せ，単振動をしている物体の速度は三角関数の積分法を用いて

$$v = \Delta x / \Delta t$$
$$= |\, r\sin\omega'(t+\Delta t) - r\sin\omega' \Delta t \,| / \Delta t$$
$$= r\omega'\cos\omega' t$$

ところで，下図の点 P のような等速円運動を考えたとき，角速度 $\omega$ とすると，

$$\omega = \Delta\theta / \Delta t \text{ [rad/s]}$$

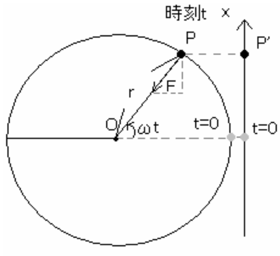
また，点 P が一周するのにかかる時間，すなわち周期を T とすると，$\omega = 2\pi / T$
すると，点 P は T 秒かけて一周すなわち，$2\pi r$ 動くので，点 P の速度は

$$v = 2\pi r / T = r\omega \quad \cdots\cdots(2)$$

向心力(円運動を維持するために中心に向かって働く力)の $x$ 成分(ただし，今は便宜上，$x$ 軸を鉛直方向とします)は，図より，

出典：文部科学省スーパーサイエンスハイスクール開発指定研究
2007年度(56期生)テーマ研究論文集、発行：筑波大学附属駒場高等学校数学科、pp.44-49、2008年3月

$$F_x = -|F|\sin\omega t \quad \cdots\cdots(3)$$




ここで，等速円運動の加速度を考えると，

$a = |\Delta v| / |\Delta t|$

$\theta$ が小さいとき，$\Delta v$ は半径 $v$ で角 $\Delta\theta$ の扇形のこの長さに等しい，としてよいので，$|\Delta v| = v\Delta\theta$ となり，$\omega = \Delta\theta / \Delta t$ より $\Delta\theta = \omega\Delta t$ なので，

$$a = v\omega\Delta t / t = v\omega = r\omega^2 \quad (\because(2))$$

運動方程式は $F = ma$ なので，$mr\omega^2 = F$

したがって(3)より，

$$F_x = -mr\omega^2\sin\omega t = -m\omega^2 x$$

$x$ 成分についても同様に，$F_x = ma_x$ なので，

$$ma_x = -m\omega^2 x \quad \therefore\ a_x = -m\omega^2$$

このことから円運動をしている物体の $x$ 軸方向への影は復元力が $-m\omega^2 x$ であり，単振動の運動方程式 $ma = F = -Kx$ において $K = m\omega^2$ の単振動の方程式の形をしていることになる。よって，$\omega = \sqrt{\dfrac{K}{m}}$ という単振動における角振動数の性質より，

$$\omega\ (\text{単振動の角振動数}) = \sqrt{\frac{K}{m}} = \sqrt{\frac{m\omega^2}{m}}$$

$= \omega$ (等速円運動の角速度)

よって単振動の角振動数は元の円運動の角速度に等しいことになる。

したがって，このことから往復スライダクランク機構において，モーターの力で回っている点Bは先程の等速円運動をおこなっている点Pと同じ運動をおこなっているので，クランクABの回転速度を $V$，角速度を $\omega$ とすると $V = r\omega$。スライダの速度を $v$ とすると，初期角度 $-\pi/2$ 分ずれていて，

$$v = r\omega\cos(\omega t - \pi/2) = r\omega\sin\omega t = r\omega\sin\theta$$

となり，クランクの速度vは回転運動の速度 $V$ の $\sin\theta$ 倍となる。$0 \leqq \sin\theta \leqq 1$ より，$\theta = \pi/2 + 2n\pi$ ($n$ は整数) のときのみ速度は一致し($\theta = -\pi/2 + 2n\pi$ ($n$ は整数)のときは向きが反対で速さが同じになる)，それ以外のときは速度が遅くなっていると考えられる。また，最初に除外していた $\theta = 0$，$\pi$ のとき，スライダは運動の方向を反対に変え始めようとして一瞬止まっているので，速度は比較できないので，考えていません。

## ６．終わりに

運動の向きを変えたり，速度を落としたりする機構について調べたが，回転運動を方向の異なる回転運動に変えるものや，直線的な運動に変えるものなど，実に様々で，機構は奥が深かった。また，同じ運動に変換するものでも，種類が多様で目的に合わせて使い分けられているようだった。LEGOでこれらの機構を再現する際，現実とは違う機構で出来るだけ現実に近づけていくという難しい作業だったが，逆に考え方が最初から制限されることなく，自由な発想で作業を行えたのでよかったと思う。

## 参考文献および参考 Web サイト

石田晴久・加藤幸一・渋川祥子　他46名(平成14年2月10日発行)「新しい技術・家庭　技術分野」東京書籍.編集責任者　森川瑞夫･担当　鶴岡富子・澤田暢(発行年月不明)「最新　技術･家庭科資料集」明治図書(2頁往復スライダクランク，3頁歯車，プーリとベルト，4頁摩擦車，ウォームホイールの写真)

<http://drkssk.fc2web.com/zekkyou/local/sky/pair/pair.htm1>[2006, October 21](1頁ジェットコースターの写真)

<http://kmoddl.library.cornell.edu/model.php?m=574>[2006, October 21](2頁ラックとピニオンの写真)

<http://www.morii.jp/railmodel/etc/gear.html>[2006, October 21](2，3頁ウォームホイールの説明等)

<http://kmoddl.library.cornell.edu/model.php?m=578>［2006, October 21］(2頁ウォームホイールの写真)

<http://yrg.fc2web.com/kaizou/02.html>[2007, March 30](3頁クラウンギヤの写真)

<http://ja.wikipedia.org/wiki/%E5%8D%98%E6%8C%AF%E5%8B%95> [2007, April 1]

<http://www.geocities.co.jp/HiTeens-Penguin/1552/comi_lecu/physics/phy-3120.html> [2007, April 1] (単振動について)

<http://naruken.cweb.tk/labo/3d_led/index.html> [2007, May 29] (5頁 $L$，$\theta$ のグラフ，3次元電光掲示板)