

バイキングの数学的解析

—物作りより数学へ—

小松 卓也

佐和 秀彬

1. 試作機製作

LEGO による製作は初めてだったために、始めに大まかな形を作り、後でバイキングとして動かすために不適當なところを改造していくという手順で製作を進めることになった。2人で1つの内容に取り組んだため、2人が小題ごとに担当を持ち、それぞれのレポートに記述するというかたちをとっている。なお、レポートの流れは製作の時間軸に沿っている。

1.1. 再現したアトラクションについて



ルスツリゾート遊園地のバイキング¹遊園地のアトラクションのひとつである、バイキング(パイレーツ)。船体が前後(画像では左右)に揺れるアトラクションである。

1.2. 船体の作成



図 1

実際にあるバイキングは船体を支える軸が1本である。今回の再現機でも、軸を1本としその軸を回転させることで船体の左右運動を実現させることはできたのだが、今回は違った形での再現を試みた。軸を回転させないとすると船体に直接動力を伝達させることになるのだが、LEGO の特性上船体の底面は完全な円弧を描いておらず、またそれにあうような動力伝達機構を作り出すこともできないと考えられる(動力についての詳細の考察は、別項で解説)。

そこで、図1にあるように軸を2本とすることで、船体が左右に揺れた時、軸が1本の場合よりも大きく揺れる(完全な円運動をすることは限らないが、少なくとも運動における半径の長さは比較的長くなる)ため、船体が水平方向に運動する時間が長くなると考えられる。こういった考えから、軸と船体を結ぶLEGO ブロックは最も長いものを使用した。更に長くすれば今以上の効果が期待できるのだが、それには、軸と船体を結ぶブロックを複数本連結させて使用しなければならず、強度が著しく落ちる、または軸にかかる下方向の力(ブロックの重さによるもの)が大きくなり軸がゆがんでしまうと思われたため現在の長さに決定した。

1.3. ゴムタイヤの設置

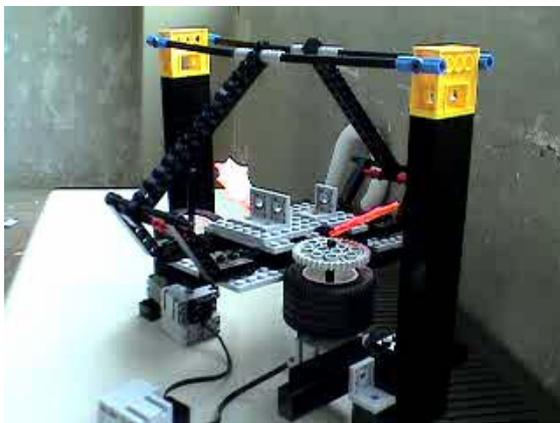
船体作成後、船体を動かすための媒体について考えた。

まず、船底と船体下方にギアを設置するという案が出た。しかし船底に適するパーツがなく、また、船体下方にギアを固定するのも困難であったため、他の方法を考えることにした。

そこで出た代替案が、船体の両脇にゴムタイヤを設置し、その摩擦力で以って船体を動かすというものだった。手順を次に示す。

黒く細長い棒状のパーツにゴムタイヤを通す。その棒状のパーツとモーターから突出

している棒状部とを、灰色で管状のパーツに差し込む形で一直線に固定する。以上のものを2つ作り、船体の両脇に設置された柱にそれぞれ固定する。このとき船底に取り付けた灰色の板の側面とゴムタイヤとが密着するように固定位置を調節し、両側からしっかりとはさみこむ。その状態でモーターに電気を送ると、モーターと連動して管状のパーツ、棒状のパーツ、そしてゴムタイヤが回転する。ゴムタイヤの回転に伴って密着した船体が前後する。ただし、船体を前後させなければならないので、モーターの回転方向は逆になるように接続しておく。



ゴムタイヤ設置後の試作機

(写真にはギアも含まれているが、この時点ではまだギアをかませていなかった)

注意した点は、次の2点である。船体の可動範囲が大きくなるように、船体を長くした点と、船体が重くなりすぎることによってモーターの負担が大きくなるようにした点である。

結局、モーターをとりつけて実際に動作させてみたものの、うまく動かなかった。ゴムタイヤと船底に取り付けた板とを近づけすぎるとゴムタイヤがうまく回らず、逆に離しすぎると空回りしてしまい、加減が非常に難しかった。そこで、また別の手段を考えなければならなかった。

1.4. 歯車の設置

ゴムタイヤでの動力伝達もうまくいかなかったためこれを撤去し、同時にゴムタイヤ機構で必要と考えられた船体下部に取り付けていた平面のLEGOも必要なくなったため、これも撤去した。これは船体の強度を上げるという意味では必要であるが、軸にかかる負

担をできる限り小さくしたかったために船体の重量を軽くするというで撤去した。

ゴムタイヤにかわる船体への動力伝達機構として、今度は図2にあるように、船体の側面のすぐ近くにモーターを2つ設置し、船体をはさむようにギア(ギアaとする)をつけた。また、船体にはギアaとかみ合わさるように棒状のギア(ギアbとする)をとりつけた。

この部分の機構について詳しく記述する。



図2



図3 Rack and Pinion Gear Pair

今回は左右対称となるようにモーターとラック・ピニオン機構を用いたが、これを片側だけに用いた場合でも船体を左右に運動させることができると理論上は考えられる。ただ、片側だけにこの機構を用いたとすると、船体が目標とする左右の運動方向以外の方向には動かないように、逆側もラック・ピニオン機構にかわるもので固定する必要がある、その面で今回用いた道具がLEGOということが問題となってくる。仮に、ラック・ピニオン機構を片側だけに使用し、逆側には壁を作って、これに船体を押し付けるかたちでバイキングを再現しようとしたとする。LEGOはブロックを設置できる場所が決められているため、

