「Napier による対数の発見」の学習による数学的意義理解の一考察

筑波大学大学院修士課程教育研究科

寒河江　雄一郎

章構成

要約

本研究では、対数の学習において原典解釈と計算尺の利用は生徒が対数を有用なものとして捉えるのに効果があるとの立場から、「Napier による対数の発見」の教材化を図り、実践授業を行った。Napier は、指数の概念がないときに積から和への変換に着目し、等差数列と等比数列との対応づけを考えて対数の定義を行った。この授業により生徒は異文化体験をすることができる。生徒に対して行った事後アンケートをもとにした議論から、筆者は原典解釈と計算尺の利用を、生徒が対数を有用なものとして捉えるのに効果があると主張する。

キーワード：対数，異文化体験，原典解釈，計算尺の利用

1. はじめに

平成 15 年度から施行される高等学校学習指導要領には、数学Ⅱの内容に「三角関数、指数関数及び対数関数について理解し、関数についての理解を深め、それらを具体的な事象の考察に活用できるようにする」との記述がある。しかし筆者は、対数関数が指数関数の逆演算として定義されているために授業では具体的な事象との結びつきが扱われず、対数について抽象的なイメージばかりを持っている生徒が多いと考える。筆者は、具体的な事象と結びつけるために、生徒の対数に対する具体的なイメージへの広がりが必要なのではないかと考える。

礒田(2001) は「異文化体験を自らの文化を自覚し、その文化を発展させる文化的視野の覚醒への好機」(礒田, 2001, pp.40:9-40:11) であると述べ、数学史の原典解釈が文化的視野の覚醒機会を提供しうると論じている。筆者は、数学史において対数が指数よりも早く考え出され、現在の指導内容のように指数の逆演算として定義されたものではないことから、「Napier による対数の発見」に関する原典解釈が生徒の指数の逆演算として作られた対数文化を発展させる機会を提供するものであると考える。Napier が対数を発見したのに関連して、Oughtred が対数を利用した道具である計算尺を発明

した。筆者は、原典解釈に伴って道具を利用することは意義があると考える。以前は指導内容に計算尺の利用が入っていたが、昭和 45 年度の学習指導要領改訂により内容からなくなり、代わりに計算機が取り入れられた。計算尺が取り扱われなくなった理由として、計算尺の利用は対数計算をすることが目的であり実用性と誤差の実態を知るのに有効であったが、計算機の普及により、計算力の涵養や数式の変形から数学的な考えを育成することにねらいが変わってきたことが挙げられる。しかし、筆者は計算尺を対数の発見に深く関わっているものとして価値があると考える。そこで計算尺を代数的な考え方を深めるためではなく具体的な事象の考察に必要であると考える。本研究では、実践授業を通して、「Napier による対数の発見」の原典解釈によって生徒が対数の有用性を理解する効果と、そこで計算尺を利用する価値を議論する。

2. 研究の目的と方法

（1）研究目的

「Napier による対数の発見」を題材として、原典解釈の授業と計算尺を道具として利用した授業を展開し、数学史の学習が生徒の対数に対する抽象的なイメージから具体的なイメージへの広がりをもたらし、対数を有用なものであると生徒が捉えるのに貢献できたかを示す。

この目的に応えるため以下の課題を設定する。

課題１：原典解釈により、対数の有用性を生徒が捉えることができるかどうかを明らかにする。

課題２：対数の学習を歴史的な視点から眺め、そこで計算尺を利用することにより、生徒が対数に対して持っていた抽象的なイメージを具体的なイメージへと広げることに効果があるかどうかを調べる。

（2）研究方法

「Napier による対数の発見」に関する原典を利用し、教材化を図る。そして実践授業を行い、授業の様子を撮影したビデオ、事前・事後のアンケートおよび生徒の感想をもとに、設定した課題が達成されたかを検証する。

