出典：文部科学省スーパーサイエンスハイスクール開発指定研究
2007年度（56期生）テーマ研究論文集、発行：筑波大学附属駒場高等学校数学科、pp.116-119、2008年3月

コーヒーカップの軌跡

田原　勇二

１．はじめに

コーヒーカップは遊園地ならばたいていに置いてあり，ポピュラーな乗り物です。ジェットコースターやお化け屋敷と比較して地味ではあるかもしれない。

そんな私がなぜコーヒーカップをテーマに研究しようと思ったのか。それはまずコーヒーカップのかわいい形に愛着が持て，そしてその中身について知ってみたくなったからです。どのような物理的仕組みで，どんな機構が使われているか。レゴを用いて作る機会など，あまりないだろう。以上が，僕がコーヒーカップを，レゴを用いて模式的に作った動機です。

私がその作成に心がけたことは，見やすく，シンプルになるようにし，作った。さらにこれを意識して，なるべく精巧で，実物に近い作品の作成を作った。それから，有名なサイクロイド曲線から，その他もろもろの曲線を考察した。これら平面曲線は身近な存在で，古代人も知っていた。古代の，解くのが不可能である直線とコンパスのみを用いた，3 つの作図問題’古代ギリシャの 3 大問題’や，B.C.300 年ごろの有名なユークリッドの’原論’，アポロニウス(B.C.250-175)から，17 世紀前半のデカルトやフェルマーに到るまで，新たな曲線が発見されたのである。

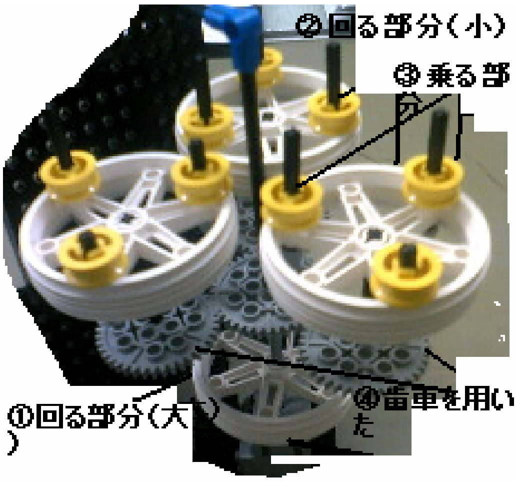

図 1

２．作成物と実物の比較

実際に作ったのは図 1 である。図 2 はコーヒーカップを上部から見た図であり，図 3 は分解したときの模式図，つまり中身である。

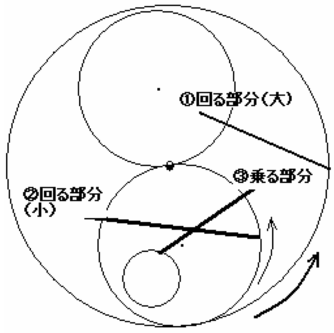

図 2

図 1 は図 2 と同番号に相当し，回転の向きは自由です。

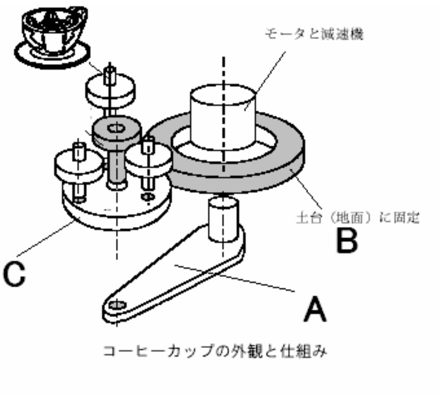

図 3　実際の模式図
コーヒーカップのからくり

B が①周る部分(大)に，C が②回る部分(小)に相当する。

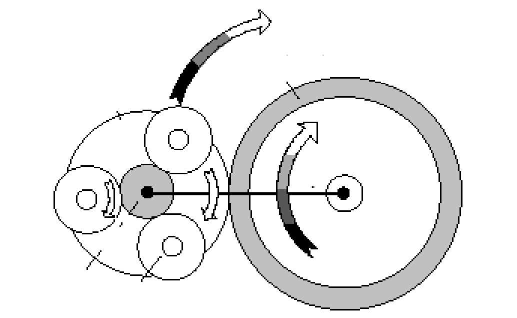

図 4

出典：文部科学省スーパーサイエンスハイスクール開発指定研究
2007年度（56期生）テーマ研究論文集、発行：筑波大学附属駒場高等学校数学科、pp.116-119、2008年3月

