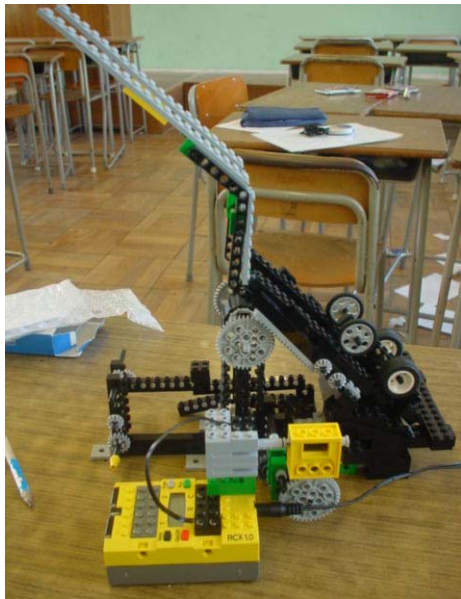


LEGO を用いたジェットコースターの 持ち上げ部分の機構の研究

川島 夢人

1. はじめに

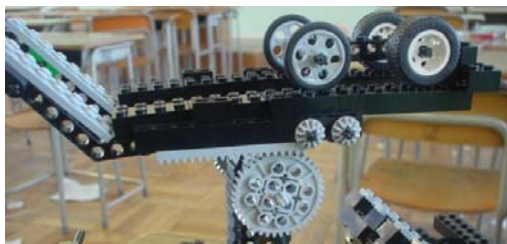
今回、ジェットコースターの最初の持ち上げ部分の機構を、LEGO を用いて製作した。その結果、下の写真のものが出来上がった。



この機構は、まずモーターが回転することで線路に直結する歯車が回転し、それに伴って線路が上昇する(下の写真参照)。



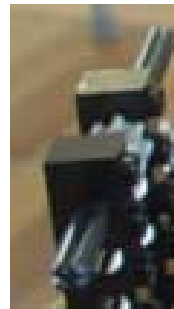
そして、線路がある程度まで上昇すると、(下の写真の状態)



線路が前へ傾き、カートが発射する(下の写真の状態)。



そして、前方の支えの部分(下の写真左参照)に線路が乗っかり、(下の写真右参照)



さらに前方にあるコースへとつながっていく。

1.1. 機械と機構の違い

まずは機械と機構の違いについて触れるべきだろう。

●「機械」の定義●

ルロー(F.Reuleaux)は、機械とは次の4つの条件を満たすものであると定義した。

1. 機械は物体の組み合わせである。
2. 機械を構成する各物体は、相対運動が可能である。
3. 機械は入力としてエネルギーを受け入れ、これを変換・伝達して有効な仕事を行う。
4. 機械を構成する物体は、入力に対して十分耐えられる強度をもつ。

●「機構」の定義●

実際の機械は、多くの条件を備えた多数の物体の組み合わせから成り立っている。その中からある物体の組み合わせを取り出し、それに対して、各部分の形や、相互の間の限定された相対運動を調べる場合は、この物体の組み合わせを機構(mechanism)と呼ぶ。

【引用文献】藤田勝久 (2004). 機械運動学—機械力学の基礎から機構動力学解析まで—. 森北出版. 1-2.

1.2. 機構製作の動機

遊園地等によく見かけるジェットコースターは、少しずつ上昇しながら最高地点へと到達してゆく。これに対し、逆にレールが動いたら面白いのではないかと、思い、製作を開始した。

今この機構を見ると、遊園地で船が大きく横に揺れるバイキングのようなアトラクションがジェットコースターの最初に来たような格好にもできそうで、あるいは可動部分の線路を歯車に固定して、そのアトラクションとジェットコースターとの融合にしたほうが面白かったかもしれない。