3. 「Napier による対数の発見」の教材化

対数を考案したのは John Napier (1550-1617) で、彼の著書に『Mirifici Logarithmorum Canonis Descriptio』(1614)、『Mirifici Logarithmorum Canonis Constructio』(1619) がある。前者では対数の定義、性質、対数表、その手引書などが記され、後者では対数表作成の詳細な過程などが記されている。当時は指数の概念がなく、対数が現在の指導内容のように指数の逆演算として定義されたものではないことから、筆者は Napier の対数の定義に注目した。『Mirifici Logarithmorum Canonis Descriptio』は入手困難であるため、その英訳本『A Description of the Admirable Table of Logarithmes』を原典として教材化を行った。

以下は、Napier が提出した対数の定義である。（図 1 の二重線囲いの部分）

The Logarithme therefore of any sine is a number very nearly expressing the line ア, which increased equally in the mean time イ, whiles the line of the whole sine decreased proportionally into that sine ウ, both motions being equal-timed エ, and the beginning equally swift.

原典では、この前の部分で以下の５つの定義を行っている。

1. Definition　Line is said to increase equally, when the point describing the same, goes forward equal spaces, in equal times, or moments.

2. Definition　A line is said to decrease proportionally into a shorter, when the point describing the same in equal times, cuts off parts continually of the same proportion to the lines from which they are cut off.

3 Def.　Surd quantities, or unexplicable by number, are said to be defined, or expressed by numbers very neere, when they are defined or expressed by great numbers which differ not so much as one unite from the true value of the Surd quantities.

4 Def.　Equal-timed motions are those which are made together, and in the same time.

5 Def.　Seeing that there may be a slower and a swifter motion given then any motion, it shall necessarily follow, that there may be a motion given of equal swiftness to any motion (which we define to be neither swifter nor slower.)

筆者はこれを次のように解釈した。

- 下線部アをみると、Logarithme の定義はある条件によって決まる線分を非常に近く表現する数として与えられている。
- 下線部イは、線分が次第に増加していき、同じ時間間隔で区切ると長さが等差数列になっている線分ということである。
- 下線部ウは、線分が次第に減少していき、同じ時間間隔で区切ると長さが等比数列になっている線分ということである。
- 下線部エは、時間に対応して２つの線分が変化するということである。

下線部イ,ウ,エの解釈については、“1. Definition”“2. Definition”“4 Def.”を踏まえたものである。筆者は、Napier が対数の考案に際して、等差数列と等比数列の対応を考え、媒介として線分と時間を用いたのではないかと考える。

Jahnke(2000) は「Incorporating primary sources is not good or bad in itself. We need to establish the aims, including the target population , the kind of source that might be suitable and the didactical methodology necessary to support its incorporation.」(Jahnke, 2000, pp.292:38-293:2) と述べている。原典を用いること自体が重要なわけではなく、生徒と原典との結びつき、それを支えるのに必要な方法論などを含む目的をしっかり持つべきである。授業では、生徒が原典解釈を通して Napier の定義したものが対数であるということに気づくことを目標に設定した。そこで原典のなかの Logarithme の文字は黒塗りで消して提示し、対数という語も用いずに授業を展開した。時間の関係上、“3Def.”

と“5Def.”には触れず、“1. Definition”“2. Definition”“4Def.”を生徒が順次原典解釈していくことにした。授業資料には原典のほかに日本語訳を付した。注意点として、原典解釈は教師がやるのではなく、生徒が行うものであることを心がけた。

計算尺の利用に関しては、その使用法と原理の理解という数学的活動が中心に行った。授業資料では、計算尺を最初に作った人として William Oughtred (1574-1660) の紹介と、Napier の対数と計算尺とのつながりを示すために、Edmond Gunter (1581-1626) が発明した“Gunter's scale（ガンター尺）”の紹介をした。計算尺で取り扱う対数は常用対数であるため、生徒が混同しないように、常用対数を考案した Henry Briggs (1561-1631) の紹介と 0 から 1000 までの常用対数表を付しておいた。

