出典：文部科学省スーパーサイエンスハイスクール開発指定研究
2007年度（56期生）テーマ研究論文集、発行：筑波大学附属駒場高等学校数学科、pp.130-135、2008年3月

機構の研究
ーウォームギヤとクランクに焦点を当ててー

和田　直樹

１．はじめに

数学のゼミを受けるに当たってまず先生から言われたのは,「遊園地にあるアトラクションを再現してみよう」ということだった。かなり甘く見ていたのだが, 全く手が出なかった。「何を再現するのか」とか,「どのように再現するのか」が全く分からなかった。その後に, PowerPoint を用いた，ゼミ生の成果発表の課題が出たときに，困り果てた私は,「簡単な機構の徹底的研究」をすることにした。

２．用語等

まずは，いくつかの用語をあらかじめ挙げて説明しておきたい。

「機構」

各部品間で限定された相対運動をするような機械の組み合わせを指す。

「減速比」

出力時の(回転)速度から，入力時点での(回転)速度を割ったもの。

「対偶」

機械の部品同士が面や線，点で接触し，一定の相対運動を行う部分を指す。

３．PowerPoint 作成に当たって作った機構

まずは，PowerPoint 作成に当たって調べた「ウォームギヤ」について書いていきたいと思う。

3.1. ウォームギヤについて

ウォームギヤは，歯車の一種で,「食違い軸歯車」(各ギヤの回転軸が交差せず，平行でもないもの)のカテゴリーに分類される。ウォームと，ウォームホイールから構成される機構である。歯同士は理論上点接触をするが，そうすると磨耗しやすくなってしまうので，線接触をするように改良されているのが一般的である。ウォームギヤの一番の利用用途は，機械の減速であり，ウォームギヤを主体とした機械はほぼないと言ってよい。

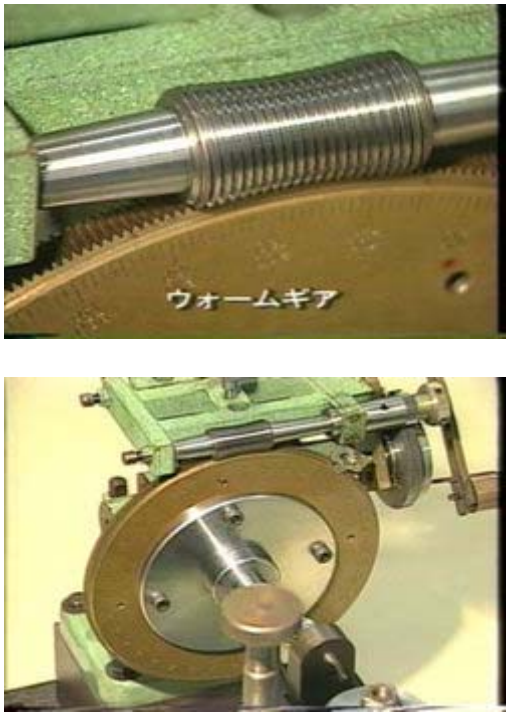


図１　ウォームギヤの写真

3.2. ウォームギヤの特徴

特徴として挙げられるものを以下に示す。

「減速比が大きい」

基本的に発電されて送られてくる電気は強すぎるので，そのまま使うと機構の動きが極めて速くなってしまう。そこでこの部品を組み合わせることで，機構の動作スピードを効率的に遅くすることができる。使用用途は，ほぼそれに特化したものだと言える。ねじ歯車を，極限まで減速比が得られるようにした形態と考えると分かりやすい。

出典：文部科学省スーパーサイエンスハイスクール開発指定研究
2007年度（56期生）テーマ研究論文集、発行：筑波大学附属駒場高等学校数学科、pp.130-135、2008年3月

図 2　ねじ歯車の写真

「回転軸が変換できる」

減速をすると同時に，回転する軸を 90° 回転することができる。

「摩擦によるエネルギーロスが大きい」

数学的に示すことはできないが，感覚的にエネルギーロスが大きいことは分かっていただけるのではないだろうか。逆に言うと，摩擦や騒音にエネルギーが回りやすいということである。つまり回転を伝えるエネルギーが減衰してしまうことから，この特徴はセルフロックと関連してくる。

