出典：中学校・高等学校数学科教育課程開発に関する研究 (8)
発行：筑波大学数学教育学研究室、pp.99-114、2001年3

パッポスの円環問題の探究活動による生徒の数学観の変容について
～原典解釈における道具の効果～

筑波大学大学院修士課程教育研究科
保坂高志

要約

本稿は，原典解釈を取り入れた数学史の学習が生徒の数学観の変容に貢献できるかを明らかにすることを目的とする。目的に対して，数学を相対化することと数学を人間の営みからの所産として捉えるという観点で，教材開発，授業実践を経たところ，生徒に数学観の変容を見出すことができた。このことは，2003 年度から高等学校数学科で導入される数学基礎の中で扱われる数学史学習の有効性を示唆している。

1．はじめに

2000 年 12 月の IEA(国際教育度到達度評価学会)の第三回国際数学・理科教育調査の報告によると，日本の中学二年生は成績が良好でも理数好きのレベルは比較国中で下位のほうであり，理数離れの進行があることがうかがえる。それは，今日学んでいる数学に対して，暗記，難しい，面白くないといったような否定的な考えが先行している生徒が増えてきているからではないだろうか。生徒は数学を，問題を解くだけという一時的なものとして捉えているのであろう。私はそこに学習指導で築かれている数学観の現実があると考えている。日常生活に直接数学がどれだけ活かされているかどうか疑問を持つ生徒はよくみられる。数学そのものが，役に立たないと考える生徒さえいる。実際，目に見えて数学の成果がわかるものは少ないかもしれない。しかし，それだけで，生徒は数学離れになってしまうのが現状である。役に立つ，立たないの観点で数学を捉える限り数学に興味，関心を見出していくのは困難であると考えられる。そこで，そのような生徒の数学観を築き直すことが今後，数学において必要である。数学は人間の営みを通して成り立っているとい

う観点を得て，そこから数学を相対化してこそ数学を学ぶ意義が芽生えると思う。

数学観を改め直すよい機会として，2003 年度から高等学校で導入される数学基礎がある。その中でも特に数学史を用いた話題は注目されていて，興味・関心についての様々な研究がされている。例えば，神長(1984)，沖田(1995)，後藤(1996)，薬師寺(1997)，恩田(1998)などがある。それらは微積分，代数，幾何などで研究がされているが，実践例はそれほど多くない。生徒の数学離れが現実的な問題としてある以上，これからは，実践を踏まえた考察をしていくことが重要であろう。また，授業も従来どおりのものでなく何か新しい学習はないだろうかと考えることも必要であろう。

数学史に関しては，楽しいトピック(読み物)が多いが，数学を発展という視野でとらえた指導などは少ない。そこで，本研究では数学の発展という観点で捉えた数学史の指導の実践例を通して生徒の数学観に注目し，そこから生徒の数学観の変容を図り，その成果について検討する。

2．研究目的・方法

本研究では，以下を目的とする。

目的：原典を教材に取り入れた数学史の学習が，生徒の数学観の変容に貢献できるかを考察する。

目的の達成のため，以下を下位課題とする。

下位課題１：道具，作図ツールによって原典教材を解釈する授業が生徒の理解の向上につながるかを考察する。

下位課題２：それぞれの時代における問題を体験することで，数学を相対化できるかを考察する。

上記の目的に対する研究方法として，原典を取り上げた歴史的テキストを開発した。そして，その教材を用いた授業を実践し，授業の前後でのアンケートと授業毎のアンケートにより，数学に対する見方・考え方がどのように変化しているかを調べる。

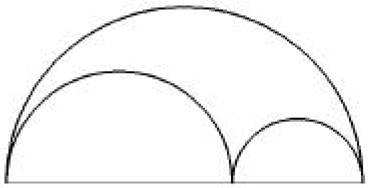
3．授業概要

（1）教材の解説

原典として，パッポスの「集成」の第 4 巻第 2 項，A.B.KEMPE の「HOW TO DRAW A STRAIGHT LINE」，埼玉県立図書館編(1969)の「埼玉の

出典：中学校・高等学校数学科教育課程開発に関する研究(8)
発行：筑波大学数学教育学研究室、pp.99-114、2001年3

算額」を取り上げた。特に，パッポスの「集成」の第4巻第2項で論じられている「靴屋のナイフの作図題」を作図ツールにより生徒が追体験することをねらいとした。そのための数学的知識として，反転変換を理解することが必要であったため，作図ツールを用いる反転変換の作図課題を設けた。また，生徒それぞれが反転変換を道具の構造による解釈として捉えるために「HOW TO DRAW A STRAIGHT LINE」を，安政時代の日本における図形に関する問題に生徒が触れるための「埼玉の算額」を用いた。ある図形に円を内接させた図形に関しての問題をギリシア，安政時代の日本，現在の日本を通して生徒が体験することで，数学を相対化できるような教材づくりを配慮した。



靴屋のナイフ(ギリシア語でアルベロス)

（2）授業環境

①日時：平成12年10月23日，24日，25日

②対象：公立高校2学年（2クラス83名）

数学A「平面幾何」，数学B「複素数と複素平面」は履習済み
反転変換については，未習ではあるが事前課題で補った。

③準備：コンピュータ（Windows），作図ツール(Cabri Geometry Ⅱ，以下カブリと呼ぶ)，リンケージ（LEGO dacta），ビデオプロジェクター，事前課題事前アンケート，事後アンケート，授業終了時毎のアンケート

（3）授業展開

指導目標を以下のように定めた

指導目標：様々な形態で存在している円環問題を学ぶことにより，数学を相対化し人間の営みの所産として認識できるようになる

①様々な形態で表れる靴屋のナイフ(アルベロス)の問題を体験する（1時間目）

アルベロスの問題を考察する動機付けを以下の対話から求めた。

【T：授業者，S：生徒】

〔1〕事前課題の表紙について［図1］

〈T〉:「事前課題の表紙で一番左の図を見ると，大円と小円の間に6個の円が詰まっているけど，まだ残りのスペースに円が

http://math-info.criced.tsukuba.ac.jp/Forall/project/history/2000/pappos-fl/pappos.index.html