一番薄いブロックを組み合わせて位置を調整しようとしても船体と壁とのあいだに多少の隙間が生じることは避けられないため、

- (a) 船体が壁に押し付けられすぎる
- (b) 船体と壁の間に隙間が生じる

という2つのパターンが起こる確率が高いと思われる。

(a)の場合

ピニオンを回転させた時に、ラック・ピニオン機構により船体には左右運動をしようとする力(この力を F とする)が働くのだが、船体が壁に押し付けられているために壁と船体の間に、船体の左右運動と逆向きの摩擦力が働いてしまう。船体と壁のみについて考えると、船体に動力が伝わっていない(= 船体が静止している)時、船体と壁の間の静止摩擦力を f とする。(a)の条件では、船体が壁から受ける抗力 N が十分に大きいと判断できるため、 $f_{\text{limit}} = \mu N$ (μ は材質固有の定数)より、 f_{limit} (最大静止摩擦力)も十分に大きくなる。船体に動力が伝わった時、力 $F > f_{\text{limit}}$ となれば船体は動きだすことができるが、今回の仮定では $F < f_{\text{limit}}$ であるため、船体は動くことができない。 f_{limit} に対して F には限界値(= モーターの持つ馬力の限界)があるため、この不等式は成立する。以上より、(a)の場合は不適切であると考えられる。

(b)の場合

この仮定では壁と船体は接触していないため、その間の摩擦力は無視できる。ここでは、わかりやすく説明するために図3を用いることにする。ピニオンがモーターと直結しており、ラックを船体と考え、2物体に重力は働いていない(実際、図2を見ても水平方向には重力はない)とし、2物体は互いに弱い力で引き合っているとする(実際は、船体を支える2本の軸により目標運動方向以外の方向には多少は固定されている)。この状況においてピニオンが回転した時、ラックは左右に動く運動と共に、ピニオンから離れる運動も行うため、結果として十分な左右運動を行わないうちにピニオンからラックが離れていってしまうということが起きる。よって、(b)の場合もバイキング機構再現において不適切である。以上より、片側だけにラック・ピニオン機構

を用いることはせずに両側にこの機構を用いて製作した。

また、両側に機構を用いた時は何故うまくいったのかという疑問が残るが、これは船体の設置の段階で、軸の中心：船体と繋がる部分にトロンボーンのスライドのように伸縮できる機構をLEGOブロックで組み合わせて用いたため、多少のずれはそこから船の位置を修正し、モーターの位置を調整してラック・ピニオン機構をうまくかみ合わせることができた。この手法は、両側にラック・ピニオン機構を用い両側からギアで挟んだ時のみ有効と言える。その理由としてあげられるのは、ギアの構造にある。



図4

図4をみれば分かるように、ギアは相互の凹凸がかみ合って回転しているのだが、仮にギアとギアの距離(一般には Backlash という)が少し離れてしまっても、凹凸がひっかかる範囲内であれば、摩擦により多くのエネルギーをとられてしまう等効率は悪くなるが、ギアは回転することが可能である。

これより、2つのラック・ピニオン機構の間の幅は、小さい範囲であれば変えることも可能であると考えられる。

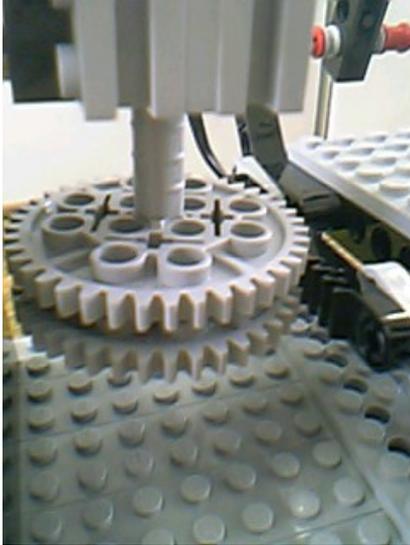


完成した試作機

2. 試作機改造

2.1. 改造 1

まず、船体の両脇に設置したギアをそれぞれ2枚ずつにした。



これにより、船体の鉛直方向への運動によるズレに対応できるようになった。

ここでまた動作実験を行った。結果、両脇のギアがモーターに直結していたために勢いが強すぎ、船体がすぐに上がりきってしまった。よって、次はギアの回転速度を調節することが課題となった。

2.2. 改造 2

この時、佐和と小松は別々の改良にとりかかったので、それぞれが担当した部分について記述・考察する。

2.2.1. ギアの回転数調節 1

試作機が完成したため、船体側面のモーターからコードを延ばし別のモーターにつないで手動でモーターを回転させ、船体側面のモーターに電力を送ってみたところ、特に障害が見つかることもなく目的の動作をさせることができた。ところが電源を用いてモーターに電力を供給したところ、非常に速い回転を行ったために船体が瞬間的に左右どちらかに振れてしまい、目的の動作は達成できたものの実物のバイキングを速度の面で再現できていないと感じたため、モーターの回転速度を落とすことにした。

はじめ考えたのが、プログラミングによる回転数の減速である。だが、プログラミングを理解するために時間がかかると思われたこ

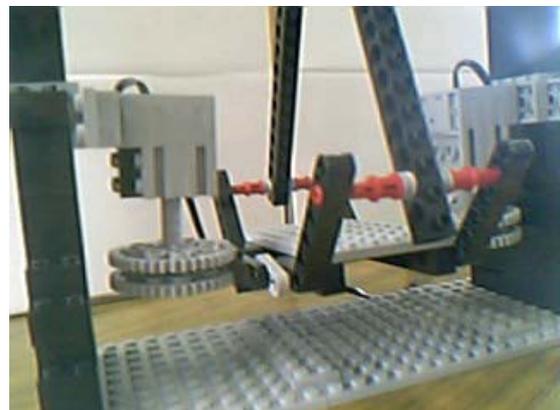
とと、プログラミングによる減速には限界があることを知り、この方法は断念した。

そうすると、ギアを用いて物理的に速度を下げなくてはならないのだが、図2を見る限り変速させるためのギアを設置するスペースがなく、一度組み立てた試作機を分解して作り直すのには時間がかかると感じられた。そのため、船体側面のモーターに“変速作業が完了した”エネルギーを供給することを思いついた。すなわち、「電源→コード→船体側面のモーター」を、「電源→コード→モーター→ギア等で変速→モーター→コード→船体側面のモーター」とすることを考えた。これについての考察は、最後に別項目として行うことにする。

2.2.2. 基礎の強化

2.2.1. ギアの回転数調節 1 と同時に、土台などの全般的な強化を行った。それは、土台に厚みを持たせた点と、柱をそれぞれ太くした点である。これには相当の数のブロック状パーツを要した。

