

高校数学における数学史の導入に関する一考察

～ アポロニウスの問題の解法を通して～

筑波大学大学院修士課程教育研究科

高橋秀樹

	要約
1 はじめに	
2 研究目的・方法	本研究では、アポロニウスの著書「接触 (On Tangencies)」を教材とした授業を通じて、生徒
3 授業概要	自身が持つ数学観の確認と再構成が促せるか考
(1) 指導目標	察した。授業で数学史的な話題を扱い、数学に
(2) 対象生徒	おける概念の形成や人間と文化とのかかわりに
(3) 授業課題設定	ついて生徒達が考える機会を与えることでき
(4) 授業内容	た。その結果、数学観の変容が見られ、数学に
4 結果と考察	対する興味・関心を高めることができたと言え
5 おわりに	る。
6 資料	

1 はじめに

(1) 「数学基礎」について

数学基礎の目標は、「数学と人間とのかかわりや、社会生活において数学が果たしている役割について理解させ、数学に対する興味・関心を高めるとともに、数学的な見方や考え方のよさを認識し数学を活用する態度を育てる。」¹ことである。また、科目の具体的な展開の中において、数学基礎についての記述が新たに独立した事項であることに注目し、このような状況で数学史的な話題を授業で扱い、どのように生徒の興味・感心を高めることができるか考察する。

¹文部省(1999)「学習指導要領」

(2) 「数学史的な話題を扱うこと」について

数学史で重要なことは数学の形成過程を明らかにすることであり²(中村幸四郎)さらに、数学の原理・法則の認識の過程と人間や文化とのかかわりについて考えていくことは数学教育にとって有益であるので、今回の研究はこのような考え方で進めていく。そこで、数学史を生徒に伝えるためにどのような姿勢を持つべきかを考えたとき、『オリジナルな題材の研究は歴史と数学を教えることを結びつける方法として価値のあることである』³(H. N. Jahnke)との視点に立った題材の採用に留意することとした。原典にある資料を取捨選択したり、改良したりする⁴(片野善一郎)学習姿勢は採用しないこととし、授業では、一次文献を使用した。

(3) 「Cabri-Geometry、以下“カブリ”と呼ぶ」について

生徒達がアポロニウスの問題を作図によって解決するとき、自分が考えていることを試行錯誤しながら何回も表現する際に直ちにやり直しができる作図ツールは便利である。また、カブリによって証明しようとする事の妥当性やいつでも成り立つことに対する確信を生徒が持つことができるようになったり、さらに、カブリをうまく活用することでしか得られない知見を得られる⁵(礪田正美)ことも今回の授業展開を考えたときに必要となってくると判断し、作図ツール「カブリ」を使った。

2 研究目的・方法

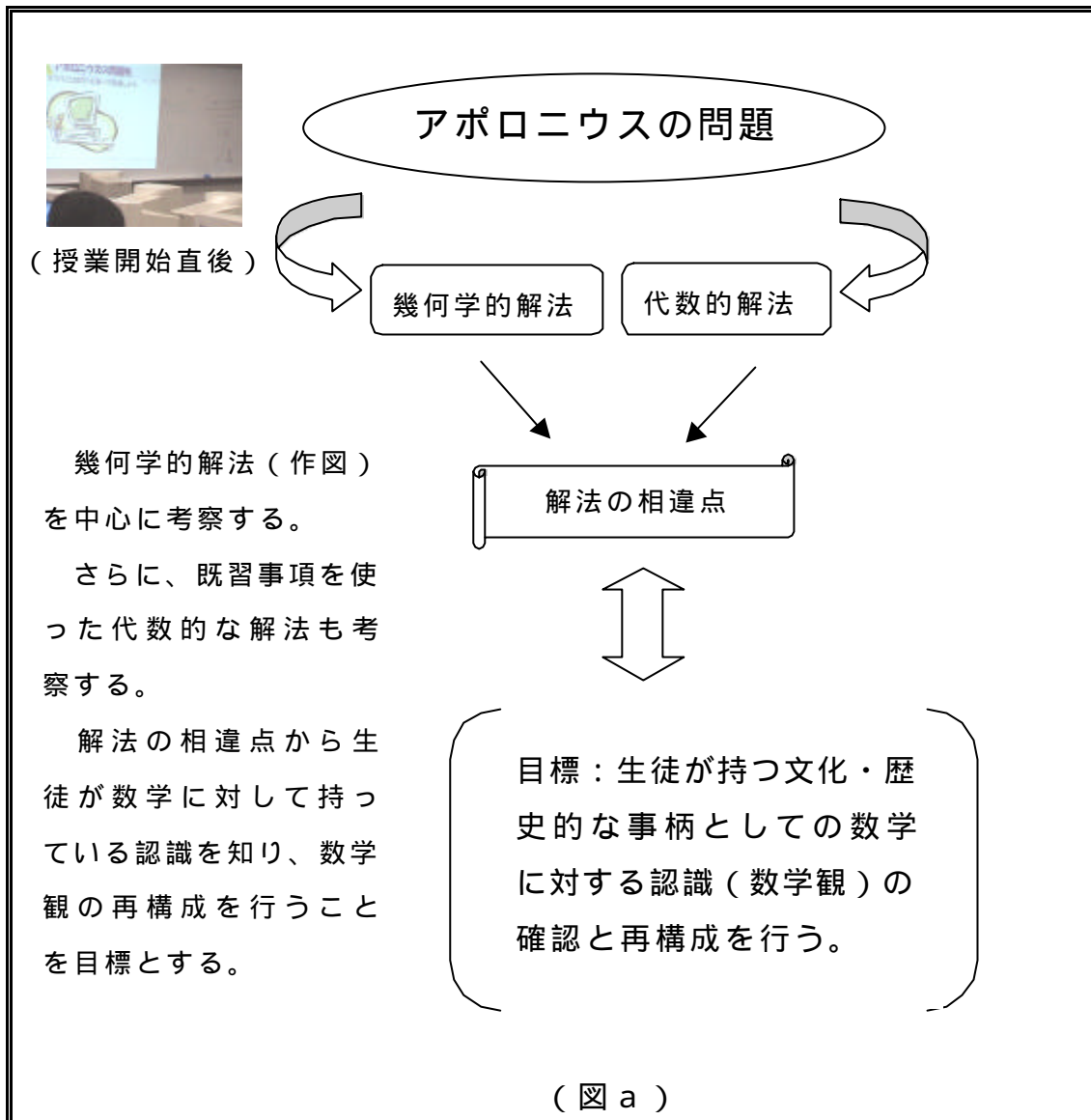
研究目的	“アポロニウスの問題”を解決していく中で、生徒自身が持つ数学観の確認と再構成について考察する。(図a)
研究方法	本研究は、授業での実践、さらにそれらの記録(ビデオ、ワークシート、アンケート)をもとに考察する。