入りそうだよね。あといくつくらい入るかな？」

〈S1〉:「4つくらい。」

〈T〉:「もっと，たくさん入ると思う人はいる？」

→沈黙

〈T〉:「5つと思う人？6つと思う人？・・・，たくさんと思う人？」

→たくさんと思う人のところで多数が挙手

〈T〉:「そうだね，いくつでも入りそうだね。じゃあ，それらの円の半径には何か関係はありそうかな？円の半径はどのように変化している？」

〈S2〉:「だんだん小さくなっている。」

〈T〉:「どうやってそれらの円を描いたのだろう？」

→沈黙

〈T〉:「みんなが学んできた三角形の内接円について同じことを考えてみよう。」

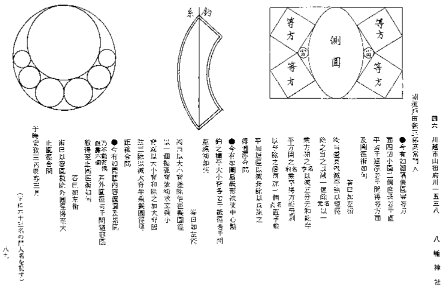


図1　埼玉の算額

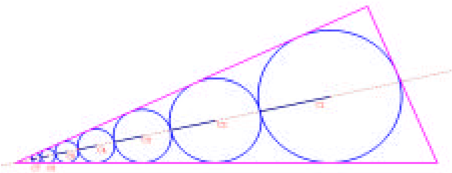


図 2　三角形の内接円

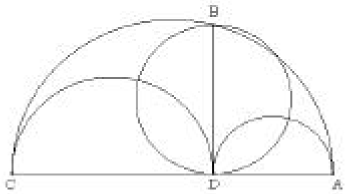


図3　補助定理集

〔2〕三角形の内接円について［図2］

〈T〉:「三角形の内心はどうやって求める？」

〈S3〉:「角の二等分線の交点。」

〈T〉:「三角形の内接円と 2 辺の間に円を詰めていくけど，いくつくらい描けるかな？」

〈S4〉:「たくさん。」

〈T〉:「円の半径の関係はある，ない？」

〈S5〉:「ありそう。」

〈T〉:「どうやったらかけそう？」

〈S6〉:「内接円に接線をつくってもう1つの三角形をつくってまたその中に円を描く。」

〈T〉:「そうだね。そうやって円を描いていけば，三角形の中に円を詰めていけるね。半径は等比数列をなしています。これからは，ある図形について円が入っているような問題を考えていきます。」

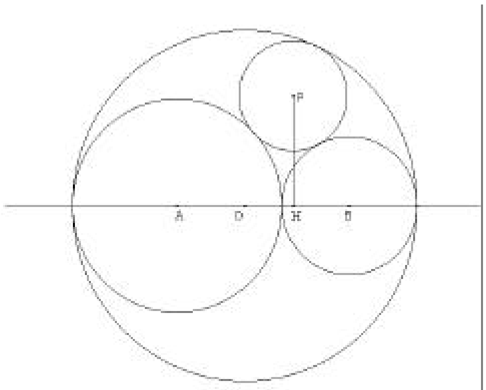


図4　高校入試

(お茶の水女子付属高改題)

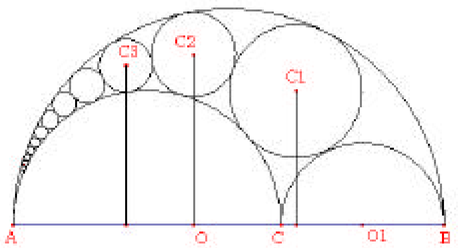


図5「集成」第 4 巻第 2 項

出典：中学校・高等学校数学科教育課程開発に関する研究 (8)
発行：筑波大学数学教育学研究室、pp.99-114、2001年3

ある図形に円が詰まっている場合，その円列の半径はなんらかの関係をなしていると考えることができ，問題として考える意義のあることだという意識づけを行った。

以下で，アルベロスに関する問題について触れた。

写真１　授業風景

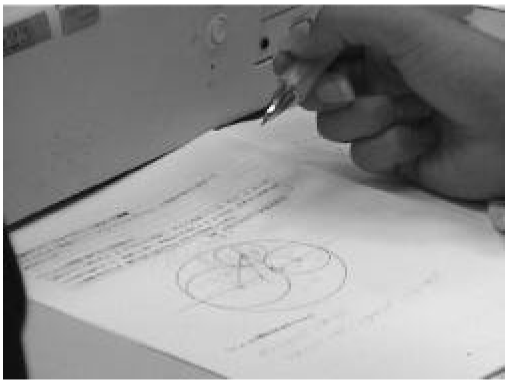


写真２　問題に挑戦中

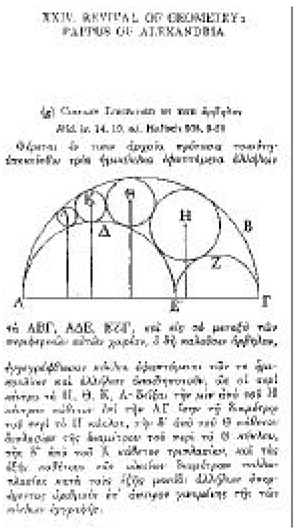
〔3〕アルキメデスの「補助定理集」
（*Liber Assumptorum*）［図３］

〔4〕現在の高校入試
(お茶の水女子大付属高改題)　[図４]

