授業資料

靈符百八、人間福禄、深植之[illegible]、[illegible]企之社

社数三七、雨中圖巻、色赤似丹、人集如市

3 年C組　　番　名前

1　　*2000年前の中国における測量法とは？*

⇒「九章算術」という本の中に，その方法が載っています。

●九章算術とは？

「九章」は、最古の、そして最も重要な古代中国の数学テキストの1つである。編纂の時期や編者についてはよくわからないが、多分秦の後期か漢の初期、すなわち紀元前1世紀の初め頃のものであろうと考えられている。「九章」は当時の数学知識を集大成したと言えるものだが、後の時代になってから劉徽（3世紀）や楊輝（13世紀）など多くの有名な数学者たちの興味の対象となり，彼らによって内容の展開と詳しい解説が行われた。

『九章算術』は9章から成っていて、問題は全部で264題ある。それぞれの章で当時の中国の社会に関係の深い事柄についての数学問題を扱っている。

（*非ヨーロッパ起源の数学　ジョージ・G・ジョーゼフ　講談社*）

（～150頃の）『九章算術』の内容

第1章	**方田**	**田畑の面積計算**	**38問**
第2章	粟米	穀物の換算	46問
第3章	衰分	按分比例	20問
第4章	少広	面積、体積計算	24問
第5章	商功	体積計算	28問
第6章	均輸	租税の運搬	28問
第7章	盈不足	複仮定法	20問
第8章	方程	多元一次方程式	18問
第9章	句股	直角三角形	24問

●『九章算術』からみた測量

内容は田租計算の基礎になる田積計算に始まり，穀物の交換，物価，運送，関税など多方面にわたって官僚の実務に必要な数学が展開されている。隋代には「算学」(国立数理大学)での教科書となったが，一般の人々の目に触れることは少なかったと思われる。また，日本では平安時代に渡来しかなり研究されたが，中断し散逸してしまった。

(http://moon.ap.kyushu-u.ac.jp/math/history/kyuusho/setumei11.html)

●では，測量の問題（方田・田畑の面積計算）を考察しよう

（原文）

九章算術卷第一

算經十書之二

魏　劉徽　注

唐朝議大夫行太史令上輕車都尉臣李淳風等奉勅注釋

方田以御田疇界域

今有田廣十五步從十六步問為田幾何

答曰一畝

又有田廣十二步從十四步問為田幾何

答曰一百六十八步　圖從十四廣十二

方田

術曰廣從步數相乘得積步此積謂田冪凡廣從相乘謂之冪臣淳風等謹按經云廣從相乘得積步注云廣從相乘謂之冪觀斯注意積冪義同以理推之固當不爾何則冪是方面單布之名積乃眾數聚居之稱循名責實二者全殊雖欲同之竊恐不可今以凡言冪者據廣從之一方其言積者舉眾步之都數經云相乘得積步即是都數之明文注云謂之為冪全乖積步之本意此注前云積謂田冪於理得通復云謂之為冪繁而不當今者注釋存善去非略為料簡遺諸後學

以畝法二百四十步除之即畝數百畝為一頃臣淳風等謹按此為篇端故特舉頃畝二法餘術不復言者從此可知一畝之田廣十五步從而疏之令為十五行即每行廣一步而從十六步又橫而截之令為十六行即每行廣一步而從十五步此即從疏橫截之步各自為方凡有二百四十步一畝之地步數正同以此言之即廣從相乘得積步驗矣二百四十步者畝法也百畝者頃法也故以除之即得

今有圭田廣十二步正從二十一步問為田幾何

答曰一百二十六步

又有圭田廣五步二分步之一從八步三分步之二問為田幾何

答曰二十三步六分步之五

術曰半廣以乘正從半廣者以盈補虛為直田也亦可半正從以乘廣按半廣乘從以取中平之數故廣從相乘為積步畝法除之即得也

今有邪田一頭廣三十步一頭廣四十二步正從六十四步問為田幾何

答曰九畝一百四十四步

又有邪田正廣六十五步一畔從一百步一畔從七十二步問為田幾何

答曰二十三畝七十步

術曰并兩邪而半之以乘正從若廣又可半正從若廣以乘并畝法而一并兩半之者以盈補虛也

九章算術《日本語訳》

巻第一　方田

一　いまここに方田がある。横が十五歩、縦が十六歩である。それでは、この田の面積はいくらか　。

答えにいう、一畝

二　また田がある。横が十二歩、縦が十四歩である。それでは、この田の面積はいくらか。

答えにいう、百六十八歩

方田の術にいう、横と縦の歩数を掛け合わせて積の歩数を得る。これを畝の法二百四十歩で割れば、すなわち畝の数が得られる。百畝を一頃とする。

二五　いま圭田がある。広は十二歩、正縦は二十一歩である。面積はいくらか。

答えにいう、百二十六歩

圭田。術にいう、広を半分にし、それを正縦に掛ける。

二七　いま邪田がある。一つの頭広は三十歩、もう一つの頭広は四十二歩で、正縦は六十四歩である。面積はいくらか。

答えにいう、九畝百四十四歩

二八　また、邪田がある。正広は六十五歩で、一つの畔縦は百歩、もう一つの畔縦は七十二歩である。面積はいくらか。

答えにいう、二十三歩畝七十歩

（邪田）術にいう、両邪を合わせて半分にし、それを正縦もしくは正広に掛ける。また、正縦もしくは正広を半分にし、それを両邪を合わせたものに掛けてもよい。

九章算術の解法について

- 算法の内容によって章が異なる（章を立てる基準が大体きまっている）
- ①問題　②答え　③答えに至る筋道の手順　という構成
- 「術」は「解」ではない

  よって「なぜこのように計算するのか」「なぜこの公式を使うのか」

  という疑問には答えてくれない

  もし，そのような疑問を持つことがあってもそれは自分で納得するまで術文をよむしかない
- 日常生活を材料にはしない専門書

（参考）「塵劫記」の魅力　佐藤健一　研成社

「塵劫記」　吉田光由　岩波文庫

問題を述べ、それに答を与える形式で知識が提供されるわけだが、解の記述の多くが簡単すぎたり、あいまいだったりしたため、後世の注釈者の役割が必要となった。現在の方法での代数記号や証明など