「油などを注さないと動きにくい」

これは前述のことと関係するが，ここでは数学的に示すことはできないので割愛する。

「(原則)回転の伝達が一方通行である」

通常は，ウォームホイールを回してウォームを動かすことはできない。この機能はセルフロックと呼ばれる。しかし，歯に圧力がかかってしまい，一部が欠落する危険が生じるため, このような機能を備え付けたい場合は, 通常は別に運動を止める機構を用いてあり，おまけ程度の機能となっている。エレベーター等に使われている。ただし，ウォームのねじれ角を 30°～40°とすると，逆に回すことができる。この機能を用いているのがオルゴールである(図 3)。今では改良がなされていて，このような形のものは少ないらしい。

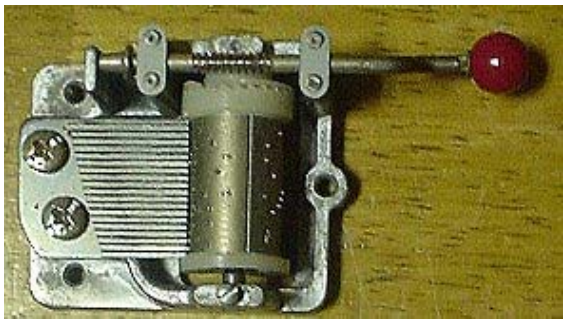


図 3：手回しオルゴールの写真

ねじれ角とは，歯車の回転軸と，歯の向きのなす角度である。

図 4　ねじれ角

3.3. ウォームギヤの製作

LEGO を用いて，実際にウォームギヤを組み立ててみた。

図 5　あらかじめ LEGO のセットに付いてきたウォームギヤ

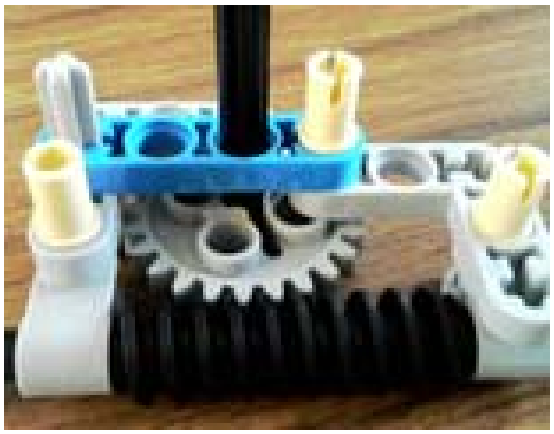


図 6：自分で製作したウォームギヤ

図 6 は，あらかじめ LEGO のセットについてきた部品を参考に，自分で製作したウォー

出典：文部科学省スーパーサイエンスハイスクール開発指定研究
2007年度（56期生）テーマ研究論文集、発行：筑波大学附属駒場高等学校数学科、pp.130-135、2008年3月

ムギヤである。作りは単純で，強度もかなり低いものになってしまったが，正しく動作してくれた。

3.4. ウォームギヤを用いた実験

ウォームギヤの「減速」に焦点を絞って，それを計測する実験・考察をした。

まず考えついたのは,「車を作って右側と左側の車輪の回転速度を変えてしまえば，車は円運動をし，その半径を計れば減速比が出せるのではないか」ということである。実際にLEGO を用いて組み立ててみた結果，下のようなものが出来上がった。

図 7　実験用の車

残念なことに，前輪がウォームギヤ，後輪がモーターの動力を直接伝えているので，当初の目的が達成されておらず，おまけに車輪が左右に首を触れないので，円運動がそもそもできない。そこで，逆さまにして回転角を測ることで,減速比を調べてみることにした。

図 8　回転角を調べる実験

この結果は以下のようになった。

ウォームギヤ	あり	なし
回転角	15°	360°

ただし，ウォームギヤなしの方は途中で半径の比が 2.00：1.25 の歯車を組み合わせているので，歯車の間隔が等しいことを考え，回転速度比は，歯車半径の比の逆比になることを用いて計算すると，このウォームギヤの減速比はおおよそ 1 / 15 となることが実験によって分かった。

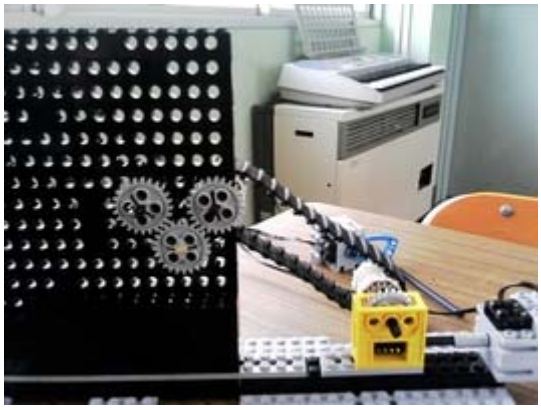
このウォームギヤに使われているウォームは，ねじれ角がおよそ 10 度ぐらいである。よってセルフロック機能があると考えられるが，実際にウォームホイールを回してみると，案の定ウォームを回すことはできなかった。また，一般的にウォームはねじれ角が少ないほど，減速比が大きいのだが，今回は 1 / 15 と比較的低い。これは，ウォームの歯と歯の間隔が長いためであろう(一般的なウォームギヤの減速比は 1 / 20～1 / 100 ほどである)。