²中村幸四郎「数学史 - 形成の立場から - 」共立出版、p 182

³J.Fauvel、J.V.Maanen(2000)「History in Mathematics Education」

⁴片野善一郎「数学史の利用」まえがき、明治図書

⁵礪田正美(2000)「数学教育改革の推進とテクノロジー - の利用の実証に関する研究」筑波大学数学教育学研究室、～代数、解析、幾何の改革～ P 85



2 授業概要

(1) 授業目標について

アポロニウスの問題の形成過程と解法過程を把握すること。

カブリの操作とカブリを使った解法に習熟させること。

(2) 対象生徒について

埼玉県の公立普通科高校第2学年の生徒（2クラス合計82名）

(3) 授業課題設定について

以下の課題を設定し、授業を行った。(図 b)

課題1【ギリシャ数学の理解を深めること】

課題2【アポロニウスの歴史的な業績を理解すること】

課題3【カブリの基本的な操作に習熟すること】

課題4【幾何学的解法と代数的解法を比較すること】

ギリシャ数学について

著名な数学者

ピタゴラス

アルキメデス

ユークリッド

アポロニウス

アポロニウスの円錐曲線論

出典：Greek mathematical Works pp 276 - 357

接触

宿題で確認

代数的解法

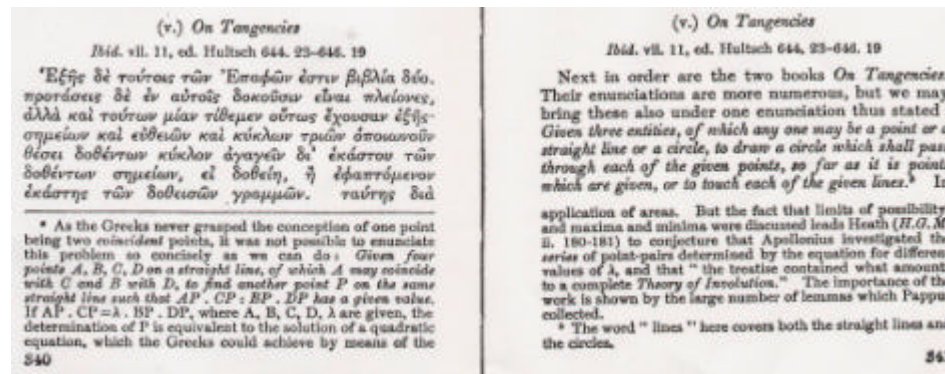
カブリで作図

幾何学的解法

解法の相違点を確認

「接触」の中にある、条件を満たす円を作図する問題の考察をする。

解法の相違点から、数学観の確認と再構成を行い、数学に対する興味・関心を高める。



" On Tangencies "

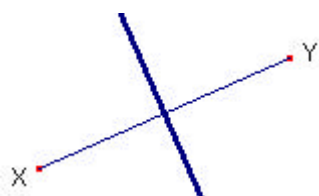
(図 b)

(4) 授業内容について

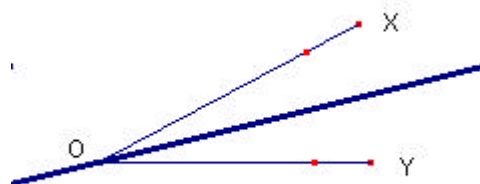
【アポロニウスの問題の理解、カブリの操作の習熟】(1時間目)