以下は、強化前と強化後のそれぞれの写真である。強化により安定したことが分かる。



上が強化前、下が強化後



2.3. 改造 3

2.3.1. ギアの回転数調節 2

船体側面のモーターに“変速作業が完了した”エネルギーを供給することが失敗したため、これを撤去した。船体側面にモーターがあり変速ギアを設置することができないということが問題だと気が付いたので、モーターも撤去した。ギアのみを安定(次項目参照)させて図2と同じ場所に設置し、このギア2箇所を動力を伝達させることを考えることにした。

そもそもギアを用いて変速させるには、普通のギアを組み合わせる変速させる方法とウォームギアを使って変速させる方法がある。

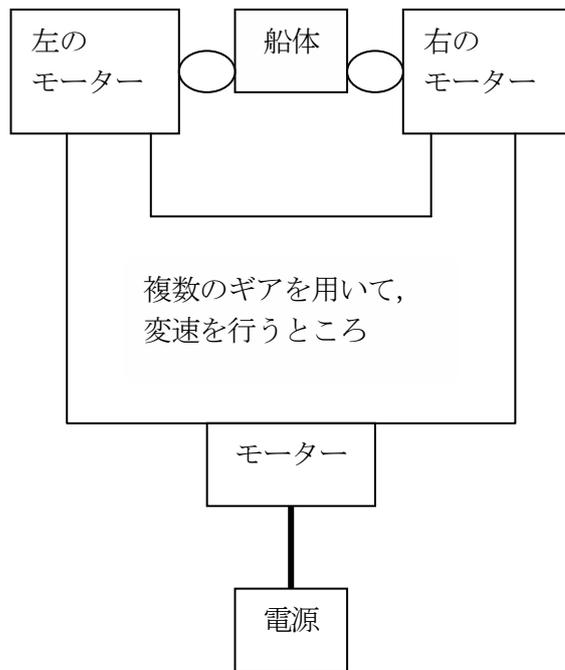


図5 Right Angle Worm Gear Pair

ウォームギアとは、図5にあるように螺旋状に切られた凹凸をもつギアと円のギアの組み合わせによる機構であり、この機構を用いることで回転速度を大きく変えることが可能である。具体的に挙げると、円のギアの歯数が a 個とする時、螺旋状のギアが一回転すると円のギアの歯一つ分まわるので、円のギアが 360 度回転するには螺旋状のギアが a 回回転する必要がある。即ち、全体としては回転数が $1/a$ されるのである。また、ウォームギアを円のギアを回転させて使用するには、2つのギア間の摩擦力を、高性能潤滑油等を用いて小さくする必要があり、LEGO でのそういった利用は難しい。

製作していたその時はウォームギアを使用すると回転数が著しく落ち、船体の動きが遅くなりすぎて面白くないという先入観があったために、この機構は用いようとしなかった。よって、円のギアを複数枚用いることで変速させようとした。

変速させるにあたって考慮しなければならないのは、図2のようにギアを2つ用いている点である。2つのギアは同じ速度で回転し、更に逆まわりに回転する必要がある。製作時の図が残っていないため、簡単な図で表すと、製作時目標としていたつくりは下のようになる。



- 太線はコード
- 楕円はピニオン

この図の通りに製作しようとしたのだが、いくつかの問題が発生したために中断した。まず、複数のギアを用いて変速を行う部分(以下 A 部)において、ギアの数が十分になかったために最短経路を考えてギアを設置していたところ、これも LEGO の特性上なのかうまくかみ合う(Backlash の範囲内におさめる)ように配置できなかった。おそらく、A 部に十分なスペースをとり十分な枚数のギアがあれば可能であったと考えられる。また、他の A 部の問題として、土台基礎を強化した後も船体とギアの位置は図2のままであったので、静止した時の船体とピニオンの位置は地面に水平な同一平面状にあり、ピニオンの高さに合わせて A 部をかみ合わせようとする船体が左右に運動した時に A 部とぶつかってしま

う。これを解消するには A 部を 2 段に設計しなくてはならないため、LEGO ブロックとギアの残数を考慮し断念した。

2.3.2. ギアの固定

2.3.1. ギアの回転数調節 2 では、船体の両脇に設置されていたモーターを取り払った。それにより、そのモーターに直結していたギアをそれぞれ固定する必要がある。そのための手順を次に示す。

①穴の開いたブロック状のパーツを両柱に用いる。その穴に黒く細長い棒状のパーツを通す。棒状のパーツについて、柱の外側(船体と逆側)へ飛び出した部分に輪状のパーツを取り付けて固定する。これにより棒が柱の内側方向へ動かないようにする。柱の内側(船体側)へ飛び出した部分には穴の開いたブロック状のパーツをいくつか通す。通されたブロック状のパーツに、可回転式で板状のパーツをはめこむ。はめこんだ側が後で下向きとなる。さらにそれらのブロック状のパーツを緑色の板状のパーツにはめこみ固定する。ここで、ブロック状のパーツの先に棒状のパーツが飛び出しているので、柱の外側と同じようにして輪状のパーツで固定する。これにより棒が柱の外側方向へも動かないようにする。

②土台にも①と同じ可回転式のパーツを取り付ける。その上に円柱型のパーツをはめこむ。これは黒く細長い棒状のパーツを差し込むための穴が中心に開いている黒い円柱型のパーツである。

②に黒く細長い棒状のパーツを差し込む。その棒状のパーツに灰色のギア 2 枚を通す。このとき、間に管状のパーツをはさむことで隙間を埋め、2 枚のギアの内側への動きに対して固定する。つまり、実際には「ギア、管状のパーツ、ギア」という順番で通すことになる。こうして棒状のパーツに通されたそれらのギアについて、上のギアは①の可回転式のパーツに、下のギアは②の円柱状のパーツに、それぞれはめこむことで、2 枚のギアの外側への動きに対しても固定する。