4. 「計算を簡単にやっちゃおう」の授業概要

⑴ 授業環境

① 日時：平成 14 年 12 月 13 日，19 日（50 分×2）

② 対象：筑波大学付属駒場高等学校２年２組（対数は既習）

③ 準備：コンピュータ(Windows)、プロジェクター、Microsoft Power Point 2000、作図ツール（Cabri Geometry Ⅱ）事前アンケート、事後アンケート、授業資料(ワークシートを含む)、計算尺

⑵ 授業展開

＜１時間目＞

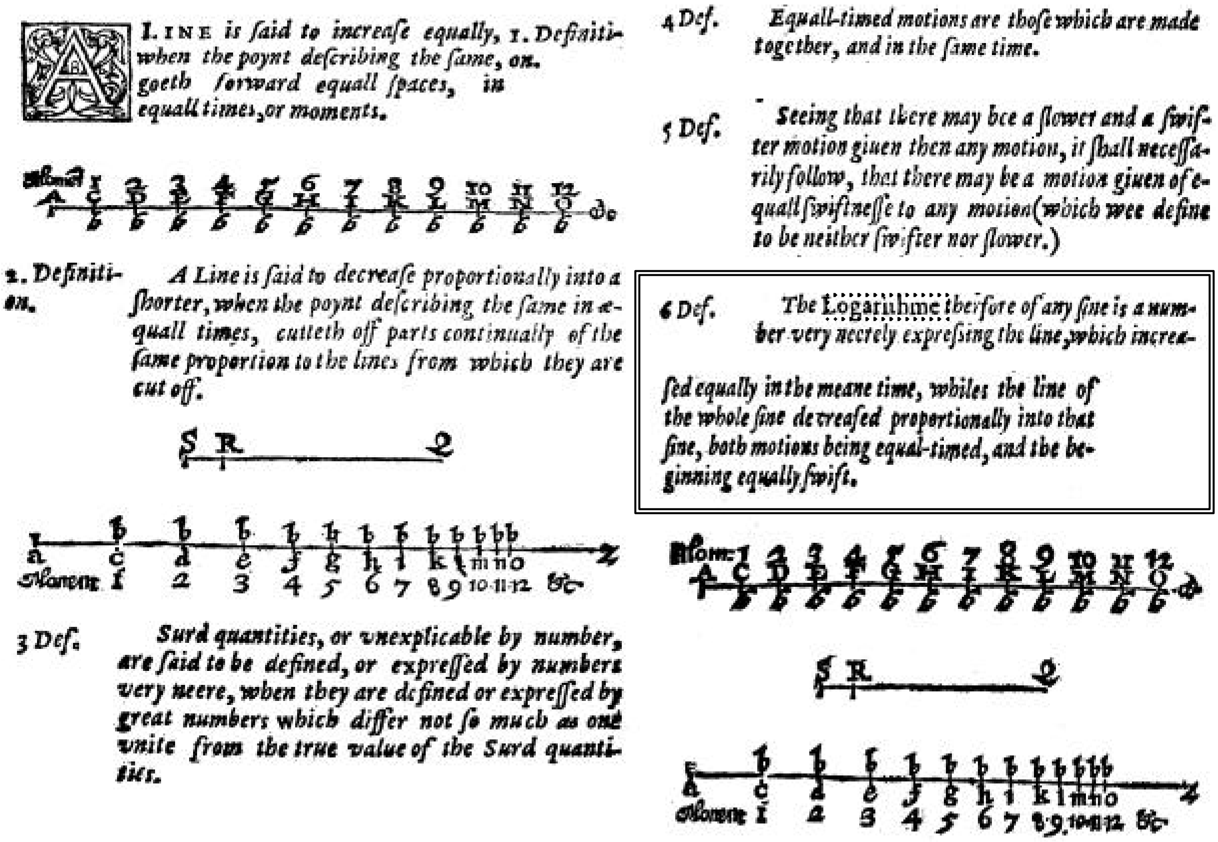
【目標】

生徒が原典解釈を通して、Napier の行った定義が対数であることに気づき、対数の有用性を理解することができる。

【授業概要】

はじめに、対数の生まれた 16 世紀終わりから 17 世紀初めの時代背景を説明した。当時、ヨーロッパは大航海時代で、船の位置（緯度・経度）を知るための航海術（天文航法）が発達しており、精度の高い観測値（大きな桁数の数）のかけ算・わり算をすることが必要であった。そこで、実際に生徒に大きな桁数の数のかけ算・わり算を手計算ですることを導入としておこなった。これらの計算は複雑で面倒であり、手計算で行うには非常に時間がかかる。当時は、コンピュータはもちろん、ボタン１つで簡単に答えが求まるような計算機もなかった。それを生徒が体験することによって、当時の人がどのようにして計算を簡単に処理しようとしたのかを、生徒に疑問を持たせるのが狙いである（対数が発見される前までは、三角関数の性質を利用したり計算コンパスを使ったりしていたが、授業では取り扱わないことにした）。この授業で対数を扱うことは伏せておき、当時は指数の概念がなかったことについては触れておいた。

次に、Napier が大きな桁数の数のかけ算・わり算を簡単にしようとしたことを人物紹介でおこない、原典解釈に入った。


A LINE is ſaid to increaſe equally, 1. Definition when the poynt deſcribing the ſame, on. goeth forward equall ſpaces, in equall times, or moments.

2. Definition. A Line is ſaid to decreaſe proportionally into a ſhorter, when the poynt deſcribing the ſame in equall times, cutteth off parts continually of the ſame proportion to the lines from which they are cut off.