〔5〕パッポスの「集成」第 4 巻第 2 項［図５］

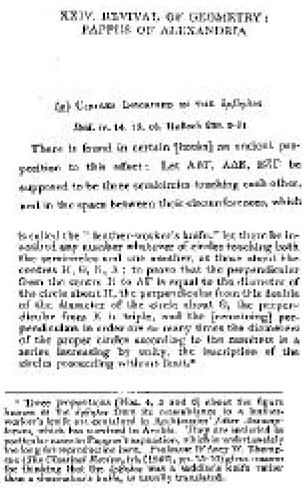
パッポスが「集成」第 4 巻第 2 項において取り上げた問題をここでは円環問題，またはアルベロス問題という。実際に〔4〕でアルベロスに円が１つ入っている場合について生徒に問題を解く時間を授業中に与えたが，問題文から適切な値を図に書き込める生徒が多くなかった。そのため，その円の直径とその中心から直線 AB に下ろした垂線の長さは等しいことを導くところまで至らなかったので，残りは宿題とした。

〔5〕の円環問題より得られたパッポスの定理は以下で示しておく。原典(ギリシア語)も参考にしていただきたい。



XXIV. REVIVAL OF GEOMETRY: PAPPUS OF ALEXANDRIA

原典（ギリシア語）



XXIV. REVIVAL OF GEOMETRY: PAPPUS OF ALEXANDRIA

There is found in certain [books] an ancient proposition to this effect: Let ABΓ, AΔE, EZΓ be supposed to be three semicircles touching each other, and in the space between their circumferences, which

原典の英語訳

〔5〕パッポスの定理

内接円 C1，C2，C3･･･を順に描いてどれもが半円 AB と AC に接し，かつ円自身も順に接しあっているようにし，これらの円 C1，C2，C3･･･の直径をそれぞれ d_1，d_2，d_3･･･，中心 C1，C2，C3･･･から AB に下ろした垂線の長さを p_1，p_2，p_3･･･とすれば，

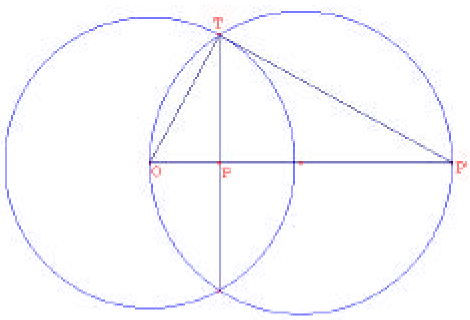
$p_1=d_1$，$p_2=2d_2$，$p_3=3d_3$，･･･

となる

http://math-info.criced.tsukuba.ac.jp/Forall/project/history/2000/pappos-fl/pappos.index.html

②パッポスの円環問題の解法で用いられる反転変換をカブリと反転機を使って理解する。(2 時間目)

この授業では複素数についてはあまり触れずに，以下のように反転変換を定義した。



> 定点 O を中心とし半径 k の円が与えられたとする。そこで，(O 以外の) 任意の点 Pの反転像 P' は半直線 OP 上にあって，O からの距離 OP' が
>
> $$OP \cdot OP' = k^2$$
>
> をみたすような点であるとする。