2.4. 改造 4

ギアの回転数調節 2 で失敗したため、学友である江口氏の助言により別の手段が使えることを発見した。

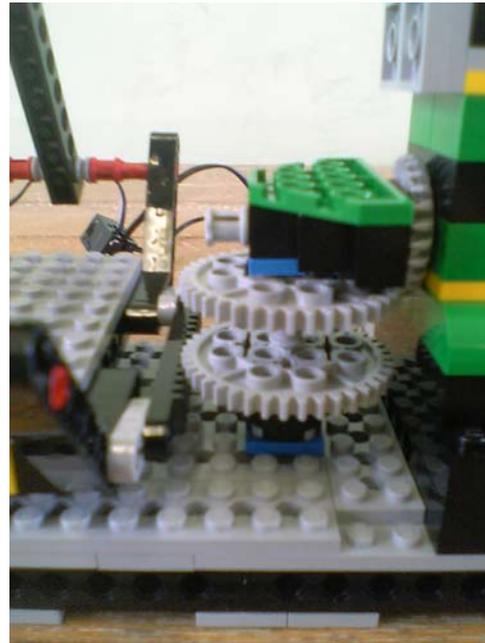


図 6 固定されたギア

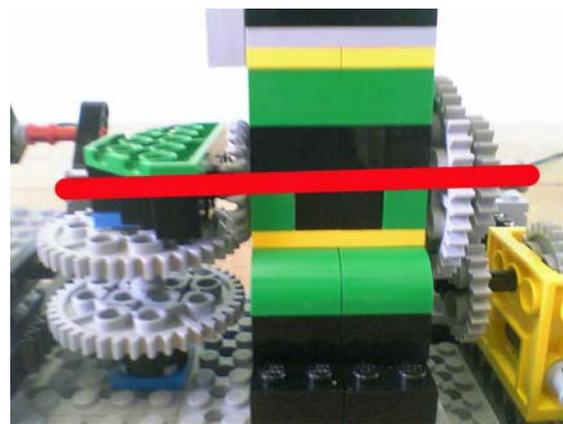


図 7

図 7 は改造し終わった後のものであるが、改造前の図がなかったためこれを用いて説明する。

改造 4 を行う前、2.3.2.においてギアの固定をした時に、船体横の柱を貫く形でシャフト(図の太線部分)を設置していたため、これを利用すれば、柱の内側にあるギアを外側のギアの回転を用いることによって回転させるのが可能であることに気が付いた。

次に、この機構の詳細を内側と外側に分けて説明する。

内側 外側から力をうけて、図 7 でいえば縦方向の回転を、横方向の回転に置き換えて船体に伝えることが目的となる。そこで用いられるものが、図 8 のかさ歯車と呼ばれるギアである。



図8 かさ歯車

説明：円すい状の面に歯を取り付けたギアであり、主に直交した2軸の間の動力伝達に使われる。

かさ歯車で回転方向をかえれば、それをピニオンとかみ合わせれば内側は完成となる。

外側 外側は、変速を行う部分である。

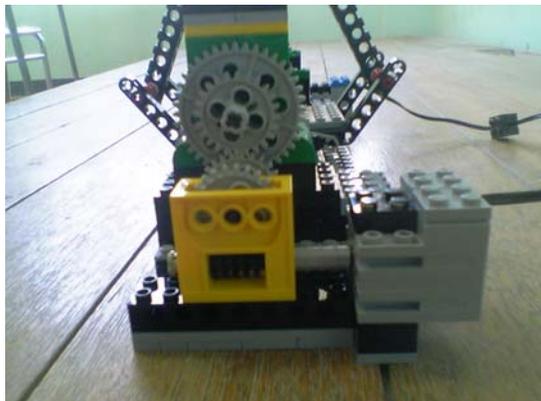


図9

変速を行うにあたって 2.3.1.の通り 2 通りの方法があるが、この時はコンパクトさと単純さを考えてウォームギアを使用することにした。構造は図6と図9を比較するとわかる通り、「モーター→ウォームギア→24 歯ギア→シャフト」の順で繋がっている(40 歯ギアも見えるが、実際これは使われていない)。

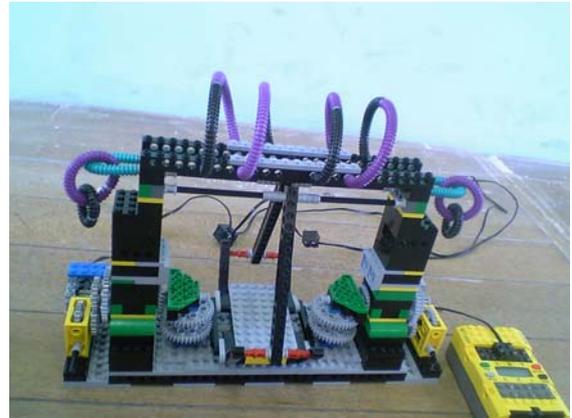
全体 次に、動力部分の機構全体での変速の割合を数式で表す。

モーターから出力される動力を1とすると、ウォームギアでの減速率は 2.3.1.のように $1/a$ (a は歯数)なので、今回ウォームギアに用いたギアは歯数 24 より、減速率 $1/24$ であることがわかる。次にシャフトで繋がった円の 24 歯ギアと 24 歯のかさ歯車の部分では歯数が等しいため変速は起こらず、図6において内側にある平行な2枚の40歯ギアは歯数が等しいため変速は起こらない。従って、全体の動