以下の作図についてカブリを使って行った。

(図1) 垂直二等分線の作図

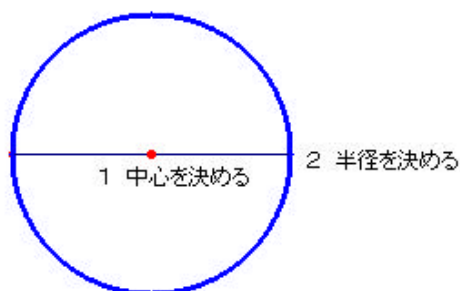


(図2) 角の二等分線の作図

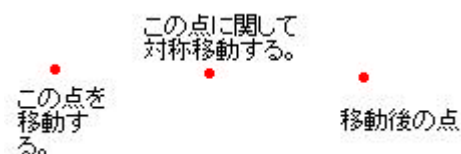


(図3) 直径が与えられた場合の円の作図

1、2の順に作図する。



(図4) 点対称の作図

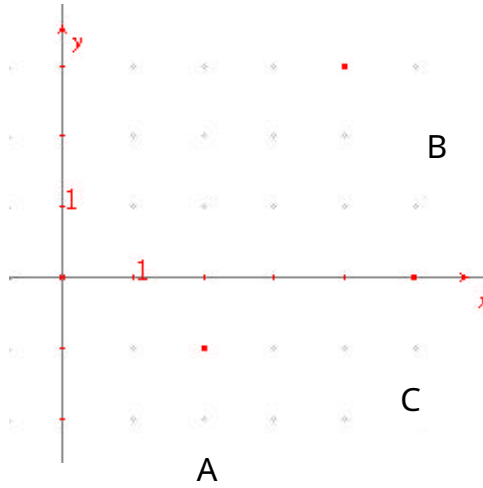


以上、図4のまでの作図で1時間目の授業が終了し、以下の宿題の提示を行った。この宿題は、次の時間に扱う問題のヒントでもある。様々なアプローチを試みることにより、代数的解法と幾何学的解法の関連について考える機会を与えた。

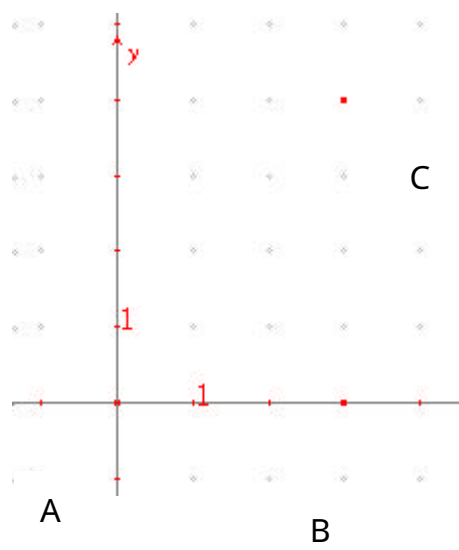
<宿題の提示を行う>

- 1 3点A(2, -1) B(4, 3) C(5, 0)を通る円の方程式を求めよ。(“外心”を図に記入するのも良い。)(図5)
- 2 3点A(0, 0) B(3, 0) C(3, 4)を結んだ三角形に内接する円の方程式を求めよ。(“内心”を図に記入するのも良い。)(図6)

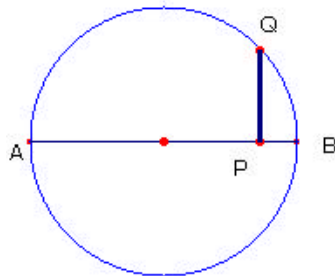
(図 5)



(図 6)



- 3 下の図において太線部分の長さを求めよ。
 ($AP = a$, $BP = b$, としたとき、 PQ を a , b を用いて表せ。)
 (ただし、 $AB \perp PQ$ とする。)



(1 時間目)



パソコンの操作

(2 時間目)



宿題を解答中

【宿題の解答・説明、アポロニウスの問題の解法】(2時間目)

< 予想した解法と生徒の様子 >

宿題1と宿題2は円の方程式を設定する解法を予想した。また、中心の位置を図に記入している生徒も見られた。ただし、コンパスで正しく作図していた生徒は、若干名であった。

宿題3では、まず三角形の面積を求め、面積が6なので、図から判断して中心の座標は(2, 1)であると瞬時に解いた生徒もいた。(「宿題を解答中」の写真)多くの生徒は、「数学」の三角比の分野で $S = s r$ (S : 三角形の面積, s : 周の長さの半分, r : 内接円の半径)の公式を理解して、使いこなしている。(宿題の問題では、 $S = 6$, $s = 6$ なので $r = 1$ となる。)

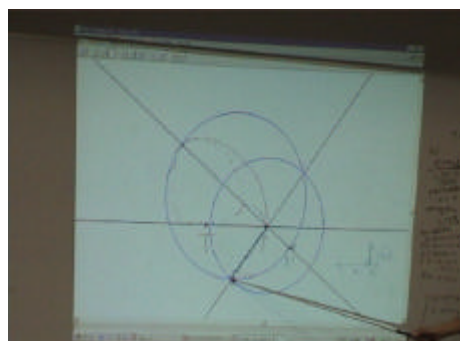
また、宿題3は三角形の相似に着目すると容易に解決する。そのような解答をした生徒は少なかった。また、無回答もあった。円の方程式を用い、求める線分の長さを計算している生徒もいた。