2. 使用した機構の紹介

今回、それほど多くの機構を使ったわけではないが、いくつかの機構は使用したので、それを紹介する。

① G01 Compound Gear Train

ギアの回転速度を緩めるために使用した機構である(右上の写真参照)。



今回製作した機構では、下の写真の場所で使用した。

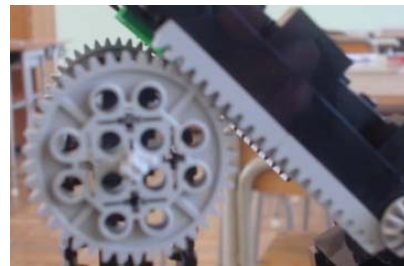


② Q01 Spur Gears Mixed-teeth Profiles

ギアの回転運動を、線路の前進上昇運動へと運動方向を変換するために使用した(下の写真参照)。



今回製作した機構では、下の写真の場所で使用した。



③ V01 Belt Drive Mechanism

運動の位置を変えるために使用した(下の写真参照)。



今回製作した機構では、下の写真の場所を使用した(実際には写真左側が上部に来る形で使用した)。



④ 線路のスライド

今回、可動式の線路をスライドさせるために、下の写真の機構を使用した。



3. コースの全長について

カートが終着点までたどり着く条件は、発車時から終着時まで常に運動エネルギーが正であること、つまり摩擦力によるエネルギーロスが初期条件でのポテンシャル(位置エネルギー)を常に下回るということである。

3.1. 摩擦について

運動中の摩擦力(動摩擦力)は、斜面からの垂直抗力に動摩擦係数をかけて得られる。今回、まず動摩擦係数を測定するために、以下の実験を行った。

3.1.1. 実験手順

- ① 今回の実験では、斜面として発車機構部分の斜面を用いた。まず、斜面の傾きが 30° になるようにした。
- ② 斜面を24 cm登ったところから、静かに(初速0で)手を離した。
- ③ 下まで来る時間をストップウォッチで計測した。
- ④ この実験を10回繰り返した。

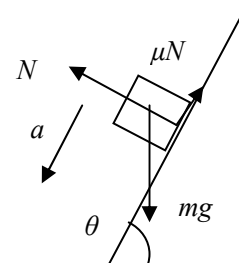
3.1.2. 実験結果

下表にまとめた。

回数 (回)	1	2	3	4	5
時間 (秒)	0.46	0.50	0.50	0.56	0.47
6	7	8	9	10	平均
0.44	0.50	0.50	0.50	0.56	0.50

3.1.3. 実験の理論的背景

この実験を簡略化して書くと下図のようになる。また、傾斜角は一般に θ としておく。垂直抗力は N とする。また、カートの質量を m 、加速度を a とする。



斜面に水平に下向きを正として x 軸、斜面に垂直に上向きに y 軸を定めると、カートの運動方程式は、束縛条件 $y=(一定)$ より、

$$x \text{ 軸方向: } ma = mg \sin \theta - \mu N$$

$$y \text{ 軸方向: } m \cdot 0 = mg \cos \theta - N$$

となる。よって、これを解いて、

$$N = mg \cos \theta, \quad a = (\sin \theta - \mu \cos \theta)g$$

となる。この実験において、初速は0だったから、進んだ距離 Δx は加速度 a と進んだ時間 t を用いて、 $\Delta x = 1/2 at^2$ と書ける。よって、 μ は Δx , t , g を用いて、

$$\mu = \tan \theta - 2 \Delta x / g t^2 \cos \theta$$

と書ける。 $g \div 9.8$ とすれば $\mu = 0.35$ となる。

3.2. コースの全長の理論値

動摩擦係数は材質により一定であり、3.1.で測定した値を用いてよい。ただし、以下の考察では、一般の値 μ を用いる。また、スタート時と終着点の高さの差は11 cmだったが、これも一般に h としておく。ここでは、コースの全長の理論的な最大値を出すことを目標とするため、終着点までの間に止まってしまうことはないものとする。