はまったくない。　*（非ヨーロッパ起源の数学 ジョージ・G・ジョーゼフ　講談社）*

- 方田 ⇒正方形・長方形の土地
- 歩⇒長さの単位、面積の単位
- 長さの一歩⇒五尺
- 一歩四方の面積⇒面積の一歩
- 面積二百四十歩⇒一畝
- 百畝⇒一頃
- 圭 ⇒後世では二等辺三角形。ここでは直角三角形
- 邪⇒斜 、両邪⇒２つの頭広、あるいは畔縦
- 斜田⇒直角台形

を半分にし、それを両邪を合わせたものに掛けてもよい。

2　日本では，測量をどのようにとらえ，どのように測ったのでしょうか？

『塵劫記』という書物から江戸時代の日本をみてみましょう

●塵劫記について

著者　吉田光由（1627～1672）

- 京都嵯峨野の豪商・角倉の一員として誕生。毛利重能について数学を学ぶ
- 塵劫記とは？　　⇒塵劫の意味　（仏教用語）　無限あるいは永遠
- 寺子屋などで盛んに使われた。（江戸時代（約 300 年間）を通しての「寺小屋教育」が現在の日本の繁栄の基礎）　江戸時代のベストセラーの1つ。類本は400種を超える
- 塵劫記の記述を通して江戸時代の町人生活のただ中での算術に接することができる。すなわち，材料は当時の実生活をそのまま反映。簡素で合理的な手順を含んでいく
- そろばんを図解入りで説明（商家などでそろばんの練習帳がわりに使われた）
- 塵劫記は『算法統宗』を手本として書かれた。しかし，類似点はほとんどみられない

●『塵劫記』からみた測量

- 計算の対象になるものが生活と関わっているものを取り上げるのが普通
- 「検地の次第」では土地の面積を計算
- 光由は「日本では数学そのものを身に付けたいという人よりも，数学を使えるようになりたい，という人が多い」と思っていた.
  （実際『塵劫記』は，江戸時代を通して多くの人に受け入れられた。この普及によって，室町時代の一般庶民の数学のレベルは二桁のかけ算もできない人が大多数であったのに，江戸時代の中頃には，大部分の人が割り算もできるようになった。日本人の数理能力は『塵劫記』によって向上したともいえる）
- 年貢と田畑の面積は深い関係にある。
- ①収穫高によって税を決める方法
  ②面積によって前もって決めておく方法
- 光由は②の方法のみ考えた･･･その方が，数学的な問題になる
- 年貢との関わりのためでもあったが，角倉家は坂田群代官でもあるから，土地の面積計算，すなわち，土地を正しく測量することも重要であった。
- 正方形，長方形，正三角形，円形の面積の求め方を基本にして，考えられる多くの面積を計算して見せようとした。実際の測量では，土地の面積を三角形に分割して計算するのであるが，そうでない場合も扱ったほうがよいと考えたからである。

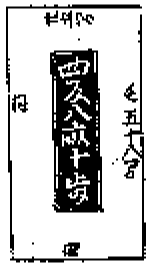
（参考）「塵劫記」の魅力　佐藤健一　研成社
「塵劫記」　吉田光由　岩波文庫

●では，測量の問題（第二三 検地の事）を考察しよう

～『塵劫記』～

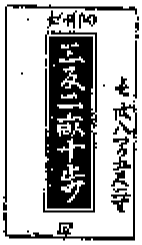
（原文）

（一）



法に、長さと横、左右に置き、掛くれば千四百五十坪になる。是を田法三にて割れば、四反八畝十歩と知る。

（二）

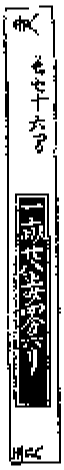


法に、長さ三十八間五尺二寸を左に置て、此一間より内五尺二寸をば六尺五寸をもつて割れば、三十八間八と成。是に横二十五間を掛くれば、九百七十坪に成。これを田法三にて割れば、三反二畝十歩としるべき也。

（三）

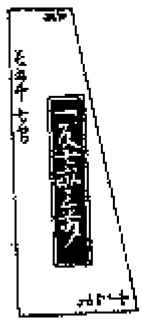
法に、長さ二十五間二尺六寸と右に置、間より内へ六尺五寸を掛くれば二十三丈一寸と成。又法によこ十八間四尺と置て、間より内へ六尺を掛くれば十二丈一尺と成。是を右の二十三丈一寸に掛くれば、一丈の坪二百七十八坪四分二厘一毛と成。これを一坪の法四二二五にて割れば、六百五十八坪九分八厘と成。これを田の法三にて割れば、二反一畝二十八歩九分八厘としるべき也。

（四）



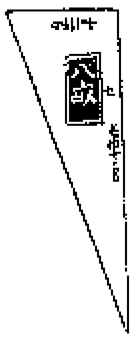
法に、長さ七十六間に五尺を掛くれば三八と成。是を六尺五寸にて割れば五十八坪四分六厘と成。是を田法の三にて割れば、一畝二十八歩四分六厘としるべし。

