出典：文部科学省スーパーサイエンスハイスクール開発指定研究
2007年度（56期生）テーマ研究論文集、発行：筑波大学附属駒場高等学校数学科、pp.92-97、2008年3月

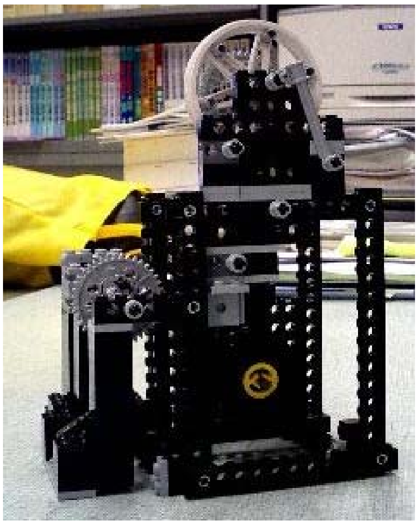
振り子時計と数学

多和田敬介

１．はじめに

数学ゼミでは「LEGO で実現する世界と数学の世界」をテーマに，LEGO による機構作成を行った。その中で私は「振り子時計」を作成した。まず「振り子時計」の仕組みについて詳しく説明した後，テーマに沿って，その仕組み自体や仕組みから生み出される動きの性質を明らかにしていく。あわせて，実際の振り子時計の仕組みについても触れていく。

最初「観覧車」をつくっていたが，それだと仕組みが単純すぎて面白みに欠けると思い，観覧車をつくるのをやめた。その後，何をつくろうかと考えていたところ，たまたま，振り子時計の仕組みが紹介されているのを見つけ，振り子時計をつくることにした(紹介されていた Web ページ，内容については４．に記述)。振り子時計の作成に決めた理由は，その紹介されている仕組みがとても面白かったからである。このレポートを読んでその面白さが伝えることができればいいと思う。

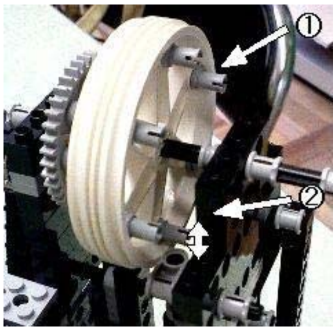


２．仕組み

作成した振り子時計は大きく分けて 4 つの部分からできている。ベルト部，歯車部，振り子部，振り子補助部の 4 つである。この中で 1 番重要なのは，3 つ目の振り子部で，これが時計の動きをつくり出し，つくる上で最も工夫したところである。ここではわかりやすいように，全体の大まかな仕組みを示した後，モーターに連動して動いていく順に詳しく説明していく。

2.1. 全体

作成した振り子時計は 2 つの動作の組み合わせることによって時計の動きを生み出す。1 つは，「モーター」→「ベルト部」→「歯車部」までの動きで，針を回転させる役割を持っている。もう 1 つは,「モーター」→「振り子補助部」→「振り子部」までの動きで，針を一時的に止める脱進機(Escapement)の役割を持っている。この 2 つによって，動く→止まる→動くという時計の動きが生まれる。ちなみにモーターは別々に 2 つ使っている。

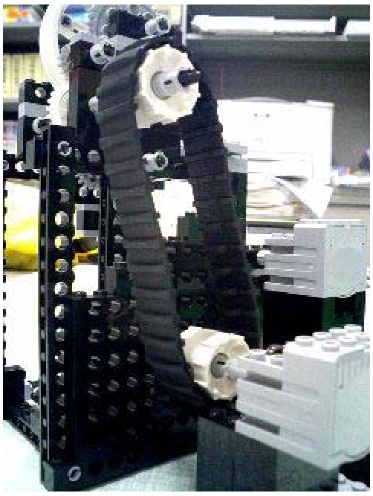


① モーターで車輪が回る。
② 振り子が振れるとストッパーが上下する。ストッパーが上がっている時は車輪の歯に引っかかって針の動きが止まり，逆に下がっているときは針が動く。