図3の上部図である。BとCとの独立した回転速度の違い，率によって，コーヒーカップの軌跡が決定される。BとCの回転の向きは常に逆となる。次はこの軌跡を考えてみる。

３．サイクロイド曲線

コーヒーカップの小円盤が動く軌跡は，サイクロイド曲線となる。

3.1. 数式と図示

定直線に沿って円が滑らかに回転するときの円周上の定点の軌跡をサイクロイド曲線という。自転車の車輪の軌跡でもあり，空間内の異なるA，Bに関し，ABの経過時間を最小にする曲線でもある(これを最速降下線という)。このさい摩擦は考えない。トコロイドの一種で，トコロイド曲線は，一定円が一定直線に接しながら滑らずに転がるとき円内または円外に固定された一点Pが描く波形の軌跡である。なお，1697年にかの有名なアイザック・ニュートンが，数学者のヨハン・ベルヌーイを驚かした逸話も知られている。

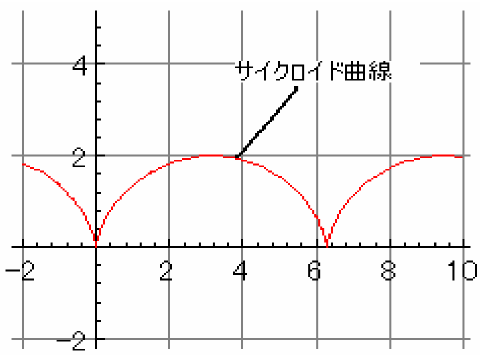

図5

式は媒介変数表示で，θは回転角，aは半径で，$-4<\theta<20\pi$のとき，

$$x=a(\theta-\sin\theta),\quad y=a(1-\cos\theta)$$

となる。上図は$a=1$のときのものである。

また，サイクロイド曲線には 2 種類あり，円が定円の内側を周に沿って転がるとき，動円の円周上の定点が描く軌跡を内サイクロイド(エピサイクロイド)，定円の外側を転がるときは外サイクロイド(ハイポサイクロイド)という。次は，これらの軌跡を考察する。

４．その軌跡は

ここで，①の回る向きに対して逆方向の④の描く軌跡について，いくつかの図を紹介する。

4.1. 内サイクロイド

内サイクロイド曲線の数式は，媒介変数表示を用い，次のように表す。

(a，b は定数)

$$x=(a-b)\cos\theta+b\cos\left(\frac{a-b}{b}\theta\right)$$

$$y=(a-b)\sin\theta-b\sin\left(\frac{a-b}{b}\theta\right)$$

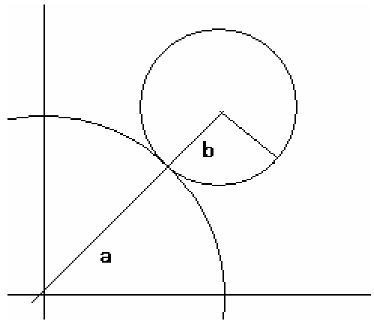

図6

このときa，bは図6のようになる。

それに加えて，回転率を変えると違った形状の軌跡もできる。定円と動円の比率が4 : 1のとき，　アステロイド曲線になる。

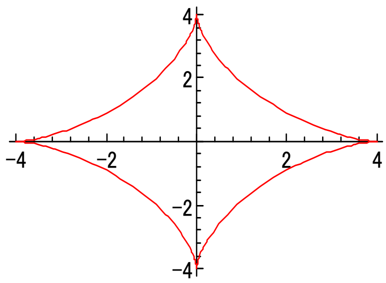

図7　$a=4$，$b=1$のとき

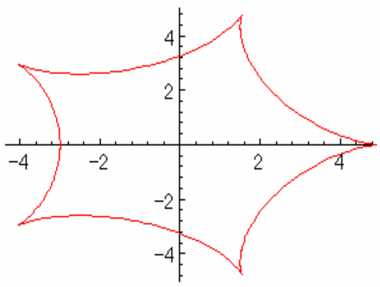

図8　$a=5$，$b=1$のとき

半径5の円の内側を半径1の円が周ったさいの定点の軌跡となる。つまり，半径aの円が，図2の②’回る部分(小)’に相当し，半径bの円が。③’周る部分(大)’に当たりま