力減速率は $1/20$ であることがわかる。

この改造によって、図6にある、ピニオンとして使用するギアは2枚重ねる必要はなくなったため、実際ラックと接しているのは1枚のみである。

以上の工程によって、LEGO を用いてバイキングの機構を再現した。

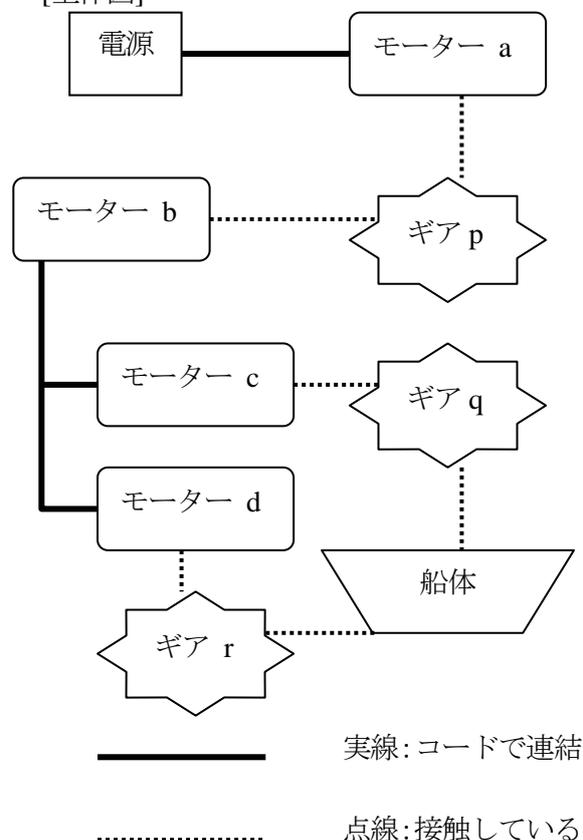


完成したバイキングの機構

3. 考察

3.1. ギアの回転数調節1におけるエネルギー変換についての考察

[全体図]



[この機構の目的]

2.2.1.に記述したように、既に固定されているモーターcに変換されたエネルギーを供給するために考えられた機構である。電源とモーターcの間の、モーターaからモーターbまでがそのエネルギー変換部となっている。本体とは離れたギアpの部分で回転数を自在に変換させることが可能なので、船体の動く速度を変えたい時に本体を改造しなくてもよいのが利点と言える。

[症状]

モーターaが回転させるのに十分な電力供給を行っているにもかかわらず、船体が動かない。

[考察]

記号を図のように設定、また、電源～モーターa間のコードをA、モーターb～モーターc間のコードをBとし、その長さを|A| |B|と表すとする。ギアq、ギアrはピニオンのことである。

考えられる原因がいくつか挙げられるので、それぞれについて考察してみる。ちなみに、「電源→モーターa→ギアq→船体」の時は、船体を動かすことができた。

(1) ギアが原因

ギアとギアの間には摩擦が生まれるものであり、またギアの軸とそれを支える部分にも摩擦は発生する。よって、多くのギアを使用するギアq部においては多くの摩擦が発生していると思われる。ギアの軸とそれを支える部分に発生する摩擦については、軸について考えた時に、軸が右回転した時その力をF、その回転を阻止しようとする方向の動摩擦力をf、動摩擦係数を μ 、軸を支える部分からの軸への垂直抗力をNとすると、 $F > f = \mu N$ の式を得ることができるが、それぞれの変数を数字に置き換えることは、今回は不可能であると思われる。ギアとギアの間働く摩擦力は1つの山同士においてもあらゆる位置からあらゆる方向に働き図化するの難しいため、式で表すことも難しいと思われる。

(2) モーターのエネルギー変換効率が原因

実際にモーターを回転させてみると音がするように、電力→回転でも、回転→電力でも、エネルギーを変換する場合にはロスが生

じていることが確認できる。どの程度のロスがあるかを確かめるための実験方法として、モーターとモーターをコードで繋ぎ、片方のモーターを手で360度回した時にもう片方のモーターが何度回転するかという目視による計測方法がある。Webサイト「LEGO Technic MINDSTORMS」を参照すると、先の実験方法と同じ方法で実験しており、「一方を360度回せば、他方もほぼ360度回転し、左右に何度も回してみても10度ぐらいのズレにしかない」とある。具体的な数字を見つけることはできなかったが、モーターの高性能性が確認できた。さて、今回の場合、並列部を無視して考えると、回路にモーターを3個使用していることになる。モーター1個のエネルギー変換率を $\alpha\%$ ($0 \leq \alpha \leq 100$) とすると、
モーター1個の場合： $\alpha / 100 \times 100\%$
モーター2個の場合： $(\alpha / 100)^2 \times 100\%$
モーター3個の場合： $(\alpha / 100)^3 \times 100\%$
よって今回のモーター部分によるエネルギー変換率は $\alpha^3 / 100^2\%$ とわかる。ちなみに、モーターn個として一般化すると、 $(\alpha / 100)^n \times 100 = \alpha^n / 100^{n-1}\%$ (nは自然数)となる。

(3) コードの抵抗が原因

一応これも考えられるのだが、コードは電流が流れやすいように設計してあるために、この抵抗でのエネルギーロスは①や②に比べれば十分に小さいと思われるので今回は無視することにする。

以上の原因が挙げられるが、結局具体的な数値を調べることはできなかった。だが、この考察を通して、個々に原因を調べることで1つ1つには大きなエネルギーロスがないことが判明した。これより、船体の部分、即ちラック・ピニオン機構のあたりに問題があることが推測される。この機構自体は他のギア構造と摩擦の大きさは大差ないのだが、船体が重くなる程ラック・ピニオン機構によって船体の位置を上昇させるために必要な力は大きくなると考えられる(重い振り子を水平方向に押し、垂直方向の位置を動かそうとしているのと同じである)。

これらを総合して考えると、結局は船体が重過ぎるのではないかという結論が浮上する。具体的に言えば、あといくらか船体を重くす

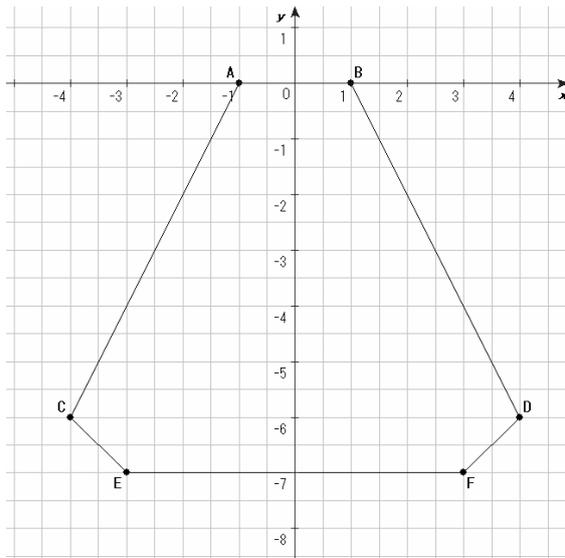
ることで、完成した今のバイキングも船体は動かなくなるという推測に繋げることが可能である。