（五）



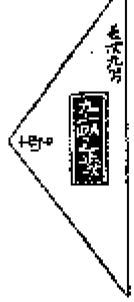
法に、十三間に五間を加へる時、十八間と成。是を二つに割れば九間に成。是を五十七間に掛くれば五百十三坪と成。是を田の法にて割ればしるべきなり。

（六）



法に、十二間を二つに割れば六間と成。是を長さ四十間に掛くれば二百四十坪に成。是を田法三にて割也。

（七）



法に、よこ十四間を二つに割れば、七間と成。是に長さ三十九間を掛くれば二百七十三坪と成。これを田法三にて割ればしるべきなり。

（八）

法に、十六間を二つに割れば八間と成。是を長さ三十九間に掛くれば三百十二坪と成。これを田法三にて割れば、

一反十二歩としるなり。

7

『塵劫記』　吉田光由　岩波文庫

●では、測量の問題（第二三　検地の事）を考察しよう

塵劫記《現代語訳》

第二三 検地

第一問　長さ五八間、幅二五間の田がある。この田の面積はどれだけか。ただし田の面積をいう場合には、一坪すなわち一間四方を一歩、三〇歩すなわち三〇坪を一畝、一〇畝すなわち三〇〇歩あるいは三〇〇坪を一反という

五八間に二五間をかけ、田の面積として一四五〇坪あるいは一四五〇歩得る。れを一畝にあたる三〇で割ると、四八余り一〇となる。四八は四反八畝を表し、余りの一〇は一〇歩を表わす。すなわち四反八畝一〇歩が求める答えである。

第二問　長さ三八間五尺二寸、幅二五間の田の面積はどれだけか

まず三八間五尺二寸中の五尺二寸を間で表わす。一間は六尺五寸であるから、二を六五で割って得られる0、八間がその答えである。すなはち三八間五尺二寸は三八・八間となる。これに二五をかけて九七〇坪あるいは九七〇歩を得る。これを三〇で割ると三二余り一〇となる。求める答えは三反二畝一〇歩である

第三問　長さ三五間二尺六寸、幅一八間四尺の田の面積はどれだけか

二尺六寸は〇・四間ゆえ、三五間二尺六寸は三五・四間となる。また四尺は〇・六一五四間ゆえ、一八間四尺は一八・六一五四間となる。三五・四間に一八・六一五四間をかけ六五八・九八坪あるいは歩を得る。これを三〇でわると二一余り二八・九八となる。すなわち求める答えは二反一畝二八歩九分八厘となる。ただし分および厘はそれぞれ一〇分の一および一〇〇分の一を表わす。

第四問　長さ七六間、幅五尺の矩形の田の面積はどれだけか

五尺は〇・七六九二間である。これに七六間をかけ五八・四六坪を得る。これで割って一余り二八・四六を得る。求める答えは一畝二八歩四分六厘である。

第五問　図のような上の辺の長さ五間、下の辺の長さ一三間、高さに相当した長さ五七間の梯形の田の面積はどれだけか

上の辺と下の辺の長さの平均は九間である。これに五七間をかけて五一三坪をる。これを三〇で割って一七余り三を得る。求める答えは一反七畝三歩である。

8

第六問　直角をはさむ二辺の長さが一二間および四〇間の田の面積をもとめよ

一二に四〇をかけたものを二で割って二四〇坪を得る。これを三〇で割ると八り〇である。求める答えは八畝となる

第九問　底辺三九間、高さに相当した長さ一四間の田の面積はどれだけか

三九間に一四間をかけたものを二で割って二七三坪を得る。これを三〇で割って余り三を得る。すなわち九畝三歩が求める答えである

第二〇問　図のような高さ三九間、底辺が一六間の三角形の田の面積はどれだけか

三九間に一六間をかけたものを二で割って三一二坪を得る。これを三〇で割って一〇余り一二を得る。すなわち一反一二歩が求める答えである

塵劫記 の解法について

（注）**長方形**の求め方をみると

第一問　たて・よこの長さに間未満の端数のないもの
第二問　たて・よこの一方に間未満の端数のあるもの
第三問　たて・よこの両方に間未満の端数のあるもの
第四問　たて・よこの一方が間単位、他方が尺単位

これによって、**あらゆる場合の面積の求め方に適用**できるようになっている

田数の名

一町⇒６０間４方
一間⇒６尺５寸
一坪⇒１間４方⇒一歩
３０歩⇒**１畝**⇒３０坪
１０畝⇒３００歩（３００坪）⇒**１反**
田⇒土地（九章算術でもそう言う）
畝という単位は古くは存在しない。一般的になったのは、秀吉の天正検地以後

3　　*2000年前のギリシャにおける測量法とは？*

⇒ヘロン著「測量術」という本の中に，ヘロンの方法が載っています。

●ヘロンとは？

- **ヘロンの年代**　紀元前150年あるいは紀元後250年（現在も議論されている）

- **ヘロンの著書**・トイブナー叢書で、ハイベルクその他の人によって編集されている。

  ・ヘロンの著書は、幾何学的なものと機械学的なものとの２種類
  ・幾何学的著書は主として求積法の類である。
  ・　測量に関するヘロンの有名な著作のうち、最も重要なものは "測量術 "である。それは、使用された公式に理論的裏づけを与えている点で、他の著作よりいっそう科学的であり、単に例題を集めただけのものでは無い。　　　　　（ヒース　ギリシャ数学史　共立）