以下で，パッポスの円環問題を追体験するのに必要な反転変換をカブリによる作図で理解する。課題は１から５まで設けた。課題の内容については，以下のとおりである。

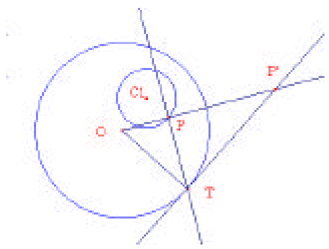
課題１：反転円内の円Ｃ１を反転させる

課題２：反転円外の円 C２を反転させる

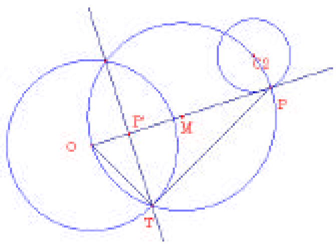
課題３：反転の中心 O を通る円を反転させる

課題４：円 C３の半径を変えてみると P'の軌跡はどうなるか考察する

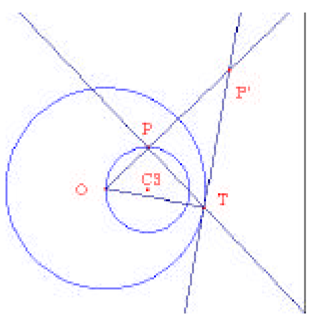
課題５：円 C３が，反転円 O と２点で交わるときの P'の作図方法を考える



課題１



課題２



課題３

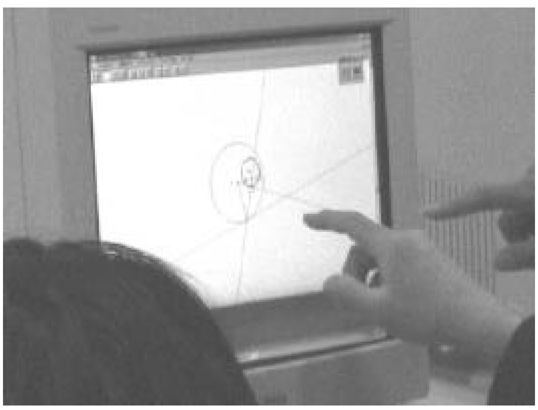


写真３　カブリで反転変換

出典：中学校・高等学校数学科教育課程開発に関する研究 (8)
発行：筑波大学数学教育学研究室、pp.99-114、2001年3

パッポスの円環問題を解決するためには，次の 2 点が必要であった。

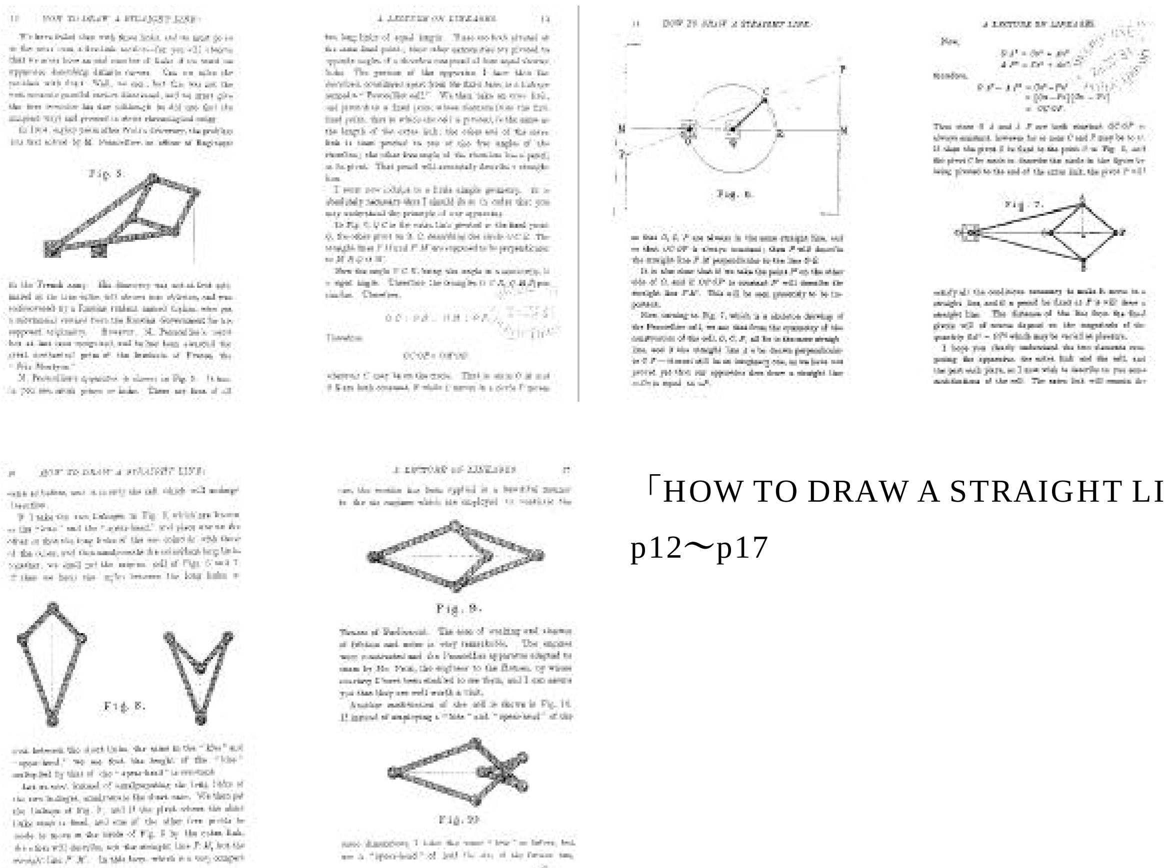
①反転円の内部(外部)の円は反転円の外部(内部)の円へ移る。（課題１，２）

②反転円と 2 点で交わり，かつ反転円の中心を通る円はその 2 交点を通る直線に移る。（課題３，４，５）

写真４　課題への取り組み

反転円の内部の点，外部の点をそれぞれ反転変換させる場合，それぞれの反転像は定義の作図により求められるのだが，内部の点か外部の点で作図の方法が違うことに指導の重点を置いた。課題１～５の出来具合について，生徒間に差があったため，適宜時間を区切って展開した。

反転変換を表わす＜反転機＞については，授業中，レゴで作成したものを提示した。宿題として，文献「 HOW TO DRAW A STRAIGHT LINE 」(A.B.KEMPE 著)を読み，その構造を理解することと数学を学ぶことに関係があるかという問いを課した。