3 Def. Surd quantities, or vnexplicable by number, are ſaid to be defined, or expreſſed by numbers very neere, when they are defined or expreſſed by great numbers which differ not ſo much as one vnite from the true value of the Surd quantities.

4 Def. Equall-timed motions are thoſe which are made together, and in the ſame time.

5 Def. Seeing that there may bee a ſlower and a ſwifter motion giuen then any motion, it ſhall neceſſarily follow, that there may be a motion giuen of equall ſwiftneſſe to any motion (which wee define to be neither ſwifter nor ſlower.)

6 Def. The Logarithme therfore of any ſine is a number very neerely expreſsing the line, which increaſed equally in the meane time, whiles the line of the whole ſine decreaſed proportionally into that ſine, both motions being equal-timed, and the beginning equally ſwift.

【図 1】授業資料の原典（英語）を載せた部分の抜粋。Logarithm（点線囲いの部分）の語は黒塗りで消して提示した。このほかに日本語訳も載せた。

以下は、“ 2. Definition ”の図を使って、生徒が原典解釈しようとしている場面である。

教師：ちょっとこれを見てください。

生徒：おお。

教師：それは一体何をいっているのかわかりますか？

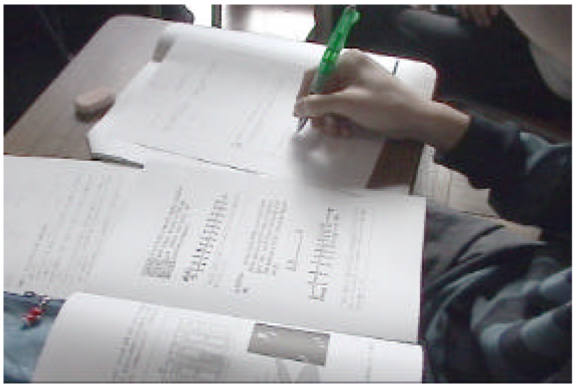
生徒：全部同じ比に見えるぞ？

教師：全部同じ比というと？

生徒：（線分が）SR:RQ の比で減少していく。

上の対話での生徒は、原典解釈により図の線分と等比数列の関係を導き出した。他の生徒は原典解釈の途中であったため、この後ワークシートで線分の長さを求めて図の意味を解釈する作業を行った。（写真 1、2）