- **業績**　・後期ギリシャの数学百科事典家の１人

  ・業績は実用的性格をもっていた
  ・ヘロンの生涯については、我々には断片的情報があるだけである。
  ・彼が非凡な力学者であることがわかっている。彼は《力学者のヘロン》とも呼ばれた。
  ・彼は、幾何の問題や幾何の実際的応用に多くの注意を注いだ。

  （グレイゼル　数学史　II　大竹出版）

【ＭＥＭＯ】

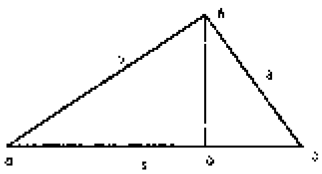
田数の名

一町⇒６０間４方
一間⇒６尺５寸
一坪⇒１間４方⇒一歩
３０歩⇒**１畝**⇒３０坪
１０畝⇒３００歩（３００坪）⇒**１反**
田⇒土地（九章算術でもそう言う）
畝という単位は古くは存在しない。一般的になったのは、秀吉の天正検地以後

ヘロンは３辺が７、８、９の３角形の面積を求めています

問題

下図の３辺が７、８、９の３角形の面積を求めましょう



●皆さんはどのように求めますか？

●では、ヘロンはどうやってもとめたのかな？

ヘロンの公式

《原文》

(i.) *Area of a Triangle Given the Sides*

Heron, *Metr.* i. 8, ed. H. Schöne (Heron iii.) 18. 12–24. 21

Ἔστι δὲ καθολικὴ μέθοδος ὥστε τριῶν πλευρῶν δοθεισῶν οἱουδηποτοῦν τριγώνου τὸ ἐμβαδὸν εὑρεῖν χωρὶς καθέτου· οἷον ἔστωσαν αἱ τοῦ τριγώνου πλευραὶ μονάδων ζ̅, η̅, θ̅. σύνθες τὰ ζ̅ καὶ τὰ η̅ καὶ τὰ θ̅· γίγνεται κδ̅. τούτων λαβὲ τὸ ἥμισυ· γίγνεται ιβ̅. ἄφελε τὰς ζ̅ μονάδας· λοιπαὶ ε̅. πάλιν ἄφελε ἀπὸ τῶν ιβ̅ τὰς η̅· λοιπαὶ δ̅. καὶ ἔτι τὰς θ̅· λοιπαὶ γ̅. ποίησον τὰ ιβ̅ ἐπὶ τὰ ε̅· γίγνονται ξ̅. ταῦτα ἐπὶ τὸν δ̅· γίγνονται σμ̅· ταῦτα ἐπὶ τὸν γ̅· γίγνεται ψκ̅· τούτων λαβὲ πλευρὰν καὶ ἔσται τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τριγώνου.

(i.) *Area of a Triangle Given the Sides*

Heron, *Metrica* i. 8, ed. H. Schöne (Heron iii.) 18. 12–24. 21

There is a general method for finding, without drawing a perpendicular, the area of any triangle whose three sides are given. For example, let the sides of the triangle be 7, 8 and 9. Add together 7, 8 and 9; the result is 24. Take half of this, which gives 12. Take away 7; the remainder is 5. Again, from 12 take away 8; the remainder is 4. And again 9; the remainder is 3. Multiply 12 by 5; the result is 60. Multiply this by 4; the result is 240. Multiply this by 3; the result is 720. Take the square root of this and it will be the area of the triangle.

《日本語訳》

（３辺を与えられた３角形の面積）

垂線を引かずに、３辺を与えられた、どんな３角形の面積も求められる一般的方法がある。例えば、３角形の３辺を７，８，９ととる。７，８，９を加えなさい。２４である。　この半分を取ると、１２。

７をひくと５。再び１２から８をひくと４。９をひくと３。

１２に５をかけると６０。これに４をかけると２４０。これに３をかけると７２０。

７２０の平方根をとれば、それが３角形の面積である。

⇒　**実際に書いてみよう**

（参考）Greek Mathematical Works Ⅱ p470～471

●では、ヘロンはどうやってもとめたのかな？

ヘロンの公式『解読』

●ヘロンの著書 "測量術" について

アルキメデスとエウドクソスとが求積法の先駆者だと記された短い序文の後に、第1巻
第2巻、第3巻とある。三辺の長さから三角形の面積を求めることは、第1巻の三角形の問題の中で最も興味があり、与えられた三辺を有する三角形(鋭角または鈍角)の面積の求積法である。
この問題は、2つの方法で解かれている。

(Ⅰ) A から対辺 BC へ垂線をひく。垂線 AD によって分割された BC の部分の長さを求め、それから、垂線の長さを導き、かくて面積($=\frac{1}{2}$AD･BC)を求める。

(ヒース　ギリシャ数学史 共立)

(Ⅱ)　2つ目の方法･･･垂線を下ろさない →　ヘロンの公式

$$s=\frac{1}{2}(a+b+c)\qquad S=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

- ここで、a, b, cは三角形の三辺で、sはそれらの辺の半分、すなはち周囲の半分である。
- このヘロンの公式について、アラビア人は、それ以前にアルキメデスが知っており、証明も得ていたことは疑いがないといっている。しかし、われわれに伝わったものの中では、ヘロンの『測量術』のなかの証明が一番古い。
- また、『測量術』は、1896 年にコンスタンティノープルで 1100 年頃の写本が再発見されるまでは、アルキメデスの『方法』同様、長い間失われていた。

●測量の目的

★ ところで"幾何学"という言葉は本来"土地の測量"を意味していた。『測量術』のなかにはたしかにときどき証明もみられるが、本全体としては長さや、面積および体積を測定した数値的な実例が大半であった。