出典：文部科学省スーパーサイエンスハイスクール開発指定研究
2007年度（56期生）テーマ研究論文集、発行：筑波大学附属駒場高等学校数学科、pp.116-119、2008年3月

す。

4.2. 外サイクロイド

外サイクロイド曲線の数式は，媒介変数表示を用い，

(a ， b：定数)

$$x=(a+b)\cos\theta-b\cos\left(\frac{a+b}{b}\theta\right)$$

$$y=(a+b)\sin\theta-b\sin\left(\frac{a+b}{b}\theta\right)$$

と表す。

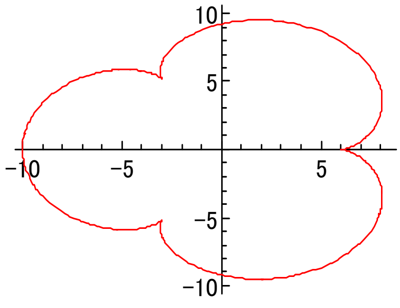

図 9

図 9 は，$a=6$，$b=2$ のときである。半径 6 の円の周囲を半径 2 の円が回ったさいの定点の軌跡となっている。

５．歯車とインボリュート曲線

歯車もサイクロイド曲線を利用して作られている。歯車は継続的な運動の伝達，速さの増減，回転方向の変換あるいは軸方向の変換など用途はきわめて広く，時計を筆頭とした機械，器具の機構の中には必ずと言ってよいほど使われている。歯車同士をくっつけて回転すると逆方向となり，コーヒーカップもこの性質を利用して作った。用途も様々で，形もバラエティーに富んでいる。

現在歯型に使われている形は図 7 のようにインボリュート曲線とサイクロイド曲線で囲まれたものである。インボリュート曲線とは，別名伸曲線とも言い，図 9 のように円に巻きつけられた糸の端が始め点(0，a)にあったとして，それをゆっくりと円から遠ざけながら解いてゆく。そのときの糸の端の，座標の軌跡をインボリュート曲線という。インボリュート曲線を用いると，なめらかに隙間なく歯車がかみ合う。

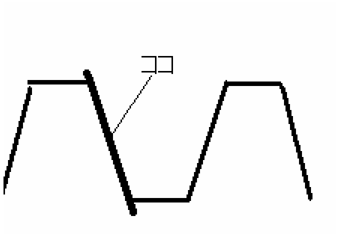

図 10　歯車に使われるインボリュート

コーヒーカップにも使われている，歯車の頂点と，底とを結ぶ線にはインボリュート曲線を用いている。いわゆる凹のへりの部分である。

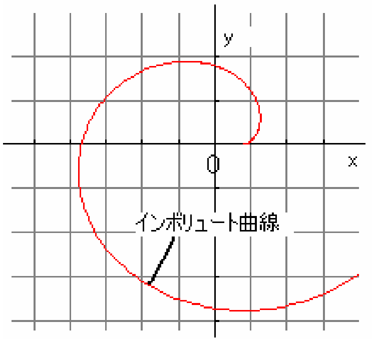

図 11　インボリュート曲線

数式は，$x=\cos\theta+\theta\sin\theta$，$y=\sin\theta-\theta\cos\theta$ $(0<\theta<5\pi)$ となる。

６．いろいろな曲線

他にも有名な曲線は存在する。それらをいくつか紹介して終わりにする。

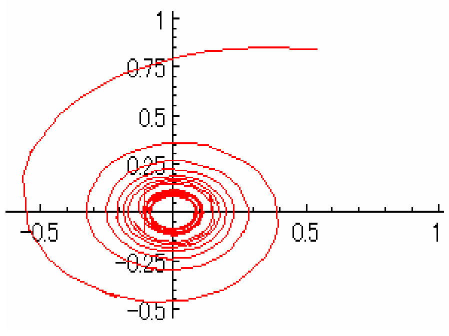

図 12　リチュース

数式は $r^2=\dfrac{a^2}{\theta}$ （a：定数） である。

出典：文部科学省スーパーサイエンスハイスクール開発指定研究
2007年度（56期生）テーマ研究論文集、発行：筑波大学附属駒場高等学校数学科、pp.116-119、2008年3月