2.2. ベルト部

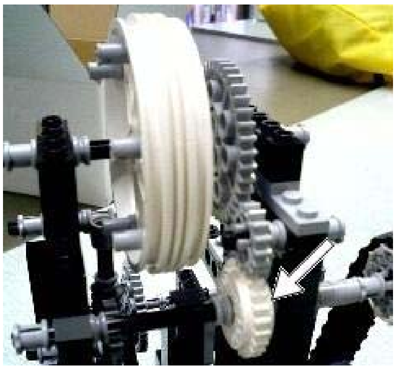
この部分はモーターの回転を歯車のある高い位置に伝えるためのものである。仕組みは至って単純で，2 つの車輪をベルトでつなぎ，片方の車輪が回れば，回転がベルトで伝わってもう片方の車輪も回るという仕組みである。ベルト部はもともと観覧車で使われていたパーツだったが，モーターを高い位置につけると安定しなくなるという理由で振り子時計でも使うことにした。

出典：文部科学省スーパーサイエンスハイスクール開発指定研究
2007年度（56期生）テーマ研究論文集、発行：筑波大学附属駒場高等学校数学科、pp.92-97、2008年3月

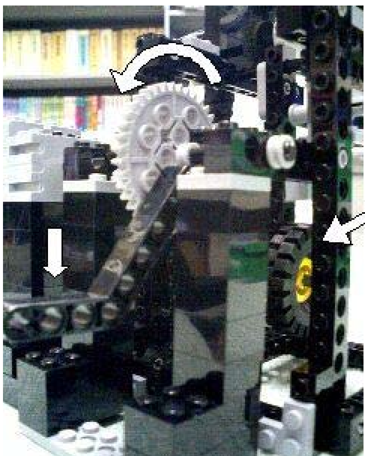


2.3. 歯車部

歯車を組み合わせて，軸や回転数を変える部分。1 番大きな車輪には歯がついていて，これが後に説明する脱進機と噛み合って時計の動きを生み出す。更に，矢印(下の写真中)のついた歯車も重要な役割を果たしている。これは一定以上の負担がかかると空回りする仕組みになっていて，大きな車輪が脱進機と噛み合ったときに生じるモーターへの負担を軽くすることができるようになっている。



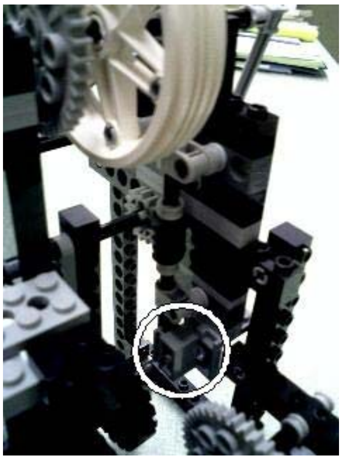
2.4. 振り子補助部



実際の振り子時計にはこのようなこのようなものはないのだけれども，LEGO でつくるとなると摩擦で振り子が止まってしまうため，止まらないようにする仕組みとして使っている。仕組みは，棒状のパーツが回転して振り子を持ち上げるというものである。

2.5. 振り子部

振り子が振れると，脱進機と呼ばれるストッパー部分が上下する。ストッパーが，上がっているときには，歯車部で説明した大きな車輪の歯に引っかかり，針の動きをとめる。ストッパーが下がっているときには，歯から外れ，針が動く。



振り子がついている軸には，歯車もいっしょに付いていて，その歯車が回ることによって振り子の運動をストッパーの上下運動に変える仕組みになっている。

この部分が狂うと,針が動く間隔が狂い，時計としての役割を果たさなくなる。そのため，この部分は正確に動くように工夫する必要があった。たとえば，ストッパーは歯車によって動いているわけだが，ストッパー側の歯がねじ状になっているため，何回か動かすとストッパーが軸を中心に回転して,ストッパーの位置が変わってしまう。そこで，レール上のパーツを使用して棒の回転を抑えた(写真中の〇部分)。