3.2. 船体の描く軌跡についての考察

特に註のない場合、用いる画像は「Function View Ver 5.55a」により作成したものである。

3.2.1. 問題提起

船体を柱からの向きで模式的に見ると、自然状態では以下ようになる。



自然状態での船体模式図 (☆)

ここで、A 及び B は軸であり固定。C, D, E, F は xy 平面上を一定の法則に従って動くが、機構に用いたパーツの特徴により、線分 $AC =$ 線分 $BD =$ 定数 k かつ四角形 $CEFD$ は常に合同。

軸や船体の質量を考えない場合に、 CD の中点 M の描く軌跡について考える。軸と船体との接触などにより、実際の船体の可動範囲はその一部になると考えられるが、ここではそういった物理的制約を考慮しない。

中点 M の描く軌跡について、以下のように考えて求める。

xy 平面上の 2 円

$$P: (x+a)^2 + (y-b)^2 = k^2$$

$$Q: (x-a)^2 + (y-b)^2 = k^2$$

について、円 P の円周上の点を C 、円 Q の円周上の点を D とおく。線分 CD が常に定数 n をとるように、 C, D がそれぞれ円周上を動くとする。このとき線分 CD の中点 M の描く軌跡の方程式を求める。

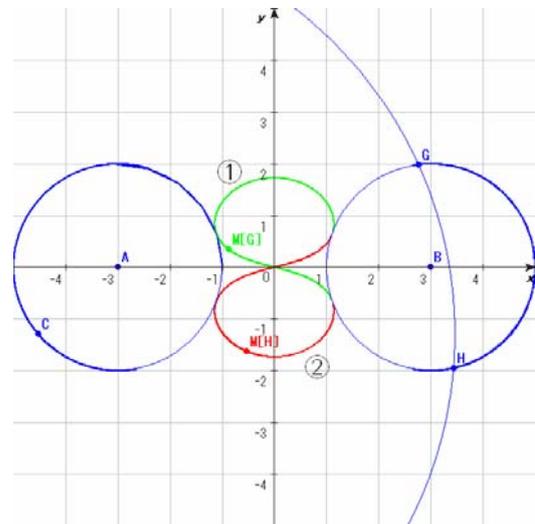
3.2.2. 指針 1

軌跡の特徴をつかみ、既に一般化されている曲線と比較する。

a, k, n に正の値を与え、「Function View Ver 5.55a」を以って中点 M の描く軌跡を表した。

(1) 中点の軌跡 (その 1)

$a=3, k=2, n=8$ とおいた場合について、次のような軌跡が得られた。ただし G, H に関して、 y 座標の値が大きい方を G 、小さい方を H とする。また、 CG の中点を $M[G]$ 、 CH の中点を $M[H]$ とする。図の①は $M[G]$ 、②は $M[H]$ の描く軌跡である。よって、①と②をあわせたものが中点 M の描く軌跡の全体である。

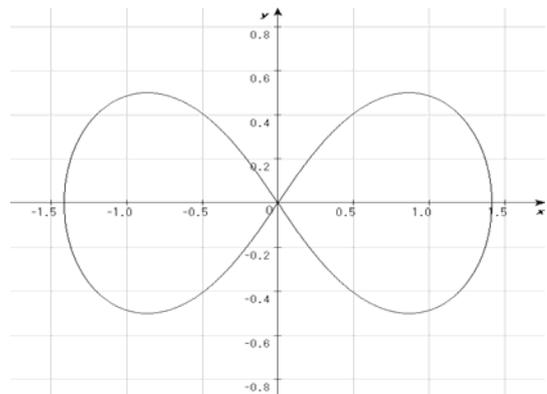


①及び②が CD の中点 M の描く軌跡

形から、これはカッシーニの卵形線の特例であるレムニスケートかと思われた。

レムニスケートについて

レムニスケートは直交座標において、次のような式で表される: $(x^2 + y^2)^2 - 2a^2(x^2 - y^2) = 0$



$(x^2 + y^2)^2 - 2a^2(x^2 - y^2) = 0$ のグラフ

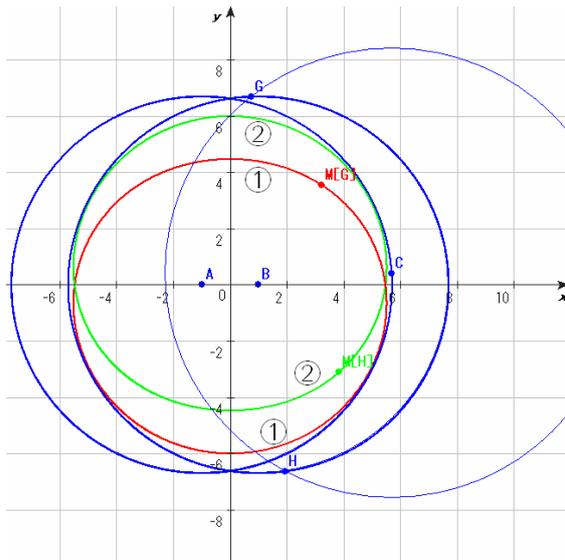
$a = 1$ のときのレムニスケートは前頁の
 ようなグラフになる。

(2) 中点の軌跡 (その2)

条件をかえ、さらにグラフで表してみた。

$a = 1, k = 3\sqrt{5}, n = 8$ とおいた場合について、

次のような軌跡が得られた。これは先の、「自然状態での船体模式図(☆)」で用いた数値である。



①及び②が CD の中点 M の描く軌跡

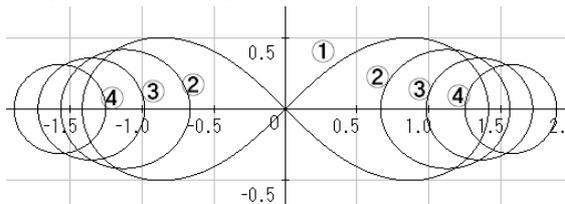
$a = 3, k = 2, n = 8$ とおいた場合について、カッシーニの卵形線の特殊形であるレムニスケートのような軌跡が得られた。故に、今回もカッシーニの卵形線が得られるかと思われた。しかし、2つのループが重なり合っているこの形は、カッシーニの卵形線には見られない形である。