< 生徒の解法から見た授業時の焦点 >

アポロニウスの問題(1)(2)はそれぞれ外心と内心の作図である。生徒の保存したファイルを見ると、作図が完成している生徒が多く見られた。内心の作図の場合、半径の決め方について丁寧に説明した。

でも述べたが、カプリの特性を正しく使った操作ができるように生徒の支援を行った。

宿題3の比例中項に関する問題は、「方べきの定理」にも関連しており、特に丁寧な説明と作図を行った。

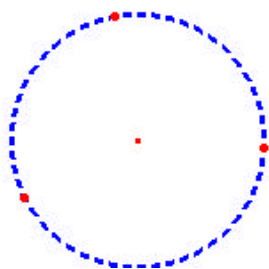


比例中項を求めたときの図について“どこかで見たことがあった図”“今後、円の問題でこれが使えそうな気がする”と感想で述べている生徒がいた。(相加平均 相乗平均の証明のとき比例中項が出たと推測される - 写真1)

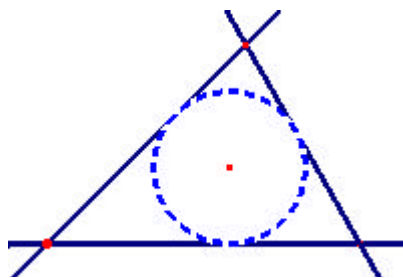
(上の図は比例中項の説明をしている場面：写真1)

<アポロニウスの問題の確認をする>以下の10のケース

(1) 3点を通る円の作図

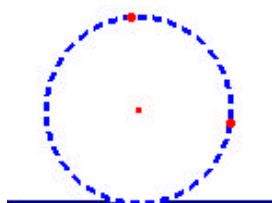


(2) 3直線に接する円の作図

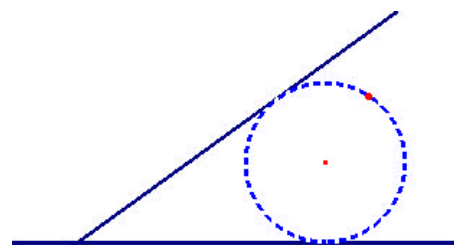


した。

(3) 2点を通り、1直線に接する円の作図



(4) 2直線に接し、1点を通る円の作図



授業の中で扱うことができた問題は、(1)から(4)まで4問である。他の問題については、問題文だけ提示する。

(5) 2点を通り、1円に接する円の作図

(6) 2つの円に接し、1点を通る円の作図

(7) 2直線に接し、1円に接する円の作図

(8) 2つの円と1直線に接する円の作図

(9) 1点を通り、1直線と1円に接する円の作図

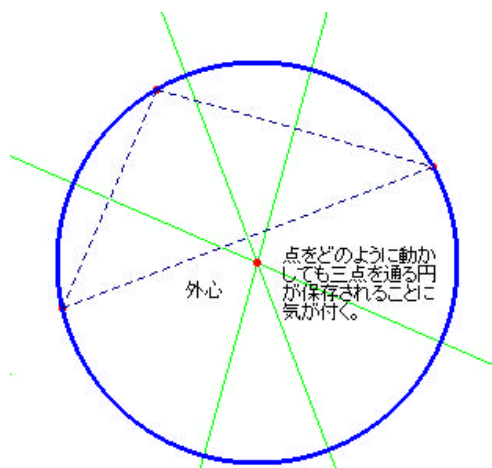
(10) 3つの円に接する円の作図

問題(1)から(4)まで順次に授業で扱った。正しい作図ができていれば、点や直線を動かしても接することが保たれる。この点に注意しながら授業を進め、正しい作図であるかどうかの確認は各自行うように指示した。(上記の点は、カブリの持つひとつの特性でもあり、初めての生徒には難しく感じられるので繰り返し説明した。)次に授業でのやり取りを振り返ってみる。

< アポロニウスの問題(1)の作図を行う >

(以下、< S > : 生徒の活動 < T > : 教師の活動)

(ア) 3点を通る円を作図したときのやり取りについて。

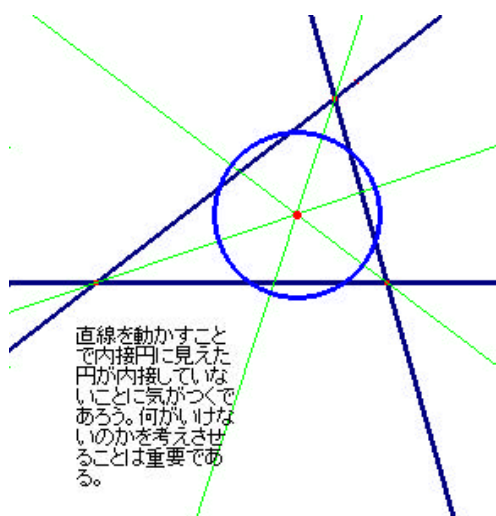


< S 1 > : 円の作図が終了している

< T > : 点を動かして確認してみてください。

< S 1 > 1つの点を動かしてみる。正しく作図できていれば外接円は、そのまま保たれることを確認した。この生徒の場合は、正しく作図されていることが確認できた。

(イ) 3直線に接する円を作図したときのやり取りについて。



< S 2 > : 角の二等分線の交点の作図を行っている。

< T > : どうやって半径を決めて、円を書いたの？

< S 2 > :