各点ごとの傾き θ に対して動摩擦力が変わってくる。この θ は x の関数で、 $\theta = \theta(x)$ 、 $\cos \theta = f(x)$ と書ける。発車時を位置 $x = 0$ 、終着点を位置 x と置くと、一般の位置 q から $q + dq$ までに失われる力学的エネルギーは $\mu mg f(q) dq$ だから、これを $x = 0$ から x まで積分したものになる。一般に解くことは一見すると不可能だが、($f(x)$ が未知関数だから) $dq \cdot f(q) = dq \cos \theta(q)$ は $x = q$ から水平に進んだときの距離に等しいので、水平方向に進んだ全道のりの長さを X と置くと、スタート時から終着点までに失われる総エネルギーは $\mu mg X$ で表される。この X の最大値を求める。

力学的エネルギー保存則より

$$mgh = 1/2 mv^2 + \mu mg X$$

が成立する。この $1/2 mv^2$ が定義される(正になる)ような X の条件は、上記の式を変形して、

$$mgh > \mu mg X \Leftrightarrow h/\mu > X$$

となる。 $h = 11 \text{ cm}$ 、 $\mu = 0.35$ より、 X の最大値は約 31.4 cm になる。

現実的には、コースの全長は理論値よりもやや短めに設計される。一例としては、高低差が 11 m になるようなジェットコースターの場合、水平方向には 30 m 動き、実際には上下にも動くので、今回の場合、コースの全長は 45 m 程度になるだろう。

4. 利用部分での回転数について

付属のモーターは、そのまま使うにはあまりにも回転数が大きいので、これを減少することを考えた。

各歯車は、基本的には自由度 1 を持ち、全体としてその個数分の自由度を持つが、他の歯車との関係(束縛条件)により、自由度が減少し、結果として歯車全体の自由度は 1 となる。つまり、この束縛により各歯車の運動状態が付属のモーターの運動状態によって規定されていることになる。

束縛条件に規定されるモーター同士の関係は、次の 2 種に分かれる。また、ウォームギアは他のモーターとは少し形態が異なり、束縛条件とは関係ないが、4.2.にて取り上げる。また、4.3.で、結果として回転

を利用する部分での回転数がどこまで押さえられたかについて記す。

4.1. モーターの回転数について

まず、モーターの回転数を調べた。50 回回転するのにかかる時間を計ったところ、結果は下表のようになった。

回数 (回)	1	2	3	4	5	平均
時間 (秒)	12.16	12.88	13.50	12.72	12.41	12.73

よって、回転数は 3.93 [回/秒] 、角速度は 24.68 [rad/秒] となる。

次に、相互作用のある 2 つの歯車同士における束縛条件を考える。

相互作用の存在する条件は、共通の軸を持つか接していることである。

共通の軸を持つ 2 つの歯車の歯の数をそれぞれ k_1 、 k_2 とし、それぞれの回転速度を v_1 、 v_2 とする。このとき、軸の角速度 ω が共通だから、歯車の回転速度は半径に比例する。歯車の円周の長さは半径に比例し、歯車の歯の数は円周の長さに比例するから、結局 k_1 、 k_2 と v_1 、 v_2 は比例する。つまり、

$$v_1/k_1 = v_2/k_2$$

が成立する。

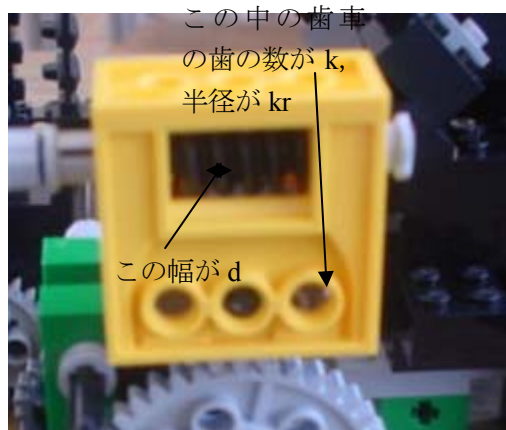
また、接している 2 つの歯車の歯の数をそれぞれ k_1 、 k_2 とし、それぞれの軸の角速度を ω_1 、 ω_2 とする。このとき、互いの歯車は単位時間当たりそれぞれ $\omega_1 k_1 / 2\pi$ 、 $\omega_2 k_2 / 2\pi$ だけ進む。この 2 つが等号で結ばれるから、接している 2 つの歯車同士における束縛条件は