★ もともと実際家の手引き書としてかかれた

★ 土地の形状の研究には, ①数における算術(数の理論)は合理的研究の幾何学②計算術(計算の技術)は実用的内容の測地学があり, ヘロンは②である。　(ボイヤー　数学の歴史 朝倉書店)

★ ヘロンの公式 → 三角形の辺上を1周りする辺の長さがわかるだけで面積が求まる方法

★ 三辺がわかれば, その土地を測るのに有効使われた

★ 実際に土地の面積を求めるのに威力を発揮した

★ 三角形の面積を計算するための実用的規則は、ギリシャ、ローマ、中世の測地術や技術にもちいられた　(グレイゼル 数学史Ⅱ 大竹書店)

ヘロンの公式を証明しよう

●三角比を用いた証明は・・・？

【証明】

$S^2=\frac{1}{4}AB^2AC^2\sin^2 A$ において

$$\sin^2 A = 1-\cos^2 A = (1+\cos A)(1-\cos A)$$

$$=\left(1+\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\right)\left(1-\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\right)$$

$$=\frac{\{(b+c)^2-a^2\}\{a^2-(b-c)^2\}}{4b^2c^2}$$

$$=\frac{(b+c+a)(b+c-a)(a+b-c)(a-b+c)}{4b^2c^2}$$

$$=\frac{2s\cdot 2(s-a)\cdot 2(s-c)\cdot 2(s-b)}{4b^2c^2}$$

$$=\frac{4s(s-a)(s-b)(s-c)}{b^2c^2}$$

よって　$S=\frac{1}{2}AB\cdot AC\sin A$

$$S=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

（証明終）

●現在では，このように三角比を用いることによって証明できます

●しかし，ヘロンは純粋な幾何により，みごとにそしてエレガントに証明しました

ヘロンの公式の証明

《原文》

Ἡ δὲ γεωμετρικὴ τούτου ἀπόδειξίς ἐστιν ἥδε· τριγώνου δοθεισῶν τῶν πλευρῶν εὑρεῖν τὸ ἐμβαδόν. δυνατὸν μὲν οὖν ἐστιν ἀγαγόντα[ς] μίαν κάθετον καὶ πορισάμενον αὐτῆς τὸ μέγεθος εὑρεῖν τοῦ τριγώνου τὸ ἐμβαδόν, δέον δὲ ἔστω χωρὶς τῆς καθέτου τὸ ἐμβαδὸν πορίσασθαι.