生徒が原典解釈により、Napier が考え出したものが対数であることに気づくところまでを目標としたが、時間が足りなかった。そこで「Napier が考えたものは何でしょう？次の時間までに考えておいてください。」として、


【写真 1】Napier の対数の定義について、ワークシートで作業を行う様子。


【写真 2】作業中わからないところを生徒同士で話し合っている。

宿題のかたちをとった。

＜２時間目＞

【目標】

生徒が計算尺の利用を通して、対数の性質を捉える。また、計算尺の利用により対数を具体的なイメージへと広げることができる。

【授業概要】

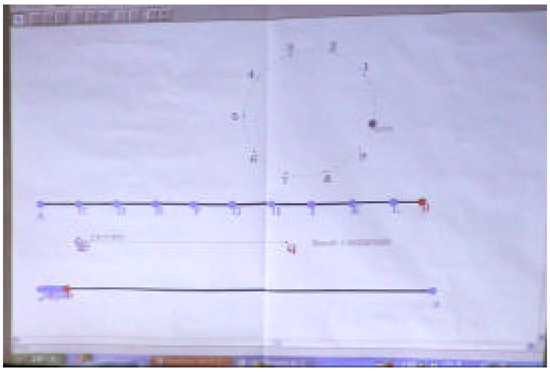
最初に、Napier がおこなった定義の復習をし、2 時間目の授業へとつなげた。その際、生徒の理解の助けになると考え、Cabri を利用してわかりやすく努めた。(写真 3)

教師：Napier は積を和に変換しようとしたのではないか？

教師：つまりそれは何ですか？

生徒：対数！

この対話から、生徒が Napier の考え出したものが対数であることを原典から理解したことがわかる。そこで原典でまだ触れていないところの補足説明をおこなった。Napier が考案した対数では、真数が 1 の対数の値は 0 にならず、積を和に変換するには不十分であったことについて、生徒は非常に驚き、興味を持っている様子だった（授業では Napier が考えた真数 X, Yの対数の値を NlogX, NlogY とすると、NlogXY = NlogX + NlogY + Nlog1 で、Nlog1≠0 であるので積を和に変換するには不十分であったと説明した)。Briggs が 1617 年に常用対数に関する著書『Logarithmorum chilias prima』を出版し、そこで真数 1 の対数の値が 0 になるものができたことを説明した。



【写真 3】Cabri を用いての Napier の対数の定義の復習。

Napier が対数を考案した後、Gunter が 1620 年にものさしに対数の目盛りを入れた“ Gunter 's scale（ガンター尺）”を発明した。また、Oughtred がそれを改良し、計算尺を発明した。これらを人物紹介として説明し、計算尺の使用法に入っていった。計算尺の使用法は様々あるのだが、時間の関係上、計算尺での積の求め方だけを行い、その他の使用法については今回取り扱わないことにした。はじめに最も簡単なものとして 2×3 を例にとって説明した。計算尺のＤ尺に掛けられる数“２”、Ｃ尺に掛ける数“３”をとる。その際、Ｃ尺をスライドさせて、Ｄ尺の“２”にＣ尺の“０”をあわせる。するとＣ尺の“３”のところに答えの“６”がＤ尺にあらわれる。なぜ答えがＤ尺にあらわれるのか、その原理を考えることを生徒の課題として提示した。

以下の会話は、計算尺の使用法を説明中に生徒から出た反応である。

生徒 A：おお、すげえ。

生徒 B：すげえな、これ。

生徒 C：なんで答え出るんだろう？

教師　：なぜだかわかる人いますか?