カッシーニの卵形線について

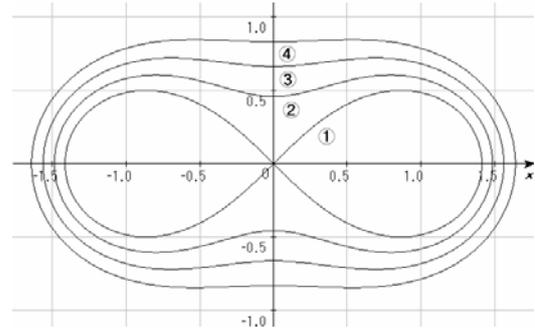
カッシーニの卵形線は直交座標において次のような式で表される。

$$(x^2 + y^2)^2 - 2b^2(x^2 - y^2) - (a^4 - b^4) = 0$$

a, b の値により、次のようなグラフになる。



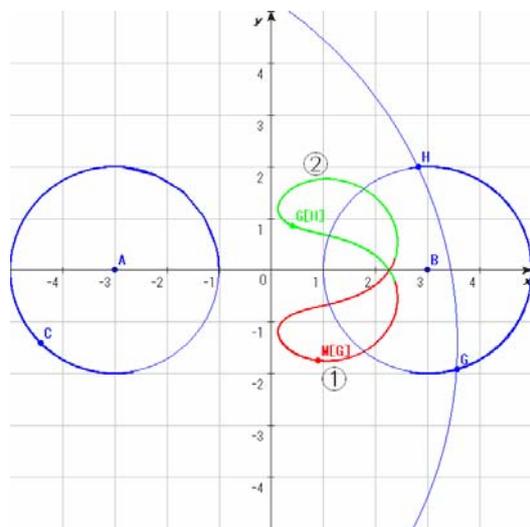
- ① $a = 1, b = 1$ ② $a = 1, b = 1.2$
 ③ $a = 1, b = 1.4$ ④ $a = 1, b = 1.6$



- ① $a = 1, b = 1$ ② $a = 1.1, b = 1$
 ③ $a = 1.2, b = 1$ ④ $a = 1.3, b = 1$

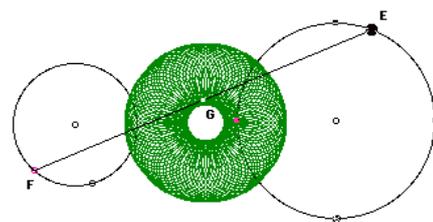
(3) 内分点の軌跡

「CD の中点 M」を、「CD を 2:1 に内分する点 M」として置き換えてグラフを描いてみた。どのように変形するか読み取ることで、何か手がかりが得られると考えた。



①及び②が CD を 2:1 に内分する点 M の描く軌跡

これは明らかにカッシーニの卵形線とは別種の曲線であるように見える。ここで軌跡の視覚的な特徴からの解析について、行き詰ってしまった。余談になるが、船体の描く軌跡を調べているうちに2円の円周上の自由点の中点の軌跡は次のようになることが分かった。



2円の円周上の自由点の中点の軌跡

所謂ドーナツ状の軌跡となっている。求める方程式は、これに「線分 CD(上図においては EF)が常に定数 n をとるように」という条件を付加したものである。

3.2.3. 指針 2

ここでは、問題を解き、数式を求める。先で提起した問題について解き、軌跡の式を一般化させようとした。線分 CD は常に定数 n をとるので、点 C を中心とした半径 n の円と円 Q との共有点 G, H が D となる。しかし、ここで D は C により解が 1 つに定まらないので、D から C への写像として表すことができない。逆に C から D への写像として表すこともできない。さらに C も D も陰関数の集合であり、それらの中点の描く軌跡を方程式として導くのが非常に難解であった。

しかし、学友である越川氏の助言を元に軌跡を求めることに成功した。

その助言とは、「CD と M の式をそれぞれ和積で変形させ、CD に M を代入させる」というものだった。こう書いてしまえば単純に見えてしまうが、なるほど、全くその通りである。貴重な時間を割いて助力をして頂いた彼にはこの場を借りて感謝の意を表したい。

それでは長くなってしまったが、軌跡の方程式を求めたいと思う。

$$A(-a, 0), B(a, 0), M(x, y)$$

$$C(-a + k \cos \alpha, k \sin \alpha) \quad (0 \leq \alpha < 2\pi)$$

$$D(a + k \cos \beta, k \sin \beta) \quad (0 \leq \beta < 2\pi) \quad \text{とおく。}$$

また、 $\omega = \frac{\alpha + \beta}{2}$, $\theta = \frac{\alpha - \beta}{2}$ とする。

$$x = \frac{1}{2}(k \cos \alpha + k \cos \beta) = k \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2} \\ = k \cos \omega \cos \theta$$

$$y = \frac{1}{2}(k \sin \alpha + k \sin \beta) = k \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2} \\ = k \sin \omega \cos \theta$$

線分 CD について、

$$n^2 = (k \sin \alpha - k \sin \beta)^2 + (2a - k \cos \alpha + k \cos \beta)^2 \\ = \left(2k \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2} \right)^2$$

$$+ \left(2a + 2k \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2} \right)^2$$

$$= (2k \cos \omega \sin \theta)^2 + (2a + 2k \sin \omega \sin \theta)^2$$

$$\therefore \left(\frac{n}{2} \right)^2 = (k \cos \omega \sin \theta)^2 + (a + k \sin \omega \sin \theta)^2$$

これについて、 $M(x, y)$ を代入すると、

$$\left(\frac{n}{2} \right)^2 = (k \cos \omega \sin \theta)^2 + (a + k \sin \omega \sin \theta)^2 \\ = \left(x \frac{\sin \theta}{\cos \theta} \right)^2 + \left(a + y \frac{\sin \theta}{\cos \theta} \right)^2$$

ここで、 $M(x, y)$ より

$$x^2 + y^2 = k^2 \cos^2 \theta (\cos^2 \omega + \sin^2 \omega) = k^2 \cos^2 \theta$$

$$\therefore \cos \theta = \pm \sqrt{\frac{x^2 + y^2}{k^2}} \quad \text{であり、また、}$$

$$\sin \theta = \pm \sqrt{1 - \cos^2 \theta} = \pm \sqrt{1 - \frac{x^2 + y^2}{k^2}} \\ = \pm \sqrt{\frac{k^2 - x^2 - y^2}{k^2}}$$