Ἔστω τὸ δοθὲν τρίγωνον τὸ ΑΒΓ καὶ ἔστω ἑκάστη τῶν ΑΒ, ΒΓ, ΓΑ δοθεῖσα· εὑρεῖν τὸ ἐμβαδόν. ἐγγεγράφθω εἰς τὸ τρίγωνον κύκλος ὁ ΔΕΖ, οὗ κέντρον ἔστω τὸ Η, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΑΗ, ΒΗ, ΓΗ, ΔΗ, ΕΗ, ΖΗ. τὸ μὲν ἄρα ὑπὸ ΒΓ, ΕΗ διπλάσιόν ἐστι τοῦ ΒΗΓ τριγώνου, τὸ δὲ ὑπὸ ΓΑ, ΖΗ τοῦ ΑΓΗ τριγώνου, ⟨τὸ δὲ ὑπὸ ΑΒ, ΔΗ τοῦ ΑΒΗ τριγώνου⟩· τὸ ἄρα ὑπὸ τῆς περιμέτρου τοῦ ΑΒΓ τριγώνου καὶ τῆς ΕΗ, τουτέστι τῆς ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ ΔΕΖ κύκλου, διπλάσιόν ἐστι τοῦ ΑΒΓ τριγώνου. ἐκβεβλήσθω ἡ ΓΒ, καὶ τῇ ΑΔ ἴση κείσθω ἡ ΒΘ· ἡ ἄρα ΓΒΘ ἡμίσειά ἐστι τῆς περιμέτρου τοῦ ΑΒΓ τριγώνου διὰ τὸ ἴσην εἶναι τὴν μὲν ΑΔ τῇ ΑΖ, τὴν δὲ ΔΒ τῇ ΒΕ, τὴν δὲ ΖΓ τῇ ΓΕ. τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ΓΘ, ΕΗ ἴσον ἐστὶ τῷ ΑΒΓ τριγώνῳ. ἀλλὰ τὸ ὑπὸ τῶν ΓΘ, ΕΗ πλευρά ἐστιν τοῦ ἀπὸ τῆς ΓΘ ἐπὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΕΗ· ἔσται ἄρα τοῦ ΑΒΓ τριγώνου τὸ ἐμβαδὸν ἐφ' ἑαυτὸ γενόμενον ἴσον τῷ ἀπὸ τῆς ΘΓ ἐπὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΕΗ. ἤχθω τῇ μὲν ΓΗ πρὸς ὀρθὰς ἡ ΗΛ, τῇ δὲ ΓΒ ἡ ΒΛ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΓΛ. ἐπεὶ οὖν ὀρθή ἐστιν ἑκατέρα τῶν ὑπὸ ΓΗΛ, ΓΒΛ, ἐν κύκλῳ ἄρα ἐστὶ τὸ ΓΗΒΛ τετράπλευρον· αἱ ἄρα ὑπὸ ΓΗΒ, ΓΛΒ δυσὶν ὀρθαῖς εἰσιν ἴσαι. εἰσὶν δὲ καὶ αἱ ὑπὸ ΓΗΒ, ΑΗΔ δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι διὰ τὸ δίχα τετμῆσθαι τὰς πρὸς τῷ Η γωνίας ταῖς ΑΗ, ΒΗ, ΓΗ καὶ ἴσας εἶναι τὰς ὑπὸ τῶν ΓΗΒ, ΑΗΔ ταῖς ὑπὸ τῶν ΑΗΓ, ΔΗΒ καὶ τὰς πάσας τέτρασιν ὀρθαῖς ἴσας εἶναι· ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΑΗΔ τῇ ὑπὸ ΓΛΒ. ἔστι δὲ καὶ ὀρθὴ ἡ ὑπὸ ΑΔΗ ὀρθῇ τῇ ὑπὸ ΓΒΛ ἴση· ὅμοιον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΗΔ τρίγωνον τῷ ΓΒΛ τριγώνῳ. ὡς ἄρα ἡ ΒΓ πρὸς ΒΛ, ἡ ΑΔ πρὸς ΔΗ, τουτέστιν ἡ ΒΘ πρὸς ΕΗ, καὶ ἐναλλάξ, ὡς ἡ ΓΒ πρὸς ΒΘ, ἡ ΒΛ πρὸς ΕΗ, τουτέστιν ἡ ΒΚ πρὸς ΚΕ διὰ τὸ παράλληλον εἶναι τὴν ΒΛ τῇ ΕΗ, καὶ συνθέντι, ὡς ἡ ΓΘ πρὸς ΒΘ, οὕτως ἡ ΒΕ πρὸς ΕΚ· ὥστε καὶ ὡς τὸ ἀπὸ τῆς ΓΘ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν ΓΘ, ΘΒ, οὕτως τὸ ὑπὸ ΒΕΓ πρὸς τὸ ὑπὸ ΓΕΚ, τουτέστι πρὸς τὸ ἀπὸ ΕΗ· ἐν ὀρθογωνίῳ γὰρ ἀπὸ τῆς ὀρθῆς ἐπὶ τὴν βάσιν κάθετος ἦκται ἡ ΕΗ· ὥστε τὸ ἀπὸ τῆς ΓΘ ἐπὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΕΗ, οὗ πλευρὰ ἦν τὸ ἐμβαδὸν τοῦ ΑΒΓ τριγώνου, ἴσον ἔσται τῷ ὑπὸ ΓΘΒ ἐπὶ τὸ ὑπὸ ΓΕΒ. καὶ ἔστι δοθεῖσα ἑκάστη τῶν ΓΘ, ΘΒ, ΒΕ, ΓΕ· ἡ μὲν γὰρ ΓΘ ἡμίσειά ἐστι τῆς περιμέτρου τοῦ ΑΒΓ τριγώνου, ἡ δὲ ΒΘ ἡ ὑπεροχή, ᾗ ὑπερέχει ἡ ἡμίσεια τῆς περιμέτρου τῆς ΓΒ, ἡ δὲ ΒΕ ἡ ὑπεροχή, ᾗ ὑπερέχει ἡ ἡμίσεια τῆς περιμέτρου τῆς ΑΓ, ἡ δὲ ΕΓ ἡ ὑπεροχή, ᾗ ὑπερέχει ἡ ἡμίσεια τῆς περιμέτρου τῆς ΑΒ, ἐπειδήπερ ἴση ἐστὶν ἡ μὲν ΕΓ τῇ ΓΖ, ἡ δὲ ΒΘ τῇ ΑΖ, ἐπεὶ καὶ τῇ ΑΔ ἐστιν ἴση. δοθὲν ἄρα καὶ

The geometrical proof of this is as follows: *In a triangle whose sides are given to find the area.* Now it is possible to find the area of the triangle by drawing one perpendicular and calculating its magnitude,[b] but let it be required to calculate the area without the perpendicular.

Let ΑΒΓ be the given triangle, and let each of ΑΒ, ΒΓ, ΓΑ be given; to find the area. Let the circle ΔΕΖ be inscribed in the triangle with centre Η [Eucl. iv. 4], and let ΑΗ, ΒΗ, ΓΗ, ΔΗ, ΕΗ, ΖΗ be joined. Then

$$ΒΓ . ΕΗ = 2 . \text{triangle } ΒΗΓ, \quad \text{[Eucl. i. 41}$$

$$ΓΑ . ΖΗ = 2 . \text{triangle } ΑΗΓ, \quad \text{[ibid}$$

$$ΑΒ . ΔΗ = 2 . \text{triangle } ΑΒΗ. \quad \text{[ibid}$$

Therefore the rectangle contained by the perimete of the triangle ΑΒΓ and ΕΗ, that is the radius o the circle ΔΕΖ, is double of the triangle ΑΒΓ. Le ΓΒ be produced and let ΒΘ be placed equal to ΑΔ then ΓΒΘ is half of the perimeter of the triangle ΑΒ because ΑΔ = ΑΖ, ΔΒ = ΒΕ, ΖΓ = ΓΕ [by Eucl. iii. 17] Therefore

$$ΓΘ . ΕΗ = \text{triangle } ΑΒΓ. \quad \text{[ibi}$$

But $ΓΘ . ΕΗ = \sqrt{ΓΘ^2 . ΕΗ^2}$;

therefore $(\text{triangle } ΑΒΓ)^2 = ΓΘ^2 . ΕΗ^2$.