生徒　：……。

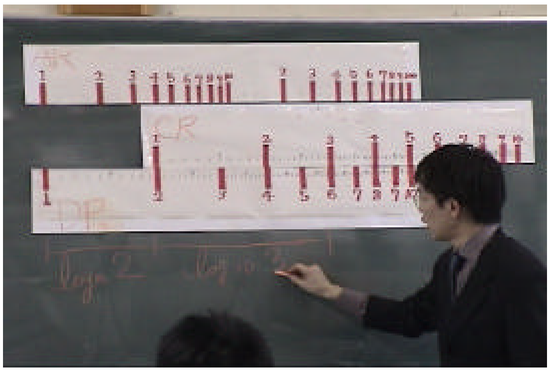
生徒は計算尺の原理についてはまだわかってい

【写真 4】ワークシートのかけ算・わり算の問題を、計算尺を使って行っている。

ない。しかし、計算尺によってなぜ積が求まるのかに疑問を抱き、それをおのずから解決しようとしている態度が生徒の反応からうかがえる。

ワークシートで他のかけ算・わり算についても計算尺で求めてみるように指示を出していたため、生徒は計算をするのに時間をかけてしまったようである。結局、生徒から計算尺の原理について説明できる人がでなかったので、教師が解説するかたちになった。計算尺の原理の解説中に、生徒からの反応が大いにみられたため、生徒が自らの力で計算尺の原理を理解するのにもう少しのところまできていたと考えられる。

最後に、計算尺は他にも平方や平方根などの計算ができることを説明し、授業を終えた。



【写真 5】計算尺で２×３＝６が得られるのは、対数の log２＋ log３＝ log６によるものであることを教師が解説している。

5. 議論

＜課題１について＞

「原典解釈により、対数の有用性を生徒が捉えることができるかどうかを明らかにする。」

生徒に課した事後アンケートから以下のような回答を得た（①～⑧）。

問）Napier の対数の発見について、あなたが感じたことを具体的に書いてください。

① 対数を自分自身が理解するのに時間がかかったのに、それを発見するとは本当にすごいと思う。

② そのときまで全く対数という概念がないなかで対数を発見したのだから、とても偉大な発見だと感じました。

③ 不十分な点（Nlog１≠0）もあったが、やはり偉大であることには変わりないと思う。

④ 発見自体は画期的だったと思うが、Napier が頑張った対数表はすぐにすたれたのはもったいなかったかもしれない。

⑤ 計算をしたいという要求から大きな発見が生まれた。

⑥ かけ算をたし算へ変換したところの発想が素晴らしい。

⑦ もうちょっと早くから対数のような楽な方法があみ出されなかったのかな･･･と。

⑧ 簡単に気づきそうなことなんだけど、やっぱりコロンブスの卵みたいなもんかね。

Napier が 1595 年に対数の考案に着手してから、『Mirifici Logarithmorum Canonis Descriptio』によって対数を世に送り出すまで 20 年かかっている。その時間の多くは対数表の作成に費やされているのであるが、その時間の経過から対数発見の苦労を窺い知ることができる。生徒の回答の中にも①②のように、発見のすごさと大変

さを感じとったものが多く見られた。Napier の対数では、真数 1 の対数の値が 0 にならないため、積を和に変換するのに完全なものではなかった。しかし生徒は、③④のように、Napier の成果を失敗とみなさず、なおも偉大なものとして位置づけている。16 世紀終わりから 17 世紀初めは大航海時代で、天文航法の発達から大きな桁数の数のかけ算・わり算をすることを要求された。Napier はかけ算・わり算を簡単にしようとし、積を和に変換する方法として対数を考えた。⑤では、対数が当時必要なものとして生まれてきたのだと生徒が認識していることがわかる。⑥では、対数が積を和に変換したものであると生徒が認識している。これは生徒が理解できていなかった部分に対して、対数の世界を広げることができたと考えられる。⑦⑧では、なぜ対数がもっと早く発見されなかったかに疑問を持っている。これは生徒が対数の歴史に興味関心を抱き、更なる発展学習ができるものと期待できる。これらのことから筆者は、生徒が Napier の対数の発見を学ぶことを通して、対数が有用であることを生徒が理解することができたと考える。

一次文献を利用する意義については恩田(1999)が考察している。原典解釈による数学の有用性を指摘する実践授業としては臼田(2001)などがあるが、当時の数学に歴史的意義や価値を見出したのに加えて、本研究では対数を題材に、生徒が発見の偉大さを感じることにより有用性を見出すことができたことに価値があると考える。