3.4. ウォームギヤを用いた機械

この文章の制作に当たって様々なサイトを見て調べてみたのだが，残念なことに，ウォームギヤの主要な用途は減速であり，ウォームギヤをメインに用いる機械は(調べた限り)オルゴール以外ないことが分かった。先例がないので，私が新たにウォームギヤを使用した機械を製作できる訳がなく，ここでは考察に留めて，別の機構について LEGO による制作をしてみたいと思う。

ちなみに，ゼミの時間中にウォームギヤを少し使用した小さな機構(ベルトコンベアーのようなもの)を作ってみた。いかがであろうか。

出典：文部科学省スーパーサイエンスハイスクール開発指定研究
2007年度（56期生）テーマ研究論文集、発行：筑波大学附属駒場高等学校数学科、pp.130-135、2008年3月

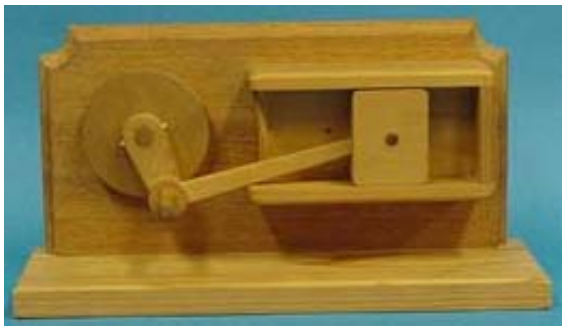


4．スライダクランク機構

別の面白そうな機構がないかと本を見て探してみたところ，この機構が面白そうと感じたので，この機構について調べてみることにした。

4.1. スライダクランク機構

エンジンのピストンやクランクを想像していただけるとよく分かると思うが，回り対偶，滑り対偶からなる機構である。作りは簡単であるが，エンジンなどをはじめ様々な機械に取り込まれている。



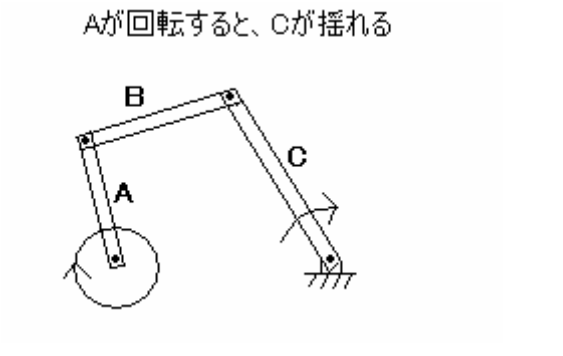


図 9：(往復)スライダクランク機構

ただし，A の固定点と C の固定点を結ぶ辺を D とすれば，この機構は

A＋B＋C＞D，A＋B＋D＞C

A＋C＋D＞B，B＋C＋D＞A

が成立しないと，回転することは出来ない。(三角形の 2 辺の和は他の 1 辺より長いことを使えば証明できる)。

4.2. スライダクランク機構の特徴

以下にスライダクランク機構の特徴について述べていきたいと思う。

「直線運動，回転運動の相互変換が容易である」

対偶を滑り対偶，回転対偶と組み替えていくことで直線運動と回転運動を変換することが出来て，複雑な動きも再現し得る。(揺動スライダクランク機構，まわりスライダクランク機構，固定スライダクランク機構など，様々な種類が存在する)。