Let ΗΛ be drawn perpendicular to ΓΗ and ΒΛ per pendicular to ΓΒ, and let ΓΛ be joined. Then sinc each of the angles ΓΗΛ, ΓΒΛ is right, a circle can b described about the quadrilateral ΓΗΒΛ [by Euc iii. 31]; therefore the angles ΓΗΒ, ΓΛΒ are togethe equal to two right angles [Eucl. iii. 22]. But th angles ΓΗΒ, ΑΗΔ are together equal to two righ angles because the angles at Η are bisected by ΑΗ ΒΗ, ΓΗ and the angles ΓΗΒ, ΑΗΔ together wit ΑΗΓ, ΔΗΒ are equal to four right angles; therefor the angle ΑΗΔ is equal to the angle ΓΛΒ. But th right angle ΑΔΗ is equal to the right angle ΓΒΛ therefore the triangle ΑΗΔ is similar to the triangl ΓΒΛ.

Therefore $ΒΓ : ΒΛ = ΑΔ : ΔΗ$

$= ΒΘ : ΕΗ,$

and *permutando*, $ΓΒ : ΒΘ = ΒΛ : ΕΗ$

$= ΒΚ : ΚΕ,$

because ΒΛ is parallel to ΕΗ,

and *componendo* $ΓΘ : ΒΘ = ΒΕ : ΕΚ$;

therefore $ΓΘ^2 : ΓΘ . ΘΒ = ΒΕ . ΕΓ : ΓΕ . ΕΚ,$

i.e. $= ΒΕ . ΕΓ : ΕΗ^2,$

for in a right-angled triangle ΕΗ has been draw from the right angle perpendicular to the base therefore $ΓΘ^2 . ΕΗ^2$, whose square root is the are of the triangle ΑΒΓ, is equal to $(ΓΘ . ΘΒ)(ΓΕ . ΕΒ)$ And each of ΓΘ, ΘΒ, ΒΕ, ΓΕ is given; for ΓΘ is hal of the perimeter of the triangle ΑΒΓ, while ΒΘ is th excess of half the perimeter over ΓΒ, ΒΕ is the exces of half the perimeter over ΑΓ, and ΕΓ is the exces of half the perimeter over ΑΒ, inasmuch as ΕΓ = ΓΖ ΒΘ = ΑΔ = ΑΖ. Therefore the area of the triangl ΑΒΓ is given.

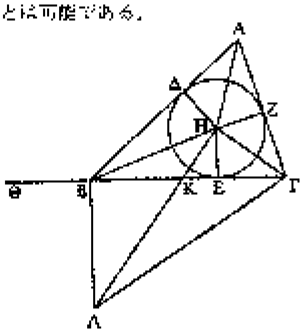
（参考）Greek Mathematical Works Ⅱ p472～476

ヘロンの公式の証明《日本語訳》

面積を求めるために三辺が与えられた三角形を考える。

さて、1つの垂線をひき、その大きさを得ることによって三角形の面積を求めることは可能である。

しかし垂線をひかずに面積を求める。



与えられた三角形をABΓとし、面積を求める。AB、BΓ、ΓAを与える。

三角形の中心がHの円ΔEZをとる。AH、BH、ΓH、ΔH、EH、ZHを結ぶ。

そのとき

BΓ・EH＝2・三角形BHΓ

ΓA・ZH＝2・三角形AHΓ

AB・ΔH＝2・三角形ABH

ゆえに、三角形ABΓの周辺によって囲まれた長方形は（EHは円ΔEZの半径）三角形ABΓの2倍。

ΓBを延長して，AΔと等しくなるようにBΘをおく。すなわち，ΓBΘは三角形ABΓの周辺の長さの半分。

なぜなら、AΔ＝AZ、ΔB＝BE、ZΓ＝ΓE。

ゆえに ΓΘ・EH＝三角形ABΓ

しかし ΓΘ・EH＝$\sqrt{Γ Θ^2 ・ E H^2}$　　ゆえに （三角形ABΓ）^{2}＝ΓΘ^2・EH^2

HΛ、BΛをそれぞれΓH、ΓBに垂直になるようにひき、ΓΛを結ぶ。

その時、角ΓHΛ、角ΓBΛは各々直角なので，円は四辺形ΓHBΛの周りに描かれる。

ゆえに、角ΓHB、角ΓΛBは合わせて、2直角。

しかし，角ΓHB，角AHΔは合わせて、2直角。なぜなら、角Hは、AH、BH、ΓHによって二等分線がひかれ、角AHΓ，角AHBを合わせた角ΓHB，角AHΔは4直角に等しいからである。

ゆえに、角AHΔは角ΓΛBに等しい。しかし、直角AΔHは直角ΓBΛに等しい。

ゆえに、三角形AHΔは三角形ΓBΛに相似である。ゆえに、 BΓ：BΛ＝AΔ：ΔH＝BΘ：EH

交換して，ΓB：BΘ＝BΛ：EH＝BK：KE（なぜならBΛはEHに平行）

加えると，ΓΘ：BΘ＝BE：EK

ゆえに，ΓΘ^2：ΓΘ・ΘB＝BE・EΓ：ΓE・EK＝BE・EΓ：EH^2

なぜなら，直角三角形において，EHは底辺に垂直にひかれる。

ゆえに，ΓΘ^2・EH^{2}の平方根は，三角形ABΓの面積で

（ΓΘ・ΘB）（ΓE・EB）に等しい。・・・・・・・・・・※

しかも，ΓΘ，ΘB，BE，EΓは各々，与えられている。

なぜなら，BΘ＝AΔ＝AZだから，ΓΘは三角形ABΓの周辺の長さの半分である。

一方，ΘBはΓBに対する周辺の長さの半分の延長で，BEはAΓに対する周辺の長さの半分の延長で，EΓはABに対する周辺の長さの半分の延長である。ゆえに，三角形ABΓの面積は得られる。