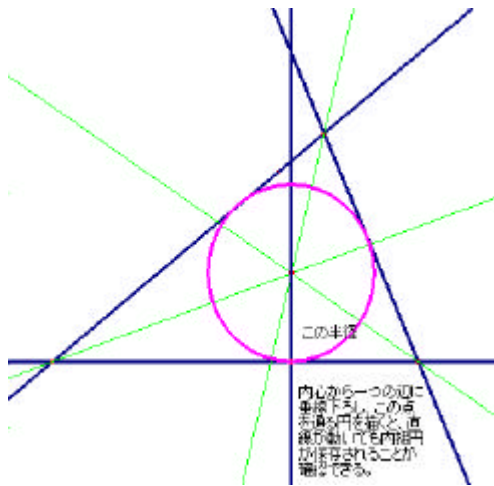
< T > : 1つの直線を動かしてみると左の図のようになってしまう。どこがいけないのか考えてみてください。

< S 3 > : 内心から辺に垂線を下ろすことに気づき、作図が完了している。

< T > : 1つの直線を動かしてみると、上の図のように内接円にならない生徒が多かったと思いますので、全員に説明します。

< S 2 > : 接する円にならないことは確認できました。

< T > : 直線を動かしても接するようになるにはどうしたらよいのですか。



(少し考える時間を与える。)
 半径を正しく決めるにはさらに作図が必要であることに気付かせたい。内心から一つの辺に垂線を下ろすことが、半径を確定させる上で不可欠である。この作図は、直線を動かしても内接円が保存される。正しい作図が行われたことを検証出来た。

< S 2 > : 垂線を引くことに気付き
 正しい作図が完成した。

上の図で“この半径”という言葉が出たら、このときボタンを押して半径を確定させる。これが正しい半径の決め方であることを説明した。

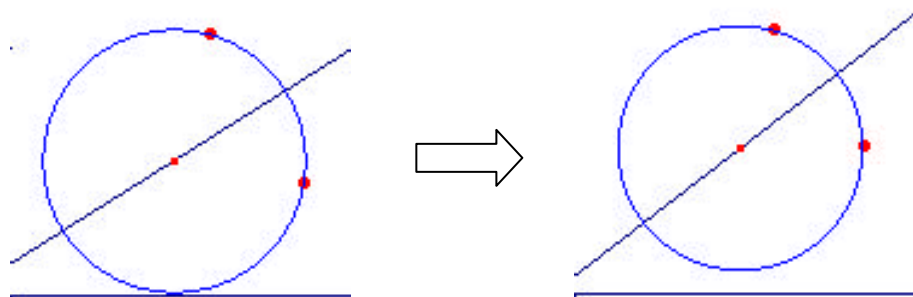
(1)(2) が解決したので、次の問題 (3) の作図を考える。
 (3) 2点を通り、1直線に接する円を作図する。
 (各自考える時間を与える。)

< S 4 > : 垂直二等分線は作図しているが、行き詰まっている生徒が多数いる。

< S 5 > : 直線に接している円を書いている。

一見、左の図のような作図で良さそうに思える。

< T > : 内心のときと同じように点・直線を動かして確認して下さい。



ここで点を動かしてみると、接することが保存されない。この作図ではいけないことを各自確認した。

< S 6 > : 直線に接しない。“正しい作図”ではないことがこのことからわかった。

< T > : つまり、もう一つの条件が必要である。

このように、生徒に疑問点を投げかけながら授業を進めた。さらに、作図の出来具合を見ながら適宜ヒントを出していった。

< T > : 条件をみたす円が作図できたとしてどんなことが成り立っているの考えて下さい。(少し考える時間を与える。)

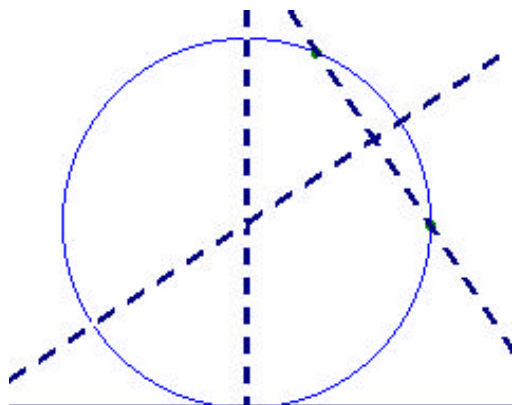
“逆向きに解くこと”に気付かせたい。

< S 6 > : (ワークシートで考えている。)

< T > : 色々な補助線を入れて下さい。

< S 6 > : (カブリを使って考える。)

< T > : 下の図のような補助線を手がかりにして考えて下さい。



“逆向きに解くこと”については、特に注意して教えていくこと必要である。

『むきをかえてゴールから離れ、目的にまっすぐ進まないで逆むきにすすんでゆくことは心理的に抵抗を感ずることであろう。適当な手順を見出すときには、じっさいの行動とちょうど逆の順に進まなければならない。この逆向きな考え方は、注意して示さないと、すぐれた学生でさえ心理的な反発を感じて理解できないであろう。』⁷