「HOW TO DRAW A STRAIGHT LINE」
p12～p17

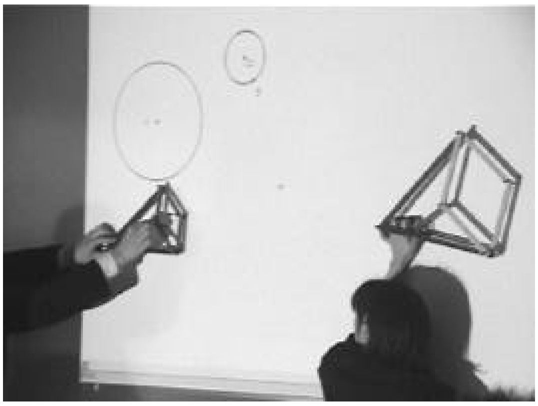


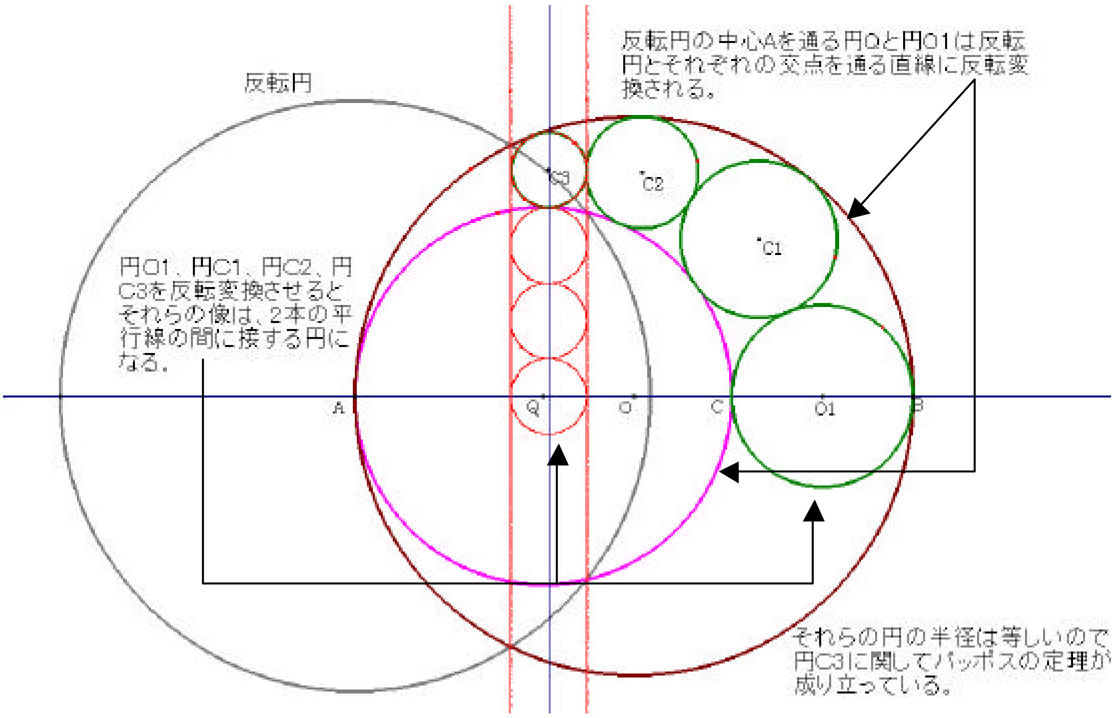
写真５　反転機の提示１

写真６　反転機の提示２

③カブリを使い，パッポスの円環問題の解法を追体験する。安政時代の日本における円環問題に触れ，円環問題を相対化する。（3 時間目）

〔１〕円環問題の追体験※

2 時間目で学んだ，円から円に移る反転変換と円から直線に移る反転変換の考えをもとにパッポスの円環問題をカブリを用いて実際に調べた。ここでは，下の図のようにアルベロスに円が３つ入っている場合についてを示した。（n 個目の円においても，反転円をその n 個目の円と直角に交わるように定めれば，同様の議論が成り立つ。）

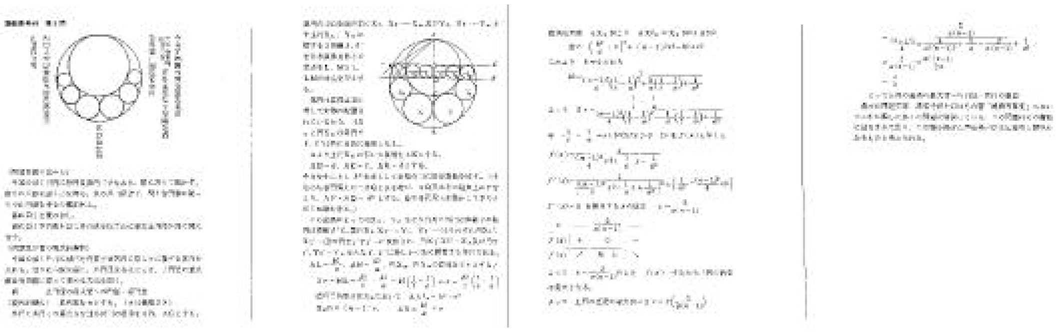


（※）原典によると，当時のパッポスの円環問題では，アルベロスに円列が内接していたとすると，それらの直径と垂線の間に成り立つ関係について述べている。よって，この授業でも，同様にアルベロスに円が内接していたという仮定のもとでの議論を行った。

出典：中学校・高等学校数学科教育課程開発に関する研究 (8)
発行：筑波大学数学教育学研究室、pp.99-114、2001年3

〔2〕安政時代の日本における円環問題の解釈（事前課題の表紙で触れている）

和算の世界においては，図形の性質などを何らかの経験によって知ったことを神社や仏閣に奉納する絵馬（算額という）などで民衆に発表していたのであり，それを証明するという概念はなかった。従って，算額で表わされているものを現代的に解釈すると，問題とそれに対する答え(求められた性質)だけが読み取れるのである。それに現代的解法を加えて解釈すると，パッポスの円環問題と同様に反転変換が用いられているのである。



安政時代における円環問題の
現代的解釈と現代的解法

4．結果と考察

下位課題１：道具，作図ツールによって原典教材を解釈する授業が生徒の理解の向上につながるかを考察する。

授業終了毎の調査でそれぞれ以下の設問に答えてもらった。

2 時間目の結果
（表の数は人数を表わす）

①作図ツール（カブリ）を使うことで，反転について	
よく理解できた	・・・17（26%）
理解できた	・・・29（45%）
どちらともいえない	・・・13（20%）
理解できなかった	・・・4（6%）
ほとんど理解できなかった	・・・2（3%）

①より，カブリを使うことで，生徒の理解は観察・実験・操作などの外的活動からも得ること可能になる。「実際に軌跡を書いてみて，反転の構造がよく分かった。」という生徒のコメントがあるように，作図ツールが生徒の理解のための新たな媒介として可能であるという示唆が得られている。反転変換の理解においては，全体の約７割は理解できていたが，約１割の生徒は理解が困難だったようだ。

②過去に作られた反転機の構造を考えることは，数学と	
関係がある	・・・49（75%）
どちらともいえない	・・・16（25%）
関係がない	・・・0（0%）

②より，反転機の構造を理解することと数学とは無関係であるという生徒は一人もいなかった。実際,次のようなコメントがあった。「問題を解くときどうやって解くのかを考えていたけど，その問題自体の性質みたいなものを考えるようになった。」このコメントから，道具の構造を理解するという活動が，数学の問題に対する見方を変容させていることがわかる。また，次のようなコメントもあった。「数学が計算だけでなく図形を作図してわかるものもあるんだなと思った。」このコメントから，生徒が数学の問題解決手段に作図の考えを見出していることがわかる。これらから，道具の解釈は，生徒の問題に対する見方をより深いものにさせていることがわかる。

作図ツールという新たな媒介で過去の問題を考察し，さらに過去の道具(ここでは反転機)の構造を理解していく授業は，生徒にとっても数学に新たな観点を加えることができる。今後進めていく価値があるのではないだろうか。

この授業に対して，他の生徒のコメントは以下のようである。数学そのものについての見方(奥の深さ，必要性，様々な解き方)などが変わった生徒がいた。これはまさに数学観の変容である。また，数学が過去の人によって成り立っているというものや授業そのもので驚きを得た生徒も多かった。しかし，授業内容そのものに対し，難しかったという意見もあった。