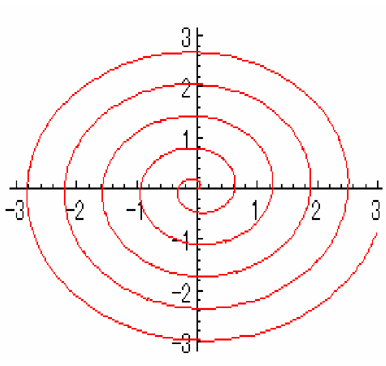

図 13　アルキメデスの螺旋

数式は，$r = a\theta$　(a は定数) となる。

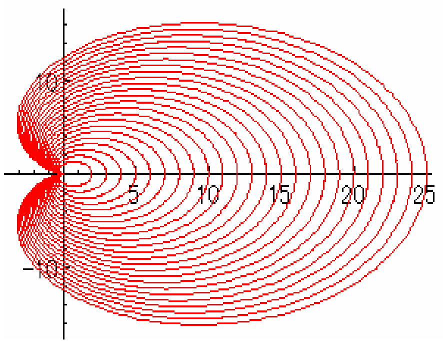

図 14　カージオイド曲線(心臓形)

リマソンの極座標 $r = a\cos\theta + b$ の $a = b$ であるとき，カージオイドとなる。外サイクロイドの一種である。リマソンは，アンテナの指向特性のグラフと同じハート形となっている。この波形を読むことにより，その電波がどの方角からきているのか，指向性を知ることができる。

数式は　$r = a(\cos\theta + 1)$　(a：定数) となる。

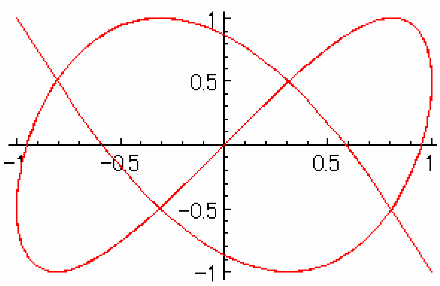

図 15　リサージュ曲線

数式は　(a，b，c，d，n，m：定数)

$$x = a\sin(n\theta + b),\quad y = c\sin(m\theta + d)$$

である。図 15 は，$x = \cos(n\,\theta)$，$y = \sin(m\,\theta)$ とし，$n = 3$，$m = 5$ を代入したものである。

他には，ジェットコースターや，道路のカーブで用いられる緩和曲線の一種である，コルニュ螺旋ともいう「クロソイド曲線」がある。これは半径 r は曲率半径 ，弧 l は曲線長のとき，$rl = a^2$，つまり反比例となる曲線のことである。これは CAD が普及する以前はクロソイド表を用い， 雲形定規で結んだり「クロソイド定規」を用いて仕上げていたのである。

参考文献及び参考 Web サイト

石井重三 (1992). *発明家のためのやさしい機構学.* 日刊工業新聞社

栗田稔 (1981). *いろいろな曲線.* 共立出版.

八木一正 (1996). *遊園地のメカニズム図鑑 ジェットコースターが落ちない理由.* 日本実業出版社

<http://www.nikonet.or.jp/spring/mery/mery.htm> [2007, March 28]

<http://homepage3.nifty.com/m_sada/mechanic/gear01.html#%8E%C0%8D%DB%82%CC%8E%95%8E%D4>　[2007, March 28]

<http://www.nagaha.co.jp/3syurui.html> [2007, March 29]

<http://www.dendai.ed.jp/~komine/book/blue01.pdf>　[2007, April 25]

< http://homepage3.nifty.com/Sadabo/ > [2007, October 15]

<http://ja.wikipedia.org/wiki> [2007, October 16]

<http://www.nano-architects.com/curves.htm> [2007, October 16]