となるので、

$$\frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \frac{\pm \sqrt{\frac{k^2 - x^2 - y^2}{k^2}}}{\pm \sqrt{\frac{x^2 + y^2}{k^2}}} = \pm \sqrt{\frac{k^2 - x^2 - y^2}{x^2 + y^2}}$$

$$\text{よって、} f(x, y) = \pm \sqrt{\frac{k^2 - x^2 - y^2}{x^2 + y^2}} \quad \text{とすると、}$$

$$\left(\frac{n}{2} \right)^2 = \left(x \frac{\sin \theta}{\cos \theta} \right)^2 + \left(a + y \frac{\sin \theta}{\cos \theta} \right)^2 \\ = \{xf(x, y)\}^2 + \{a + yf(x, y)\}^2$$

となるので、

$$\left(\frac{n}{2} \right)^2 = \{xf(x, y)\}^2 + \{a + yf(x, y)\}^2$$

$$\text{ただし、} f(x, y) = \pm \sqrt{\frac{k^2 - x^2 - y^2}{x^2 + y^2}}$$

これが求める中点 $M(x, y)$ の軌跡である。

4. 感想

4.1. 小松の感想

機構作りをする。初めは非常に漠然とした

ものだった。再現するアトラクションを決めたものの、どのようにすれば再現できるか見当が付かなかったからである。全員に LEGO が配られ、中には様々な種類の部品が入っていた。しかし、多くの部品があったにも拘らず、有効的な使い方が分からなかったのと思うように機構作りは進まなかった。

そうしていると、松寄先生が「KMODDL」という Web サイトを紹介して下さった。英語で書かれていたが、機構の作り方や、その働きについてのヒントを得るには十分であった。

これにより、色々とアイデアが浮かんできた。試行錯誤を繰り返しながら、少しずつ機構が作られていった。1 からものを作るのは難しいことではあったが、やりがいのあることだった。

また、今回は佐和と組んで機構作りをしたのだが、それによって得られたことも多かった。同じ動きをさせるためであるのに、自分とは全く違った視点から機構作りを考えているので、その差に驚きながらもとても面白く感じた。

最終的に機構を作り上げたことには満足で、達成感があった。反面、使わなかった部品を有効に使うことができればより良いものが作れたのではないかと、という一抹の未練が残った。

考察では、関心を惹く様々な曲線を知ることができたので非常に有益であった。一度は断念した軌跡の方程式も無事に求まり安心した。

4.2. 佐和の感想

ゼミとして1年間取り組んできたが、まさかここまで発展して考えられるような機構を LEGO で再現できるとは思わなかった。今回の考察部では、数学というより物理的な思考で進めたような気がするが、いずれにせよ、実際に自分で製作したものを数学や物理の知識を用いて考えるというのは貴重な体験であったと思う。

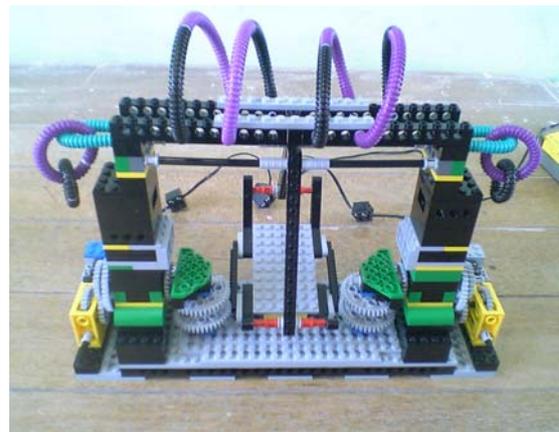
註

以下の節は小松が担当した。

1.1., 1.3., 2.1., 2.2.2., 2.3.2, 3.2, 4.1.

以下の節は佐和が担当した。

1.2., 1.4., 2.2., 2.2.1., 2.3.1., 2.4, 3.1., 4.2.



謝辞

この論文をまとめるにあたり、松寄先生、町田先生に丁寧な御指導を賜りました。また、江口氏、越川氏には貴重な御意見を頂きました。厚く御礼を申し上げます。

参考文献及び参考 Web サイト

- <<http://drkssk.fc2web.com/zekkyou/rusutsu/rusupark/rusupark.html>> [2007, March 29]
- <<http://ja.wikipedia.org/wiki/Category:%E6%9B%B2%E7%B7%9A>>カテゴリ内の37のページ全て [2007, March 30]
- <<http://ja.wikipedia.org/wiki/%E3%83%AC%E3%83%A0%E3%83%8B%E3%82%B9%E3%82%B1%E3%83%BC%E3%83%88>> [2007, April 1]
- <<http://ja.wikipedia.org/wiki/%E3%82%AB%E3%83%83%E3%82%B7%E3%83%BC%E3%83%8B%E3%81%AE%E5%8D%B5%E5%BD%A2%E7%B7%9A>> [2007, April 1]
- <<http://www.shiojiri.ne.jp/~kensuu/develop/gsprom/en2chu.html>> [2007, March 31]
- <[http://ja.wikipedia.org/wiki/歯車](http://ja.wikipedia.org/wiki/%E3%83%8B%E3%81%AE%E5%8D%B5%E5%BD%A2%E7%B7%9A)> [2007, March 30]
- <<http://kmoddl.library.cornell.edu/model.php?m=578>> [2007, March 30]
- <[http://ja.wikipedia.org/wiki/ウォームギヤ](http://ja.wikipedia.org/wiki/%E3%83%8B%E3%81%AE%E5%8D%B5%E5%BD%A2%E7%B7%9A)> [2007, March 30]
- <<http://kmoddl.library.cornell.edu/model.php?m=574>> [2007, March 30]
- <<http://www.geocities.co.jp/Technopolis/1549/lego.htm>> [2007, March 30]
- <<http://robot.watch.impress.co.jp/cda/column/2006/11/24/265.html>> [2007, March 30]
- <<http://www.gear-net.com/basic/kind-j.html>> [2007, March 30]

ⁱ<<http://drkssk.fc2web.com/zekkyou/rusutsu/rusupark/rusupark.html>> [2007, March 29]より引用。