【授業に対するコメント】（生徒のそのままの記述）

- たくさんの人々の努力と発見のおかげで今の数学が成り立っているということをあらためて実感した。
- 円というものをあまり深く考えたことはなかったので昔の人たちがこんな複雑な事を研究していたのは驚きだった。また，こういった事を考えつく発想力はすごいと思った。
- 偉大な数学者によって今の数学が成立しているのにたいへん驚いた。
- 数学は奥が深いと感じた。昔から数学は必要なものだったらしい。
- 数学も公式を使えば解けてしまうのも，いろいろな考えで解けるのかなと思った。外国語の文献を読んで古代の考え方などを学ぶのもよいことだと思った。
- 意外な方法で円が書けることがわかった。
- コンピュータを使うと，すべての点においての反転像を確かめることができたので分かりやすかった。

出典：中学校・高等学校数学科教育課程開発に関する研究(8)
発行：筑波大学数学教育学研究室、pp.99-114、2001年3

下位課題２：それぞれの時代における問題を体験することで，数学を相対化できるかを考察する。

１時間目の結果
（表の数は人数を表わす）

③数学を歴史的な視点でとらえたことは	
ある	・・・8（10%）
どちらともいえない	・・・15（19%）
ない	・・・58（72%）

④パッポスが円環問題を拡張したことは，数学において	
意味のあること	・・・55（69%）
どちらともいえない	・・・25（31%）
意味のないこと	・・・0（0%）

３時間目の結果
（表の数は人数を表わす）

⑤パッポスが円環問題を拡張したように，今後円環問題は	
発展するだろう	・・・48（62%）
どちらともいえない	・・・28（36%）
発展しないだろう	・・・2（2%）

⑥数学を歴史的に捉えることは	
必要である	・・・46（58%）
どちらともいえない	・・・27（34%）
必要ではない	・・・6（8%）

③より，この授業を受けるまで全体の７割くらいの生徒は数学を歴史的視点で捉えたことがなかったようである。したがって，この授業が数学を歴史的に捉えるということを機会に新たな数学観の形成につながると期待できる。

④より，アルキメデスの『補助定理集』で取り上げられた「円環問題」から，パッポスの『集成』で取り上げられた「円環問題」へと，問題が拡張されてきたことは，全体の半数以上が意味のあることだとしていたことがわかった。したがって，数学の問題を断片的に捉えるという視点から，それらを相対化して捉える新たな視点を期待できる。

１時間目終了時の設問で，パッパスが円環問題を拡張したことに対して，生徒の意識調査をしたが，３時間目終了時，⑤の設問を行ったところ，生徒の半数以上が円環問題に対して発展するだろうという意見を持っていた。ギリシア時代における，アルキメデスの「補助定理集」での円環問題やパッポスの『集成』での円環問題，現在の高校入試で導入された円環問題，算額で表現されている円環問題など，様々な形態で存在していた円環問題に触れることで，それらのつながりや発展性を見いだし，さらには数学全般に対してもそのような見方ができるようになっているといえよう。

１時間目終了時の③の設問では，数学を歴史的な視点で捉えたことがある生徒は全体の約１割程度であったが，３時間目終了時には⑥の設問の結果のように数学を歴史的に捉えることに対して６割弱の生徒がその必要性を意識するようになった。実際，授業を通して変わったと思うこととその理由についてコメントを求めたところ，次のようなものがあった。生徒１：「数学を歴史の面でとらえてみたいと思うようになった。数学者たちが発見したことや，どのように当時証明したかのか知りたい

と思うようになった。」（変容理由→）「自分の中で初めて数学を歴史の流れの中でとらえる機会を得て，どんな歴史を経て現在へと至っているのか興味をもったので。」生徒２：「数学にも面白そうな歴史がたくさんありそうだなあと思いました。数学に興味をもっていくことは結構これからも大切になっていくことになると思いました。」（変容理由→）「数学は今だけのものだと思っていたから。」これらのコメントから，数学を歴史的に捉えることが生徒の学習意欲の向上や数学を相対化することに効果があるといえる。

数学に対するイメージの記述，この授業を通して変わったと思うところ，質問･感想等の自由な記述について以下に挙げておく。数学に対してのイメージでは，「可能性」，「発見」，「奥深さ」などのような数学の発展に関するものがあった。これらの考えは数学を学んでいく上では，大切な観点であるといえる。しかし，依然数学に対し，「問題を解く」，「暗記９割」，「試験に必要なもの」といったような，断片的な考えが先行している生徒もいた。また，この授業を通した変容では，数学を人間の営みとして捉え，数学に対して現在だけでなく過去や未来に対しても何らかの考えを持つことができている生徒も現れた。