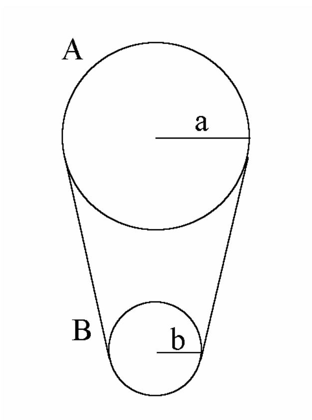
３．数学的性質

数学ゼミのテーマの「LEGO で実現する世界と数学の世界」に沿って，作成した振り子時計の数学的性質について調べていく。

3.1. ベルト

ベルト部は，2 つの車輪をベルトでつないだものであるが，このとき二車輪の回転数の比は車輪の半径の逆比になる。

出典：文部科学省スーパーサイエンスハイスクール開発指定研究
2007年度（56期生）テーマ研究論文集、発行：筑波大学附属駒場高等学校数学科、pp.92-97、2008年3月



右図のように2つの車輪A，Bの半径を a，b とする。車輪Bが1回転したときに動くベルトの長さは車輪Bの円周の長さ $2\pi b$ で，それによって車輪Aも同じ長さ $2\pi b$ の分だけ動かされる。このとき動いた角度は，

$$\pi\times\frac{2\pi\,b}{2\pi\,a}=\pi\times\frac{b}{a}$$

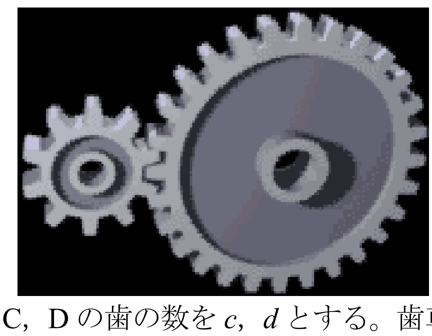
となる。車輪A，Bの回った角度の比は

$$\pi\times\frac{b}{a}\ :\pi=b:a\quad \cdots(＊)$$

である。ここで知りたいのは回転数の比であるが，回転数とは「単位時間あたりにどれだけ回転するか」ということなので，回転数の比は(＊)と同じ $b:a$ となる。以上より，半径の比が $a:b$ の2つの車輪をつかった場合，回転数の比は $b:a$ となるということがわかる。

3.2. 歯車

歯車もベルトと同様に，2つのギアの回転数の比はギアの歯の逆比になる。



歯車C，Dの歯の数を c，d とする。歯車Cが1回転すると，歯車Dも歯 c 本分回転する。このときの回転した角度は，

$$\pi\times\frac{2\pi c}{2\pi d}=\pi\times\frac{c}{d}$$

である。よって，2つの歯車が回転した角度の比は，

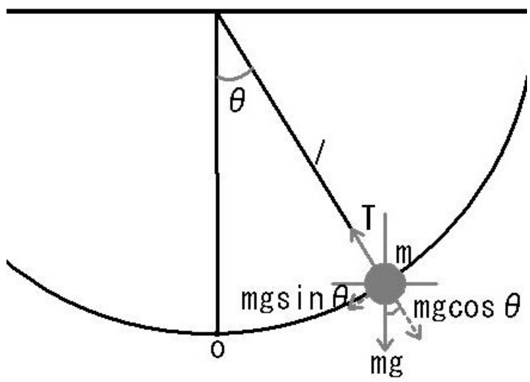
$$\pi:\pi\times\frac{c}{d}=d:c$$

となる。ベルトのときと同様に，この比はそのまま回転数の比に対応するので，歯の本数がc：dの歯車2つを組み合わせると，その2つ歯車の回転数は $d:c$ になる。

今回作成した振り子時計の歯車部は，歯の数が40と24の歯車を組み合わせたものだったので, 最後(1番大きい車輪)の回転数は最初(モーター)の 0.6 倍になっているということがわかった。