$$\omega_1 k_1 = \omega_2 k_2$$

となる。上記の式 $\omega_1 k_1 = \omega_2 k_2$ は保存則としてみることができ、結局この保存量は 2 つの歯車が共通の軸を持つときにのみ変化し、歯車の歯の数に比例することがわかる。

4.2. ウォームギアについて

ウォームギアとは、軸の 1 回転分の移動距離を内蔵された表面にギザギザのある部品のギザギザの幅の分へ減少させるものである。また、エネルギー伝達の方法が表面にギザギザのある部品から歯車への一方向のみである(下の写真参照)。



理論的には、表面にギザギザのある部品に接続している軸の角速度を ω_1 、ギザギザの幅を d 、表面にギザギザのある部品が直接接続している歯車の歯の数を k 、半径を kr (半径と円周の長さは比例し、円周の長さと歯車の歯の数は比例するので、比例定数 r を用いてこう書ける)、角速度を ω_2 とすると、表面にギザギザのある部品に接続している軸が一回転する間、つまり $2\pi / \omega_1$ 秒間の間に、表面にギザギザのある部品が直接接続している歯車は d 進んでいるので、歯車がこの間に進んだ角度は d/kr である。よって、 ω_1 、 ω_2 、 d 、 kr の間には

$2\pi\omega_2 / \omega_1 = d / kr \Leftrightarrow \omega_2 / \omega_1 = d / 2\pi kr$
という関係式が成り立つ。この $d / 2\pi kr$ が回転数の比となっている。今回、 $d = 0.3 \text{ cm}$ だった。ただ、半径としてどの長さをとるかも微妙なところがあり、今回は、モーターの直結した軸が一回転するごとに歯車の歯がひとつ進んでいたことを利用した。この場合は簡単で、 ω_1 、 ω_2 、 k の間には

$2\pi k / \omega_1 = 2\pi / \omega_2 \Leftrightarrow \omega_2 = \omega_1 / k$
という関係式が成り立つ。

今回歯の数は 24 であり、ウォームギアによる回転数の減少は $1/24$ となる。

4.3. 利用部位における回転数

モーターの角速度を ω とすると、利用部位における角速度 ω_1 は

$$\omega_1 = \omega \times 1/24 \times 8/40 \times 16/24 \times 16/24 \times 40/24 \\ = \omega / 162 = 24.68 / 162 = 0.152$$

となる。回転数は $\omega_1 / 2\pi = 0.0242$ となる。レールに直接接続している歯車の半径は 2 cm だったから、レールの速さは 0.305 [cm/s] となる。

ただ、機構製作の動機でも書いたが、今回製作した部分を遊園地でバイキングのような船が大きく横に揺れるアトラクションに似た形にすることもできる。その場合、そのアトラクションも絶叫マシンであるので、回転数をやや高めに設定し、突然上へと高速で回転運動を始めるような形にしても面白いと思う。

5. おわりに

まず、今回理論計算をして気づいたのだが、カートの質量は発車機構の支点部での負荷の大きさの増大という以外の意味を持たない。ゼミでの発表時に質問されたときは何も考えずにコースの全長の最大値に関係があるような発言をしていたが、それについてはこのレポートの内容を持って訂正させていただきたい。力学的エネルギー保存則の式で、位置エネルギー、運動エネルギーは明らかに質量の一次式に比例し、また摩擦力も、垂直抗力に比例するため質量の一次式に比例するので、結果としてすべてキャンセルされる。そして、おそらくこれはジェットコースターで体重制限をしていない(僕は見たことがない)理由ではないかと思う。ジェットコースターと体重(カートの重さ)はほとんど関係がない。