「応用範囲が広い」

エンジン，ピストンをはじめとする機械に使われたりすることで，多くの機械に使用される機構である。

4.3. オフセットスライダクランク機構

今回は，その中でもオフセットスライダクランクに興味を持った。これは往復スライダクランク機構の 1 種である。

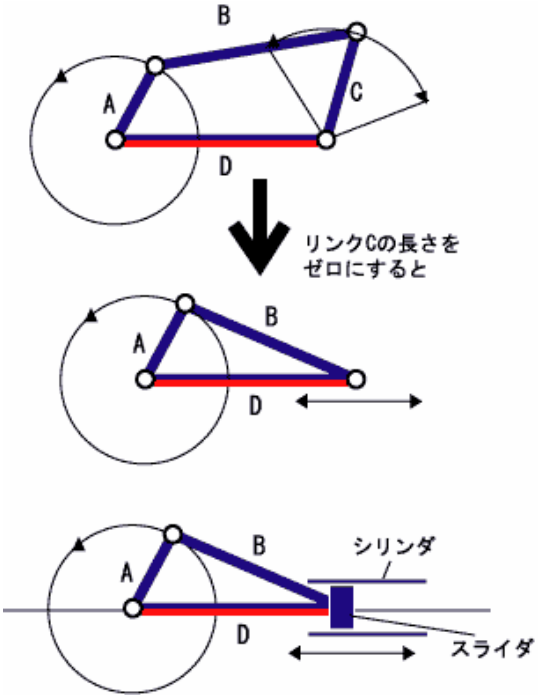


図 10　往復スライダクランク機構の変形

上の図を見ていただければ分かると思うのだが，C の長さを 0 にすることで，回転運動を直線運動に変換することが出来る。この機構はピストンや空気圧縮機(エアーコンプレ

出典：文部科学省スーパーサイエンスハイスクール開発指定研究
2007年度（56期生）テーマ研究論文集、発行：筑波大学附属駒場高等学校数学科、pp.130-135、2008年3月

ッサー)に応用される機構であるが，この機構は面白い特徴を持っている。

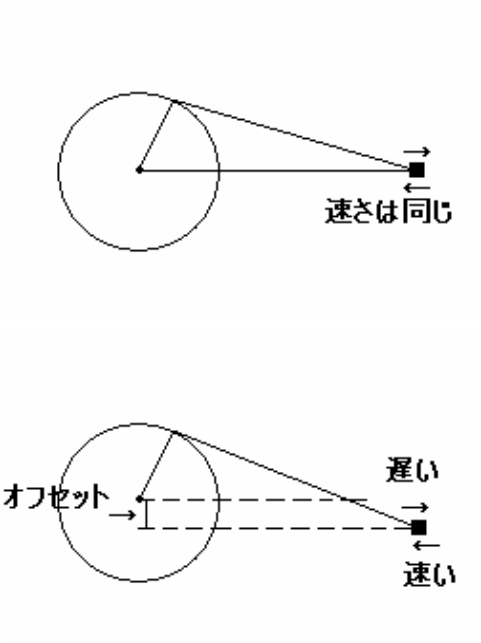


図 11　オフセットのあり・なしの相違

図のように，回転軸の中心の高さの差をオフセットと呼ぶが，この差を設けることにより，ピストンの速度が出っ張るときと引っ込むときで変わってきてしまうというのである。今回はこれについて調べてみることにした。

4.3. 思考実験(考察)

LEGO を使って実験するまでに時間があったので，先に頭の中で考察をしてみた。

「オフセットなしについて」

まずは，このピストンの動きは，運動を制御する二本の棒(図 10 で言えば，A と B)が一定の角を回転したときに，どれだけ棒が「伸びる」かで決まると考えた。そこで，微小回転 $\Delta\theta$ における増分を考えてみることにした。回転する棒の長さを r，棒の角度を図のように $\theta(t)$，$\varphi(t)$とすると，以下のようになる。

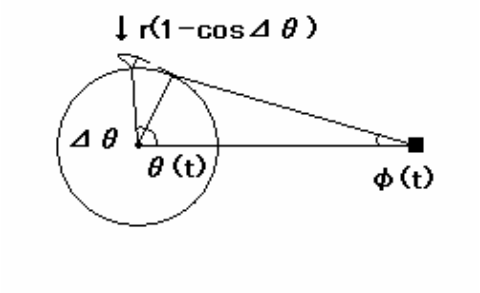


図 12　考察①

このように，微小角 $\Delta\theta$ ではその接線についての増分は $r(1-\cos\Delta\theta)$となる。(φ (t)についても同様である)