《※の結果》

（△ABΓ）^{2}＝ΓΘ^2・EH^2＝ΓΘ・ΘB・ΓE・EB

＝s（s－a）（s－b）（s－c）

九章算術の問題　巻第一　方田　　　　　　　　名前

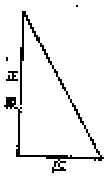
一　いまここに方田がある。横が十五歩、縦が十六歩である。それでは、この田の面積はいくらか。

答え

二　また田がある。横が十二歩、縦が十四歩である。それでは、この田の面積はいくらか。

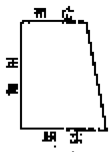
答え

二五　いま圭田がある。広は十二歩、正縦は二十一歩である。面積はいくらか。



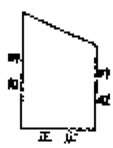
答え

二七　いま邪田がある。一つの頭広は三十歩、もう一つの頭広は四十二歩で、正縦は六十四歩である。面積はいくらか。



答え

二八　また、邪田がある。正広は六十五歩で、一つの畔縦は一百歩、もう一つの畔縦は七十二歩である。面積はいくらか。



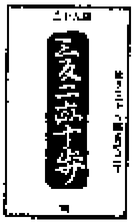
答え

塵劫記の問題・・・第二三 検地　　　　名前

第一問　長さ五八間、幅二五間の田がある。この田の面積はどれだけか。ただし田の面積をいう場合には、一坪すなわち一間四方を一歩、三〇歩すなわち三〇坪を一畝、一〇畝すなわち三〇〇歩あるいは三〇〇坪を一反という

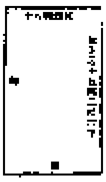
答え

第二問　長さ三八間五尺二寸、幅二五間の田の面積はどれだけか



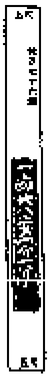
答え

第三問　長さ三五間二尺六寸、幅一八間四尺の田の面積はどれだけか



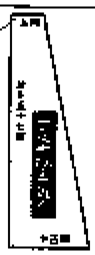
答え

第四問　長さ七六間、幅五尺の矩形の田の面積はどれだけか



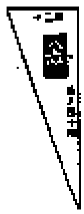
答え

第五問　図のような上の辺の長さ五間、下の辺の長さ一三間、高さに相当した長さ五七間の梯形（ていけい）の田の面積はどれだけか



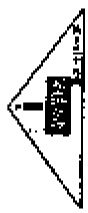
答え

第六問　直角をはさむ二辺の長さが一二間および四〇間の田の面積をもとめよ



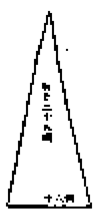
答え

第九問　底辺三九間、高さに相当した長さ一四間の田の面積はどれだけか



答え

第二〇問　図のような高さ三九間、底辺が一六間の三角形の田の面積はどれだけか



答え

研究授業指導案

筑波大学大学院修士課程教育研究科
蘂科 由紀美

1 研究主題

「数学史を活用した学習の解釈を通しての生徒の数学観の変容」

2 研究目標

「九章算術、ヘロンの求積法を題材として2000年前の数学の様相を探る」
「測量法について、その当時の着想や発想を探究し、生徒が追体験する。
また、その方法、歴史・文化の違いを解釈する」

3 対象 中学校3年C組

4 授業計画 ～求積法の起源をたどる～

1 **中国～BC150年**
『九章算術』を題材として
2000年前の中国における測量の探究をする
・ 測量の方法とその歴史・文化的背景

2 **日本～江戸時代**
『塵劫記』を題材として
塵劫記における測量（検地）の探究をする
・ 検地の方法とその歴史・文化的背景
・ 2000年前の中国と比較

3 **ギリシャ～BC150年～AC250**
ヘロンによる三角形の面積公式を題材として
2000年前のギリシャ時代における測量の探究をする
・ 三辺の与えられた三角形の面積をもとめる
⇒ヘロンの公式を使えば高さを求めなくても計算できること
（ヘロンの公式の発見）
・ヘロンによる測量の方法とその歴史・文化的背景
・ヘロンの公式の幾何的証明

※ 全体を通して、測量法の対比をし、それを解釈する

研究授業指導案

筑波大学大学院修士課程教育研究科
蓼科 由紀美

1 研究主題

「数学史を活用した学習の解釈を通しての生徒の数学観の変容」

2 研究目標

「九章算術、ヘロンの求積法を題材として2000年前の数学の様相を探る」

「測量法について、その当時の着想や発想を探究し、生徒が追体験する。

授業展開

学習内容	指導内容（道具）	指導上の留意点
『九章算術』	① 九章算術による測量について ② 問題提示（ワークシート） ③ 自分の方法で解答 ④ 発表・確認 ⑤ 九章算術の計算法（原文） ⑥ 疑問・その他	歴史・文化的背景も理解する パワーポイントと資料 パワーポイントによる解説
『塵劫記』	① 塵劫記による測量について ② 問題提示（ワークシート） ③ 自分の方法で解答 ③ 発表・確認 ④ 塵劫記の計算法（原文） ⑤ 疑問・その他	歴史・文化的背景も理解する パワーポイントと資料 パワーポイントによる解説

ヘロンの公式	① 三辺を与えられた三角形の面積を求める。既習事項の確認 ② ヘロンの解法（原文） ⇒ヘロンの公式 ③ 疑問・その他 ④ ヘロンによる幾何的証明（原文） ⑤ 疑問・その他	生徒が読み、実際に書かせる 歴史・文化的背景も理解する パワーポイントによる解説