＜課題２について＞

「対数の学習を歴史的な視点から眺め、そこで計算尺を利用することにより、生徒が対数に対して持っていた抽象的なイメージを具体的なイメージへと広げることに効果があるかどうかを調べる。」

生徒に課した事後アンケートから以下のような回答を得た（⑨～⑮)。

問）授業を終えて、あなたの対数についてのイメージはどう変わりましたか？

⑨ 以前はあまりにも抽象的なイメージであったが、具体的な数としてのイメージが大きくなった。

⑩ 今まで、何の前ぶれもなく登場してきたので、何故それが必要なのかということはわからなかったが、なんとなくその背景がわかったような気がする。

⑪ 対数って積を和に変換したやつだったんだ！

⑫ 利用法があったと知った。便利な道具というイメージをもった。

⑬ 対数が身近になった。

⑭ もっと実用的になった。

⑮ 授業の前までは、指数に対して対数があるように考えていましたが、対数は指数よりずっと古く、しかも指数とは全く関係ないところからできたものだとわかりました。

⑨より、生徒は対数に抽象的なイメージをもっていたが、今回の研究授業によって具体的なものとしてのイメージへと広がったことがわかる。⑩より、生徒が対数の必要性についての理解が十分でなかったが、対数の歴史をみることでそれが補えたことがわかる。対数が誕生する背景として、Napier は積から和への変換に着目した。しか

し、学校数学では対数を指数の逆演算で定義しているため、生徒は対数の性質として $\log XY = \log X + \log Y$ を既習であるにもかかわらず、これが積を和に変換するものであるという発想にまでは至っていない。⑪により、生徒が対数を積から和への変換と捉えることができたことがわかる。⑫⑬⑭より、生徒が対数の実用性についてあまり理解がなく、計算尺の利用により対数が有用なものであると捉えたことがわかる。現在の指導要領では、対数を指数の拡張として指導する内容になっている。このため、⑮にみられるように、生徒が指数の後に対数が発見されたと誤って解釈される場合がある。しかし、対数の歴史を見ることによりそれが矯正されたことがわかる。これらのことから筆者は、本研究の実践授業で、学校数学での対数の学習では持ちえなかった具体的なイメージを生徒は持つことができたと考える。これは、歴史的な視点から対数を眺めることと計算尺の利用により、生徒が対数に対する抽象的なイメージから逸脱し具体的なイメ－ジへ広がったと考えられる。

原典解釈における道具の利用についての先行研究としては保坂(2001)や野口(2001)などがあるが、それらはもともと取り扱っている対象が幾何であり、本研究では対数を幾何的なものとして取り扱って道具を利用しているところに価値があると考える。

6. おわりに

本研究では、「Napier による対数」に関する原典解釈と、それに伴って計算尺を道具として利用し、その効果を調べるために授業実践を行った。前述の議論から、原典解釈と計算尺の利用によって生徒の対数へのイメージが抽象から具体へと拡大し、生徒が対数を有用なものと捉えることに効果があったと考える。計算尺の利用は、昭和 45 年の学習指導要領改訂により内容から外れたが、対数計算の必要性がなくなったとしても原典解釈との併用により生徒の対数に対する有用性の理解に貢献できるものとして注目すべきものであると、筆者は主張する。

本研究では Napier の対数表について取り扱うことができなかった。Napier の対数表に関する原典『The Construction of the Wonderful Canon of Logarithms』を用いた実践授業とその教材化を行うことが今後の課題である。

謝辞

研究授業の実施に際して、筑波大学付属駒場高等学校の牧下英世先生をはじめ、同高等学校の数学科の先生方に貴重なご意見・ご指導、並びに多大なご協力をいただきました。厚く御礼申し上げます。

注

本研究は平成 14 年度科学研究費「数学の文化的視野覚醒と新文化創出のための教材・指導法開発研究」（基盤研究 B、研究代表者礒田正美 No. 14380055）の一環として行われた。

<引用・参考文献>

１） **礒田正美** (2001). **異文化体験からみた数学の文化的視野の覚醒に関する一考察―隠れた文化としての数学観の意識化と変容を求めて―**, ***筑波数学教育研究***, 20, 39-48.