これを微小時間 Δt で割って $\Delta t \to 0$ の極限をとれば速度が出るのだが，ここでは無意味だと思われるので割愛する。

「オフセットありについて」

今まで角度で議論してきたので，オフセットの差分も角度で表して，考えてみる。

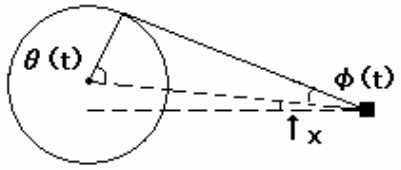


図 13　考察②

つまり，今度は棒Aの回転する軌跡の円が，水平方向に対して x だけ回転してしまっているとみなすことが出来る。すなわち，オフセットなしで取り出した増分の中心を結ぶ成分方向が，オフセットありのときの増分となるので，増分は $r(1-\cos\Delta\theta)\times\cos x$ とかける。(φ(t)についても同様である。) $|\cos x| \leqq 1$ より，確かに出っ張るときは遅くなることが予想される。逆に引っ込むときは，x のずれが逆向きになるので，$1/\cos x$ の補正がかかり，確かに引っ込むときは早くなることが予想される。

4.3. LEGO による機構の再現，実験

続いて，LEGO で機構を再現し，実際に動きを調べてみた。

「オフセットなし」

出典：文部科学省スーパーサイエンスハイスクール開発指定研究
2007年度（56期生）テーマ研究論文集、発行：筑波大学附属駒場高等学校数学科、pp.130-135、2008年3月

「オフセットあり」(2 パターン)

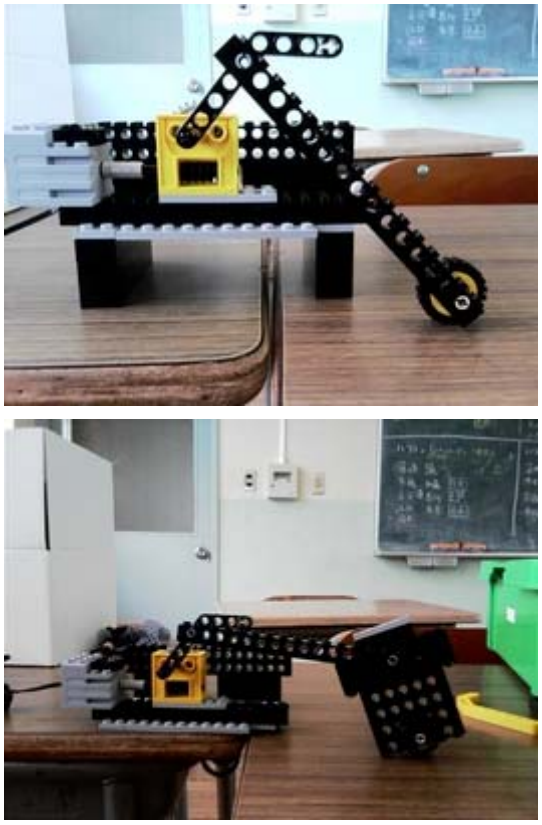


図 14　スライダリンク機構の再現

実際に実験してみた結果としては，心なしかオフセットスライダクランクの効果が出ていたような気がしたが，あまり差は見られなかった。1 番考えられる原因として妥当なのは，今まであえて触れてこなかったのだが，オフセットの有り無しに関わらず $\phi(t)$は全く同じ動きをするのかということである。これを考察する手段として，物体の束縛運動を考えるために運動方程式を立式するなどの方法が考えられるのだが，そもそもピストンの動きが分かっていない以上，変数が多すぎて方程式が解けないのは自明である。これ以上はよく分からなかったので，少々心残りではあるが，これをもってスライダクランクについての考察を終わりにしたいと思う。

５．おわりに

以上，2 つの機構に焦点を絞って考察してきたが，ゼミを受ける当初予想していた形とは全く異なるものになってしまった。あまり複雑な機構を再現できなかったあたりに，己の創造力のなさや無学を感じる次第である。とはいえ，この卒業研究をするに当たって様々な本を読み，インターネットで調べたのは自分にとってもよい経験になったと思う。特に歯車の複雑さがとてもよく分かった。人の英知に感動するとともに，これを結びの文としたい。

参考文献および参考 Web サイト

長岡歯車製作所 歯車の種類(歯車の画像を転載) <http://www.nagaha.co.jp/3syurui-3.html> [2007, March 18]

<http://www.katch.ne.jp/~n-yotaka/oufukusuraida.htm> [2007, April 28]

リンク <http://teched.kyokyo-u.ac.jp/~sugimoto/mechanism/link.html> [2007, April 29]

手回しオルゴール 手回しミュージックボックス(オルゴールの画像を転載) <http://www.musical.jp/box/musicbox6/mx06.htm> [2007, March 18]

住野和男・林 俊一 (2006). *絵ときでわかる機構学*. オーム社.