< T > : 補助線として、まず、2点 A , B を通る直線を作して下さい。

⁷ ポリア「いかにして問題を解くか」p 64

< S 7 > : (直線 A B を作図する。)

< T > : もとの直線と直線 A B の交点を P にして下さい。次の作業に移る前に、資料にある「方べきの定理」を見てこれをヒントにして、問題 (3) を解くことができます。次の時間にもう一度考えてみます。

以上のようなやりとりして 2 時間目の授業は終了した。最後に、代数的な処理で解ける問題を宿題として提示した。この宿題は、アポロニウスの問題を代数的に解くことで、作図に結びつくヒントが得られないか考えさせる狙いがある。

< 宿題の提示を行う >

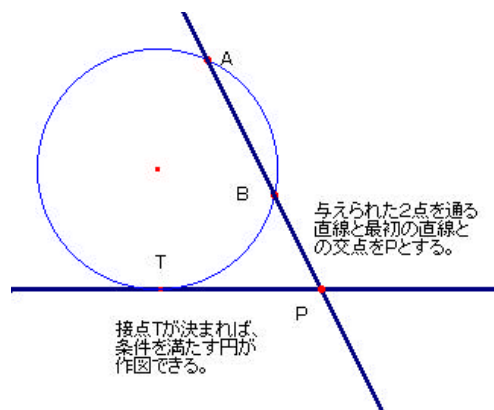
「アポロニウスの問題を代数的方法で解く」ことについて次の条件を満たす円 (中心の座標、半径の大きさ) を求めよ。

1 A (- 3 , 2) B (4 , 1) を通り、直線 $y = 0$ に接する円

2 A (6 , 2) を通り、直線 $y = 0$ 、 $4x - 3y = 0$ に接する円

【宿題の解答・説明、アポロニウスの問題の解法】(3 時間目)

1 A (- 3 , 2) B (4 , 1) を通り、直線 $y = 0$ (x 軸) に接する円を求める。



(2 時間目の終了時に左の図のように 2 点 A , B を結び、直線 A B を作り、与えられた直線との交点を点 P とするヒントを提示した。)

解法 1 : 円の方程式を設定して解く方法。

解法 2 : 中心の座標を設定して、座標を求める方法。

る方法。(生徒の解法 (その 2))

解法 3 : 接点 T の座標を求める方法。(生徒の解法 (その 1))

3 通りの解法を予想した。生徒の解法が解法 2 と解法 3 にほぼ二分された。

<生徒の解法(その1)>について

（方べきの定理を確認中の生徒）(写真2)



簡単な計算によって P A , P B の長さが計算でき、 $PT = 10$ を得た生徒がいた。つまり、 $T(1, 0)$ より円の方程式を求めた。

(写真2) ↑

< T > : 接点はひとつだけですか。

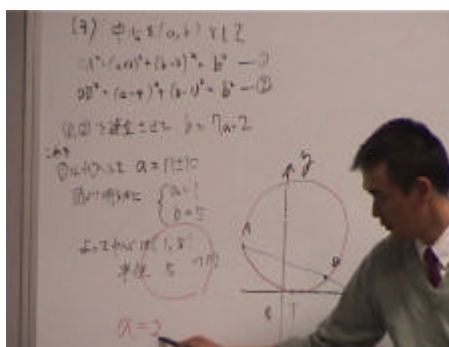
< S 8 > : いいえ。

< T > : もうひとつはどこにありますか。

< S 8 > : 反対の方向、点 P の右の方にもうひとつあります。

(解法2で円の中心と半径を求めた生徒の解法を説明)

(写真3) ↓



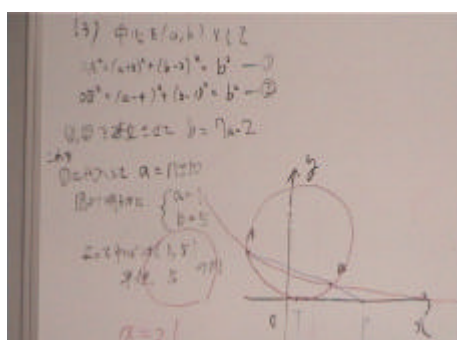
<生徒の解法(その2)>について

< T > : x 軸に接するので円は、中心が (a, b) 半径が b ですね。

< S 9 > : はい。

< T > : あとは、通る点を代入ですね。 a がひとつ出ました。もうひとつはダメですか。

< S 9 > : もうひとつの方もいいみたいです。 < T > : $a = 2$ のときは、半径が大きな円が描けます。(写真4)