【数学に対するイメージ】（生徒のそのままの記述）

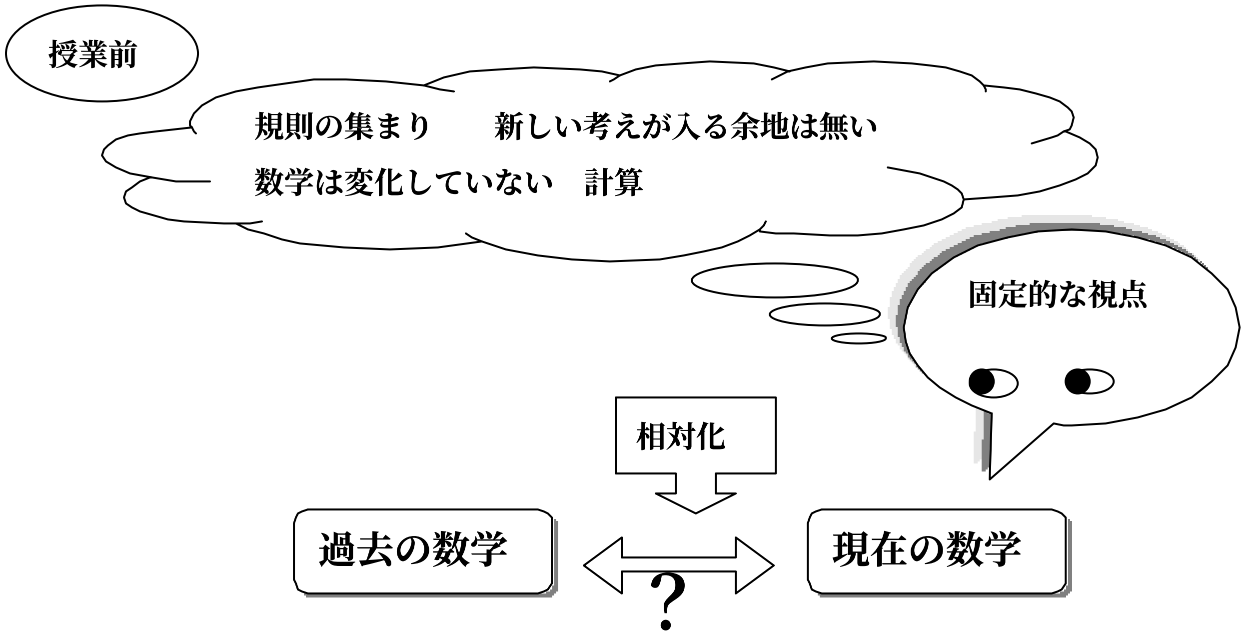
- 空間，宇宙
- 奥が深い
- 無限の可能性を秘めたもの
- 新たなことを考えること
- 無限まではいかないがやり方は多数
- 試行錯誤の世界
- 神秘的
- 数学は謎につつまれている
- 新しい発見を楽しむもの
- 不思議なもの，勉強しても勉強してもきりがないもの，無限の可能性を秘めているもの
- 様々の法則を組み合わせて新しい発見をしていくもの
- どんどん発展していくものだ
- 奥が深くて，まだまだ発見がありそうなもの

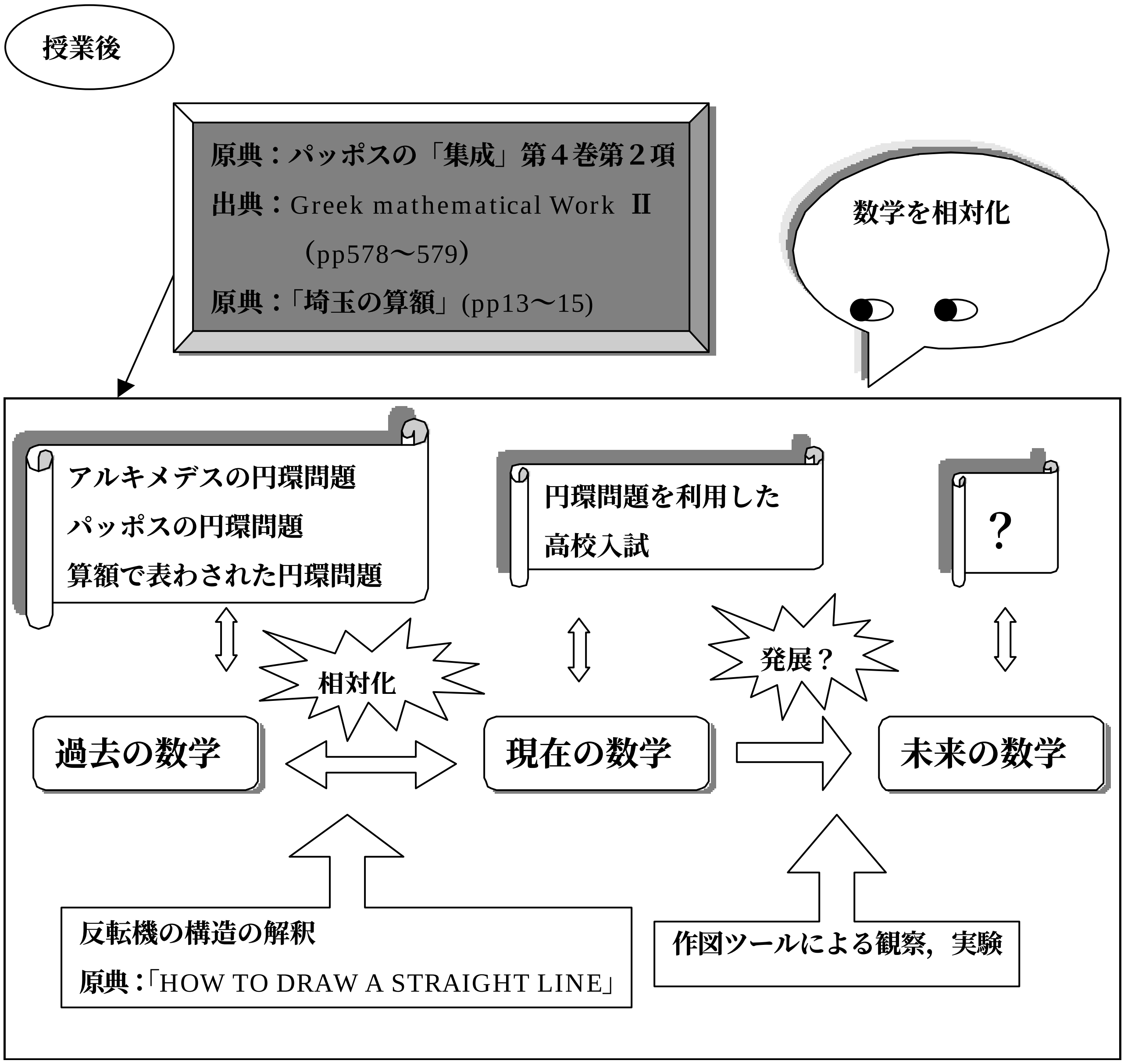
出典：中学校・高等学校数学科教育課程開発に関する研究 (8)
発行：筑波大学数学教育学研究室、pp.99-114、2001年3