3.3. 振り子

振り子時計の主要な部分である振り子は，物理で言うところの単振り子の運動をする。単振り子は振り子の動く軌道を軸とすることで単振動とみなし，周期を求めることができる。



長さ l の軽い糸つながれた重さ m の物体が振り子の運動をしたとして，周期について考える。ただし，重力加速度を g とする。

まず，軸を設定する。物体は糸の固定されたほうの端を中心とした円周上を動くことになるが，振り子のつりあいの位置を原点Oとして，円周に沿って右向きに x 軸をとる。そうすると，物体の運動は x 軸上の1元的な運動，つまりここでは単振動とみなすことができる。次に物体についての運動方程式を立てる。物体に働いている力は重力 mg と糸の張力の2つであるが，そのうち糸の張力と重力の円周への法線方向の力は，物体の運動を円周上に拘束する役割を果たしている。糸の鉛直方向となす角が θ のとき, x 軸上で働く力は重力の円周の接線方向の力 $mg\sin\theta$ なので,

$$\mathrm{F}=-mg\sin\theta$$

となる。物体の加速度を x 軸の正の方向に a とすると，運動方程式は

出典：文部科学省スーパーサイエンスハイスクール開発指定研究
2007年度（56期生）テーマ研究論文集、発行：筑波大学附属駒場高等学校数学科、pp.92-97、2008年3月

$$ma = -mg\sin\theta$$

である。また θ が微小のときに成り立つ式

$$\sin\theta \fallingdotseq \theta \fallingdotseq \tan\theta \quad \cdots\cdots(*)$$

と　$x = l\theta,\ \theta = \dfrac{x}{l}$

を上の運動方程式に代入すると，

$$ma = -mg\sin\theta = -mg\,\theta = -\frac{mgx}{l}$$

$$\therefore\ ma = -\frac{mg}{l}\times x$$

と表せる。単振動は合力が $-kx$ となるものであるから，この式からも振り子の運動が単振動をしているということがわかる。運動方程式 $ma = -kx$ が成り立つとき，その周期 T は

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$

となるので，単振り子のときは k に $\dfrac{mg}{l}$ を代入して，

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$

となる。

今回作成した振り子では，振り子の長さは 8 cm だった。π を 3.14，g を 9.8 とすると，上の式に当てはめて，

$$T = 2\times3.14\times\sqrt{\frac{0.08}{9.8}} \fallingdotseq 0.57[\mathrm{s}]$$

と求まる。しかし，この値は糸の長さ l に大して θ が十分に成り立つ式に当てはめたものなので，振れ幅が大きいときは異なった値をとる(実際値の方が長い)。そこで作成したもので実際に振れ幅 30° にして計ってみたところ，約 0.45 [s]だった。振れ幅が大きいという理由と摩擦があるというで，もう少し大きくなると思っていたが，その通りの結果は得られなかった。実験の精度を上げるためにはもっと長い糸を使用し，振れ幅を小さくしなければならなかった。

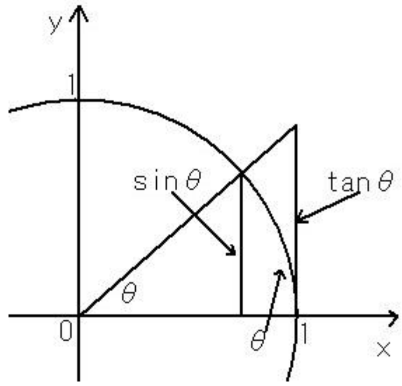
時計ということで，周期 T を 1 [s]にしたい場合，糸の長さ l は $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{l}{g}}$

$$1 = 2\pi\times\sqrt{\frac{l}{g}}$$

$$1 = 1^2\times\frac{g}{4\pi^2} \fallingdotseq 0.25\ [\mathrm{m}] = 25\ [\mathrm{cm}]$$