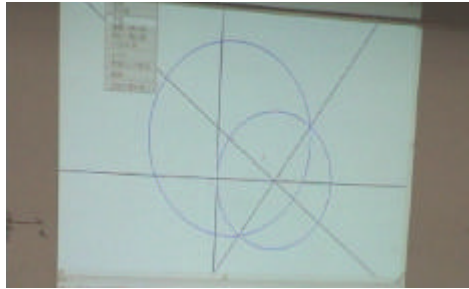


2つの方法で円の方程式を求めた。ここで求める円が2つ存在することが確認できた。

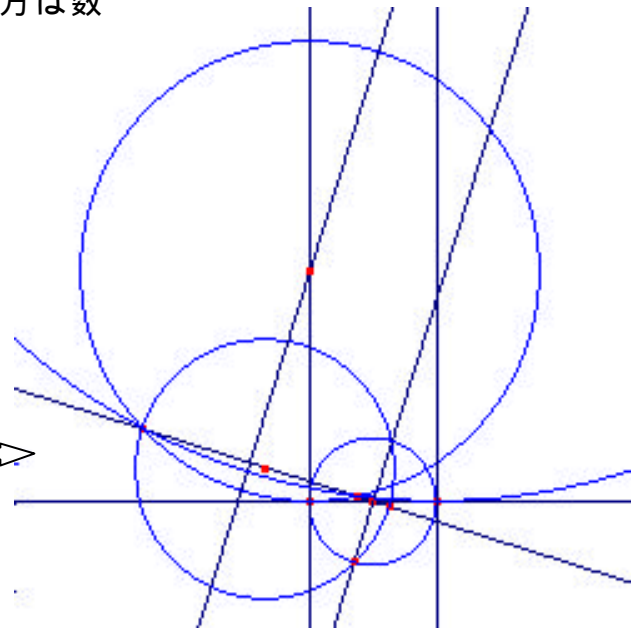
⇐(写真4)

4 比例中項の作図

(ギリシャ数学では、この考え方は数多く出てくる。)(写真5)



作図が完成した生徒の図 →



作図内容を保存したFDを見ると、正しい作図が行われていたことが確認できた。

ただし、授業では、作図方法を一つ示すことにした。(他の作図方法については言及しなかった。)

<問題(3)の作図のまとめを行う>

作図の順序は次の以下の通りである。

与えられた2点A, Bを結ぶ 直線ABと与えられたの直線との交点Pを求める 比例中項を使う 接点Tを求める
3点A, B, Tを通る円を作図する

<T> : 3番目の問題は、結局3点を通る円を作図すればよいことに気が付きましたか。

<S10> : 改めて言われるとその通りです。

問題(3)の作図を終わり、次の問題に進む。

(4) 1点Aを通り、2直線に接する円を作図する。

<T> : 4番目以降の問題は、今までの作図に帰着できる問題があります。そのことを頭の中に入れて取り組んで下さい。

<S11> : 角の二等分線を書いている。

4番目の問題については、角の二等分線に関して点Aを線対称に移動することで3番目の問題に帰着して解くことができるこ

とを確認して授業を終了した。さらに、授業で扱わなかった他の問題は、いずれもその問題よりも前の問題の解法に帰着出来ることを強調した。さらに、10番目の問題については、条件を満たす円が最大8個書けることについても言及した。

5 結果と考察

生徒のアンケートより、課題1から課題4について考察する。

課題1【ギリシャ数学の理解を深めること】について

- ・まわりくどい数学のように思えたが、それはそれで、当時は必要だったと思った。
- ・昔の問題だと軽く見ていたが、大変難しく感じた。
- ・2000年以上前の人がパソコンなどを使わずにこんな問題をよく考えることが出来るなあと感心した。

課題2【アポロニウスの歴史的な業績を理解すること】について

- ・昔の数学者がどんな問題を考えていたかあまり興味がなかったが、
- ・アポロニウスの問題をやってからは少し違う考えになった。アポロニウスは偉大である。
- ・昔は、今のようにはじめから答えがわかっているわけではない問題を自分の力で考え、解を証明するのは大変だと思った。
- ・アポロニウスの問題をニュートンが考えたなんて。歴史の流れを感じた。

課題3【カブリの基本的な操作に習熟すること】について

- ・コンピュータを使うことで意外と簡単に作図ができることがわかった。
- ・失敗しても何回でもやり直すことが出来るのが便利だった。

課題4【幾何学的解法と代数的解法を比較すること】について

- ・作図は難しかったが、作図で気が付かなかった答えが計算で出て、確認になった。
- ・作図が完成したときは、昔の人の解法に近付けた気がした。
- ・「比例中項」についてあまり知らなかったが、円の問題を解くときに使えると思った。

これらの課題に対しての生徒のアンケート結果より、生徒自身が持つ数学観を確認することが出来、その再構成を行ったことがわかった。また、一次文献を使った授業を初めて経験することで、昔の数学ばかりでなく、現在の授業で行っている数学に対しても興味・関心が高まっていることが伺えた。

6 おわりに

今回行った授業は、数学A（平面幾何）、数学（図形と式）が既習である生徒を対象とした。本研究のように、アポロニウスの問題をある程度予備知識を持って解いた場合と、そうでなく解いた場合との諸結果について比較が出来なかった。これらの点も含めて「高校数学における数学史の導入」についての考察を続けていきたい。

謝辞) 研究授業の実施に際して、埼玉県立春日部高等学校の今西善徳先生、江守弘明先生、斉藤芳明先生、保科孝先生、渡辺正弘先生にご指導いただきました。お礼申し上げます。