5.1. 機構製作で苦労した点

何と言っても強度不足に苦しんだ。下手に補強すると構想通りに動かなくなる部分もあり、補強する場所や方法を慎重に選んだ。また、構想の実現と補強に明け暮れた結果、機構がかなり肥大化してしまった。

5.2. LEGO で実現可能な世界

条件として、LEGO の材料が無くなることはないものとする(これは同時に理論的に可能なことを調べることの宣言でもある。現実的に可能な手段であるかについてはひとまず問題にしないことにする)。また、プログラミング等の運動状態を外部から規定するようなことは行わないものとする。実際には、事前にプログラミングした動作を LEGO に行わせることは可能である。このプログラミングという手法を使えば、おそらく任意の力を作り出すことは可能であろう。ただ、LEGO による世界の実現可能性とは話がずれる。

5.2.1. 時間変化しない力

まず、LEGO にはモーターが付いており、継続的に一定の大きさの力(ベクトルは回転するため、向きは変化する)を発生させることはできる。また、Q01 の機構を使うことで、力のベクトルの向きを一定にすることができる。つまり、この2つの組み合わせで、力の定ベクトルを生み出すことができる。

この力の定ベクトルに対し、G01 の機構を使用することで、力の大きさを変化させることができる。

以上の組み合わせで、時間変化しない力であれば、場所(始点)、向き、大きさを問わず発生させることができることがわかる。また、同じ軸に歯車を複数つないで力を分岐させることもできるから、同時に複数の力を発生させることもできる。

5.2.2. 時間変化する力

まず、力の経時変化が規則的な場合を調べる。

これは、クランク機構を組み合わせることで周回運動させることができることから、規則的な力の時間変化は可能である。

また、別の一例として、規則的に向きが時間変化する力は、回転する歯車を、作用点を通り歯車の垂直な直線を軸として回転することで得られる。

次に、力の経時変化が不規則な場合について調べる。

あるひとつの力のベクトル f に関して、作用点を時間変化させることはできる。また、 $f(\mathbf{x}, t)$ を位置 \mathbf{x} 、時刻 t での力の関数(太字は位置ベクトル、点 A の位置ベクトルを \mathbf{a} とする)とし、 $f(\mathbf{a}, 0) = f_1$ 、 $f(\mathbf{b}, 0) = f_2$ とする。ここで、 t_1 秒間で作用点を B から A へ移すことで、 $f(\mathbf{a}, t_1) = f_2$ とできる。

一般に、 $f(\mathbf{a}, t_1 + dt) = f(\mathbf{a} + d\mathbf{a}, t_1)$ のとき、 dt 秒後の状態は、 dt 秒間に $d\mathbf{a}$ だけ動くことで実現される。つまり、 $f = f(\mathbf{a}, t)$ を満たす f が点 A の近傍に連続に存在するとき、力の時間変化は可能である。

5.2.3. LEGO による世界の実現可能性

以上より、 $f = f(\mathbf{x}, t)$ と表される位置と時刻をパラメーターとする力については、条

件付きで常に可能である。ただし、任意の点で単独に力を時間変化させることはできない。力の向きや大きさを不規則に時間変化させることが不可能であるため、既存の LEGO のパーツのみを用いて運動を不規則に時間変化させることはおそらく不可能である。

参考文献および参考 Web サイト

2006 年度ゼミナール資料 1、この資料における引用文献は

藤田勝久 (2004). 機械運動学—機械力学の基礎から機構動力学解析まで—。森北出版。

<<http://kmoddl.library.cornell.edu/model.php?m=41>>

<<http://kmoddl.library.cornell.edu/model.php?m=107>>

<<http://kmoddl.library.cornell.edu/model.php?m=176>>