で，振れ幅を十分に小さくする必要がある。

(＊) $\sin\theta \fallingdotseq \theta \fallingdotseq \tan\theta$ の近似式について，この近似は単位円で考えるとわかりやすい。



$\sin\theta$，θ，$\tan\theta$ は図形的に表すと上図のようになる。このとき，θ を微小にすると，3 本の線がほとんど等しい長さになることがわかる。

よって，θ が微小のとき，$\sin\theta \fallingdotseq \theta \fallingdotseq \tan\theta$ が成り立つ。

3.4. ストッパー

振り子と連動するストッパーの位置は cos 関数で表せる。これは，振り子の位置が cos 関数で表せるためである。ストッパーの位置を表すために，まず振り子を右向きに 30° 傾けた位置から放したときの振り子の位置を式で表してみる。

3.3.で示したように振り子の運動を単振動として式を出す。単振動の位置の式は，

$x = A\cos\omega t$　(A は振幅，ω は角振動数)

と表すことができる。30° 傾けたときの振幅 A は $8\,\mathrm{cm}\times\dfrac{\pi}{6}$ である。また，角振動数 ω は $\omega T = 2\pi$ という式で表せるので，3.3.で求めた式とあわせて，

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{l}}$$

出典：文部科学省スーパーサイエンスハイスクール開発指定研究
2007年度（56期生）テーマ研究論文集、発行：筑波大学附属駒場高等学校数学科、pp.92-97、2008年3月

となる。よって，振り子の位置の式は

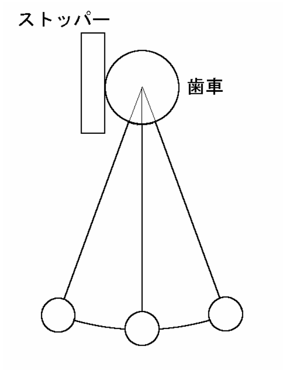
$$x=\frac{0.04\times\pi}{3}\times\cos t\sqrt{\frac{g}{l}}$$

$$=0.04\times\frac{3.14}{3}\times\cos t\sqrt{\frac{9.8}{0.08}}$$

$$=0.042\cos 0.28t\ [\mathrm{m}]$$

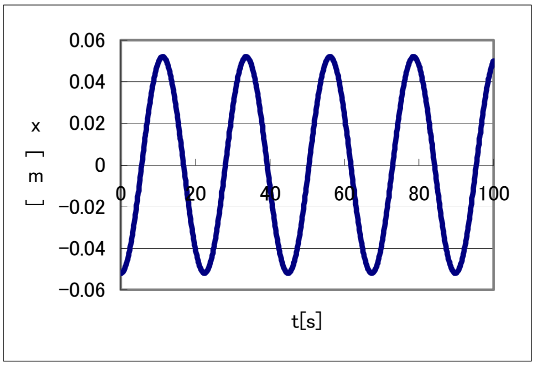
と表せる。

次に考えるのが，振り子の位置とストッパーの関係である。周期 T はストッパーと振り子で変わらないが，振幅は異なる値をとる。右図のように振り子が動いたとき，ストッパーは歯車の動いた円周分だけ動くことになる。つまり，振り子の半径と歯車の半径との関係を求めればよいことになる。



実際に計ってみたところ，振り子の半径は 8 cm，歯車の半径は 1cm だったので，ストッパーの振幅は振り子は8分の1になる。さらに物体が1番右にあるときが1番低く，左にあるときが 1 番高くなるのでマイナスがつく。よって，式は $x=-0.0052\cos 0.28\,t$ と求まる。