【授業後の変容や自由な記述】（生徒のそのままの記述）

- 数学はどこまでも進化する！
- 数学ってもう，掘りつくされた学問なのでしょうか。
- 数学の世界はまだまだ終わらないと思うし尽きないと思う。
- 数学は単なる受験の手段ほどにしか考えていなかったが，大昔の人が考え出した**偉大な財産**だと思うようになった。
- **歴史的な観点**で数学をとらえられるようになり，数学とは何かという疑問が少し解けた感じがした。しかし，それと同時に数学は奥が深いなぁと痛感させられた。僕の終わりなき疑問の解答を出すのにはまだまだ先だと思い，常にこの疑問に立ち向かっていきたい。

以上のコメントなどから数学史を活用した授業が生徒の数学観の変容に影響を及ぼしていることがわかる。特に上記の自由な記述における生徒の数学観の変容に注目すると，数学史を題材として用いた授業によって，数学を相対化し数学を人間の営みから得られたものであるという認識ができるようになってきている。数学を歴史的な観点で捉えるという活動が今までの数学の中ではあまり強調されていなかったこともあり，このような活動が生徒に対して新鮮であったようである。この授業を通して期待される数学観の変容は次の図のようにまとめることができる。





5．おわりに

本研究では，原典を教材に取り入れた数学史の学習が，生徒の数学観の変容に貢献できるかに焦点を当ててきた。ここでは，パッポスの円環問題を中心にした題材を扱ってきたが，その題材を道具，作図ツールなどさまざまな媒介を通して学習することで，数学を以前よりも大きな視野で捉える生徒もいたことがわかった。

授業後においても数学を一時的な観点で捉える生徒も見られたが，それ以上に数学に対して見方が変わったという生徒が増えたという点でこの実践例が果たした役割は大きいと考えられる。現行の学習指導要領のもとでもこのような意識を生徒にもたせる学習は可能であるかもしれないが，数学史を活用した学習が最も数学観の変容には貢献できると

出典：中学校・高等学校数学科教育課程開発に関する研究 (8)
発行：筑波大学数学教育学研究室、pp.99-114、2001年3

いえよう。この実践例で生徒に数学観の変容を図る機会を与えることができたように，数学基礎における数学史学習は生徒にとって有効であるのではないだろうか。

謝辞
研究授業に際して，埼玉県立春日部高等学校の今西善徳先生，江守弘明先生，斎藤芳明先生，早乙女勤先生，保科孝先生，渡辺正弘先生を始め数学科の先生方には貴重な御意見，御指導をいただきました。深く御礼申し上げます。

註 1）本研究は，科学研究費，基礎研究Ｂ(2)展開研究（課題番号 10558032，研究者代表　礒田正美）の一貫として行われた。
註 2）授業の詳細並びに資料等は次に掲示している。
http://130.158.186.11/mathedu/forAll/project/2000/index

参考文献

【1】A.B.KEMPE(1877). HOW TO DRAW A STRAIGHT LINE. MACMILLAN AND CO, pp12-17
【2】Ivor Thomas(1941). Greek Mathematical WorksⅡ. Harvard University, pp564-621
【3】礒田正美(1999).「数学の弁証法的発展とその適用に関する一考察～「表現の再構成過程」再考～」筑波数学教育研究,第 18 号,pp11-20
【4】礒田正美(2000).「メディアの歴史的変遷と算数・数学文化の変遷」中学校･高等学校数学科教育課程開発に関する研究(7) 筑波大学数学教育学研究室, pp73-79
【5】礒田正美(2000).「マルチメディアの導入でかわる教育観・指導法」中学校･高等学校数学科教育課程開発に関する研究(7) 筑波大学数学教育学研究室, pp80-82
【6】礒田正美(2000).「道具が媒介する図形における「観察，操作，実験」型探究の楽しさ」中学校･高等学校数学科教育課程開発に関する研究(7) 筑波大学数学教育学研究室, pp83-87
【7】礒田正美(2000).「手段としての道具から媒介としての道具への教具観の転換に関する一考察～数学史上の道具の機能・制約とのその反映に関する検討～」第 33 回数学教育論文発表会論文集 日本数学教育学会, pp193-198
【8】岩田至康編(1971).「幾何学大辞典１」槇書店. pp283-284
【9】大野栄一(1993).「定規とコンパスで挑む数学」講談社. pp197-207, pp258-264

【10】沖田和美(1996).「学校数学における数学史を生かした指導に関する一考察」平成 7 年度筑波大学大学院教育研究科修士論文.
【11】恩田洋一(1999).「一次文献を利用した数学史教育に関する一考察～「数学基礎」に関連して～」平成 10 年度筑波大学大学院教育研究科修士論文.
【12】神長幾子(1985).「高等学校における微積分指導に関する一考察～微積分形成の歴史をふまえて～」昭和 59 年度筑波大学大学院教育研究科修士論文.
【13】コクセター(1969).「幾何学入門」明治図書. pp80-99
【14】後藤司(1997).「曲線の表現史と作図ツールをふまえた解析幾何教材の刷新に関する一考察～ギリシャから微積分創成紀をふまえて～」平成８年度筑波大学大学院教育研究科修士論文.
【15】埼玉県立図書館編(1969).「埼玉の算額」埼玉県立図書館.pp13-15(例題における現代解法), p89
【16】T.L.ヒース(1998).「復刻版　ギリシア数学史」共立出版. pp275-276, pp354-379
【17】スチュアート･ホリングデール(1993).「数学を築いた天才たち上」講談社. pp107-148
【18】ボイヤー(1984).「数学の歴史２」朝倉書店. pp18-20, pp95-104
【19】文部省(1999).「高等学校学習指導要領解説　数学編　理数編」実教出版.
【20】薬師寺將二(1998).「解析の歴史的変遷を踏まえた曲線の探究に関する一考察～作図ツールの使用を前提に～」平成 9 年度筑波大学大学院教育研究科修士論文.