２） **礒田正美** (1987). **数学学習における数学史の利用に関する一考察**, ***筑波大学付属駒場中・高等学校研究報告***, 26, 157-174.

３） **恩田洋一** (1999). ***一次文献を利用した数学史教育に関する一考察:「数学基礎」に関連して―***, **修士論文**, **筑波大学**, **つくば市**.

４） **礒田正美** (2000). **道具が媒介する図形における「観察，操作，実験」型探究の楽しさ**, ***中学校・高等学校数学科教育課程開発に関する研究（7）数学教育改革の推進とテクノロジーの利用の実証に関する研究―ミレニアムプロジェクトに応えて―***, 83-87.

５） **礒田正美** (2001). **手段としての教具から媒介としての道具への教具観の転換に関する一考察―数学史上の道具の機能・制約とその反映に関する検討―**, ***中学校・高等学校数学科教育課程開発に関する研究（8）世界の教育課程改革の動向と歴史文化志向の数学教育―代数・幾何・微積 For All プロジェクトの新展開―***, 89-94.

６） **臼田要介** (2001). **生徒の数学観を変容させるための数学史の活用について―「カバリエリの原理」の教材を通して―**, ***中学校・高等学校数学科教育課程開発に関する研究（8）世界の教育課程改革の動向と歴史文化志向の数学教育―代数・幾何・微積 For All プロジェクトの新展開―***, 222-235.

７） **保坂高志** (2001). **ハッポスの円環問題の探究活動による生徒の数学観の変容について―原典解釈における道具の効果―**, ***中学校・高等学校数学科教育課程開発に関する研究（8）世界の教育課程改革の動向と歴史文化志向の数学教育―代数・幾何・微積 For All プロジェクトの新展開―***, 99-114.

８） **野口敬子** (2001). **道具を利用した数学史学習による生徒の数学観の変容に関する一考察―角の三等分問題を通して―**. ***中学校・高等学校数学科教育課程開発に関する研究（8）世界の教育課程改革の動向と歴史文化志向の数学教育―代数・幾何・微積 For All プロジェクトの新展開―***, 130-142.

９） **横地清編** (1967). ***数学科の教育内容***, **東京**: **大日本図書**.

１０） **原弘道編** (1970). ***数学的な考えを伸ばす実践指導***, **東京**: **明治図書**.

１１） **文部省** (1955). ***高等学校学習指導要領数学科編改訂版***, **東京**: **好学社**.

１２） **文部省** (1970). ***高等学校学習指導要領***, **東京**: **大蔵省印刷局**.

１３） **文部省** (1999). ***高等学校学習指導要領***, **東京**: **大蔵省印刷局**.

１４） **礒田正美** (2002). **解釈学からみた数学的活動論の展開―人間の営みを構想する数学教育学へのパースペクティブ―**, ***筑波数学教育研究***, 21, 1-10.

１５） Jahnke. H. N. (2000). The use of original sources in the mathematics classroom. In J. Fauvel & J. V. Maanen (ed.), *History in Mathematics Education*, (pp. 291-328). Boston: Kluwer Academic.

<授業資料作成において参考にした文献>

- Napier, J. (1614). *A Description of the Admirable Table of Logarithmes*, New York: Da Capo Press.
- Napier, J. (1619). *The Construction of the Wonderful Canon of Logarithms*, London: Dawsons of Pall Mall.

- Cajori. F. (1910). *A History of the Logarithmic Slide Rule*, New Jersey: Astragal Press.
- Smith. D. E. (1929). *A Source Book in Mathematics*, New York, McGraw-Hill Book.
- **志賀浩二** (1999). ***数の大航海―対数の誕生と広がり―***, **東京**: **日本評論社**.