これをグラフに表すと下図のようになる。

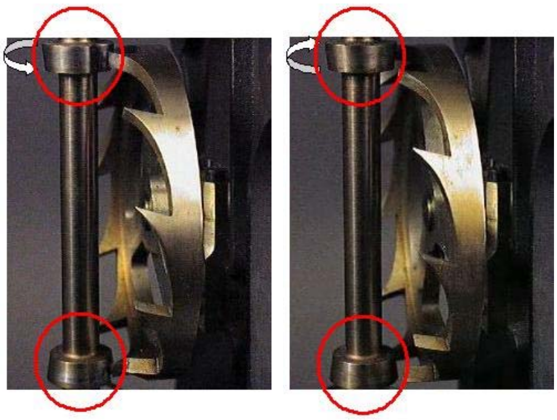


４．その他の振り子時計の仕組み

LEGO で振り子時計をつくることに決める原因となった「K-MODDLE（Kinematic Models Design for Digital Library）」というサイトで紹介されている振り子時計の仕組みを紹介する。振り子時計の仕組みといっても特色があるのは脱進機(Escapement)とよばれる，針を止めたり，進めたりする部分だけなので，その部分について紹介することになる。今回作成したものはその仕組みをもとに作成したものである。それでは，何種類かある機構の中から特に参考になったものを 2 つ紹介する。

4.1. Verge and Foliot Escapement

これは振り子ではなく，ばねを使ったものである。ばねによって輪の前にある棒が右周りと左周りの運動を繰り返し，その棒についた 2 つの円状の物体が脱進機の役割を果たす。円状の物質には扇形の溝がはいっている。この 2 つの物体は輪についている歯に引っかかったり，放したりして時計の動きを生み出すが，この機構のうまくできているところは，2 つの物体がよいタイミングで止めるのと動かすのを交互に行っているところである。



この図は，脱進機を横から見たものの拡大図である。このとき歯車は手前から奥へと回転しているのだが，その回転を先程の 2 つの物体(○のついた部分)がとめたり，動かしたりしている。まず，左の図を見ても

出典：文部科学省スーパーサイエンスハイスクール開発指定研究
2007年度（56期生）テーマ研究論文集、発行：筑波大学附属駒場高等学校数学科、pp.92-97、2008年3月

らいたい。輪はその歯が物体の溝に入っているときは動くが，入っていないときは円周部分に引っかかって動かないようになっている。このときは左上の〇の溝に入っているので輪は回るが，そのままだと回りすぎてしまう。そこで下の物体がその円周部分で歯を止める。右の図がその止まっているときの図である。このあと歯は下の溝に入り，上の円周部分に引っかかる。この動きを繰り返して，時計の動きを生み出す。

4.2. Three-tooth Clock Escapement

この機構はその名の通り，3 枚の歯が脱進機の役割を果たす。図のように振り子の真中に特殊な形をした穴があいていて，3 枚の歯がこの穴の尖った部分に巧みに引っかかって時計の動きを生み出す。

穴の中にある左の尖った部分に 3 つの歯のひとつに引っかかる。

歯が外れ回転する。

反対側の尖った部分に引っかかる。

この 3 つパターンを繰り返して時計の動きをつくり出す。

５．おわりに

今回示してきた性質はそれほど難しいものはなかったと思います。私自身，最初はこんな簡単なことばかり書いていていいのかと思ったほどです。しかし，このことを先生に言ったところ「性質を見つけるところに意味がある。」ということを教えていただきました。確かにその通りだと感じました。学問というものはそもそもこのような発見から成り立っているものです。たとえば，ニュートンだってりんごが落ちるのを見て重力を発見したのも同じことです。どんな些細なことでもそれは重大な発見につながっているかもしれません。そして，その些細なことから発見を導くには，普段から疑問を持ち続け，発見しようという姿勢が重要だということが今回の研究でわかりました。このレポートでこのことが伝えることができれば幸いです。今回作成した振り子時計にはまだ他にも性質が隠されているかも知れません。是非見つけてみてください。

参考文献および関連 Web サイト

<http://kmoddl.library.cornell.edu/>
[2007,　April 15]
<http://ja.wikipedia.org/wiki/>
[2007,　April 15]