註1) 本研究は、文部科学省科学研究費、基盤研究B(2)展開研究(課題番号10558032、研究代表者 磯田正美)の一貫として行われた。

註2) 授業の詳細並びに資料等は次に掲示している。

<http://130.158.186.11/mathedu/forAll/project/2000/index>

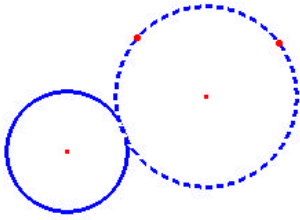
参考文献

- 【1】岩田至康「幾何学辞典5(軌跡・作図・計算問題)」槇書店
- 【2】秋山武太郎(1987)「わかる幾何学」日新出版、pp295 - 298
- 【3】H. デリーH「数学100の勝利Vol. 2 平面図形の問題」シュプリンガー・フェアラク東京 pp20 - 30
- 【4】スチュアート・ホリングデール(2000)「数学を築いた天才たち」講談社、
- 【5】T. L. ヒース(1998)pp164 - 219、pp281 - 305
- 【6】中村幸四郎(1998)「ユークリッド原論」共立出版、pp81 - 82
- 【7】文部省(1999)「学習指導要領」pp55 - 59
- 【8】塚原久美子(1999)第32回数学教育論文pp143 - 148
- 【9】諸藤孝則(1999)第32回数学教育論文pp55 - 60

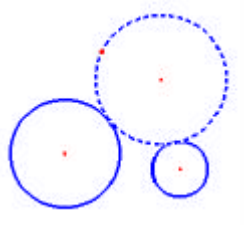
- 【10】高島由順(2000) 第33回数学教育論文pp83 - 88
- 【11】J.Fauvel、J.V.Maanen「History in Mathematics Education」(2000)
- 【12】磯田正美(2000)「数学教育改革の推進とテクノロジー - の利用の実証に関する研究」筑波大学数学教育学研究室、～ミレニアム・プロジェクトに
えて～ pp73 - 87
- 【13】磯田正美(1999)「関数領域のカリキュラム開発の課題と展望～テクノロジー - による探求学習と関数感覚の育成～」筑波大学数学教育学研究室、数
学科教育内容と指導法の創造に関する研究～教育課程改訂動向とテクノ
ロジー - 利用に関連して～
- 【14】磯田正美(1998)「テクノロジー - による新しい関連付けの展望：関数領域
を中心として」筑波大学数学教育学研究室、テクノロジー - の活用による数
学科教育内容と指導法の創造に関する研究～代数、解析、幾何の改革～
pp19 - 44
- 【15】磯田正美(1997)「テクノロジー - 利用による代数・幾何・解析の改革への
パ - スペクティブ～関数・微積 For Allプロジェクト～」筑波大学数学
教育学研究室、テクノロジー - の活用による数学科教育内容の改訂に関する
研究～解析領域、幾何領域を中心に～ pp49 - 103
- 【16】磯田正美・後藤 司(1996)「曲線の表現史における機械作図 linkage の
位置に関する一考察～テクノロジー - 利用による教育改革の中での教育的
価値への再考へ向けて～」日本数学教育学会、第29回数学教育論文発表
会論文集、pp139 - 144
- 【17】清水克彦(1995)「数学教育におけるテクノロジー - 利用について」筑波大
学数学教育学研究室、学校教育におけるテクノロジー - の活用法の開発に関
する研究～関数の探求学習を中心にして～
- 【18】佐伯昭彦・磯田正美・清水克彦(1997)「テクノロジー - を活用した新しい
数学教育」、明治図書
- 【19】佐伯昭彦、磯田正美、清水克彦(1997)シリーズ・魅力ある授業を創る
「テクノロジー - を活用した新しい数学教育 実験・観察アプロ
ーチを取り入れた数学授業の改善」明治図書
- 【20】後藤 司(1997)「曲線の表現史と作図ツールをふまえた解析幾何教材の
刷新に関する一考察」～ギリシャから微分創世記をふまえて～筑波大学
大学院教育研究科平成8年度修士論文

【資料】

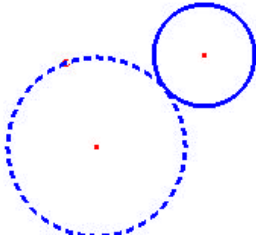
(5) 2点を通り、1円に接する円の作図



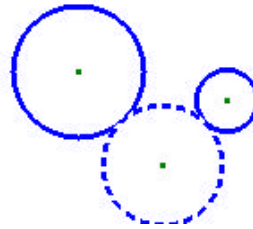
(6) 2つの円に接し、1点を通る円の作図



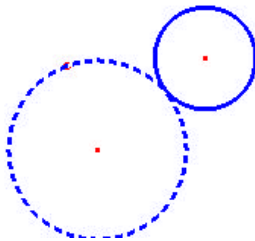
(7) 2直線と1円に接する円の作図



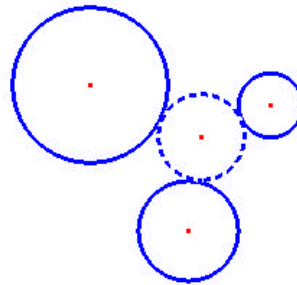
(8) 2円と1直線に接する円の作図



(9) 1点を通り、1直線と1円に接する円の作図



(10) 3つの円に接する円の作図



(注意)(10)を単にアポロニウスの問題ということもある。