授 業 資 料

年　　組　　番　氏名

1、 授業計画について

1回目　・ユークリッド原論の表紙の寓話
　　　　・プラトンの"メノン"
　　　　・古代ギリシア3大問題について

2回目　・コンピュータを用いた探究
　　　　（作図ツール、カブリ利用）

3回目　・道具による解法の探究

【MEMO】

2、ユークリッド（Euclid）原論の表紙

【質問】

この口絵は、座礁した船と 3 人の哲学者を描いている。彼らはソクラテス派の哲学者でアリスティパス（Aristippus）と 2 人の仲間で、彼らは無事に上陸に成功した。そして、そのうちの 1 人が“われわれは恐れる必要ない”と叫んだという。それはなぜか。

3、プラトン全集　対話篇“メノン”

一六

ソクラテス　〔召使の子に向かって〕では、君、ぼくに答えてくれたまえ、正方形とはこのようなものだということがわかるかね？　〔正方形ＡＢＣＤを地面にえがく〕

(82) メノンの召使　はい、わかります。

C ソクラテス　ところで、正方形がもっているこれらの線――四つあるね――は、全部等しいものだね？

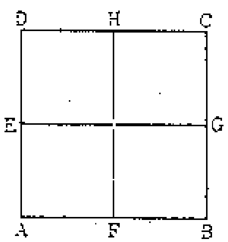
メノンの召使　ええ、たしかに。

ソクラテス　こうやってまんなかを通る線〔ＥＧ・ＨＦ〕をひくと、これらの線もやはり等しいのではないかね？

メノンの召使　はい。

ソクラテス　このような図形には、大きいのも小さいのもあるだろうね？

メノンの召使　ええ、たしかに。



ソクラテス　では、この辺〔ＡＢ〕の長さが二プゥスで、この辺〔ＡＤ〕が二プゥスだとすれば、全体は幾〔平方〕プゥスあるだろうか。こういうふうに考えてごらん。――もしかりに、ここ〔ＡＢ〕が二プゥスで、ここ〔ＡＤ〕が一プゥスしかない〔ＡＥ〕としたら、この図形は二プゥスの一倍の大きさだ〔ＡＢＧＥ〕ということになるのではないかね？

メノンの召使　はい。

D ソクラテス　ところが実際には、ここ〔ＡＤ〕も二プゥスなのだから、この図形の大きさは二の二倍になるのではないかね？

メノンの召使　そうなります。

ソクラテス　すると、二を二倍しただけのプゥスからできていることになるわけだね？

メノンの召使　はい。

ソクラテス　で、二の二倍のプゥスはいくらになる？　かぞえて言ってごらん。

メノンの召使　四〔平方〕プゥスです、ソクラテス。

ソクラテス　ところで、もうひとつ別に、この図形の二倍の大きさのもので、これと同じ種類の図形ができないだろうか？　つまり、これと同じように、もっている線が全部等しいのだ。

メノンの召使　はい、できます。

ソクラテス　ではその図形は、どれだけのプゥスからできているだろうか？

メノンの召使　八〔平方〕プゥスです。

ソクラテス　さあそれでは、ぼくに言ってみてくれたまえ、――その図形のひとつひとつの線は、どれだけのE 長さだろうか。いいかね、こちらの図形〔ＡＢＣＤ〕の一つの線は二プゥスだったね。では、もうひとつの二倍の大きさの図形がもっている線は、いくらだろうか？

メノンの召使　むろんそれは、ソクラテス、二倍の長さのものです。

ソクラテス　それでは、この子がしかるべき想起の仕方で、つぎつぎと想起して行くのを観察したまえ。

〔召使の子に向かって〕で、君はぼくに言ってくれたまえ。――君の主張によると、二倍の大きさの図形は、二倍

83 の長さの線からできるというのだね。ぼくの言うのは、こういう図形のことなのだよ。つまり、こちらの辺は長く、こちらの辺は短いというのではなく、これ〔ABCD〕と同じように、どの辺もみんな等しくて、ただ大きさがこれの二倍、八〔平方〕プゥスだとするのだよ。さあ考えてみたまえ、やはり君には、それが二倍の長さの線からできるように思えるかね？

メノンの召使　そう思えます。

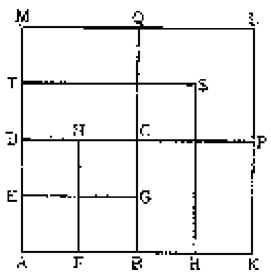
ソクラテス　では、こちらがわにもうひとつ、これだけの長さの線〔BK〕をつけ加えると、この線〔AK〕はこの線〔AB〕の二倍になるのではないかね？

メノンの召使　ええ、たしかに。

ソクラテス　だから、君の主張によると、この線〔AK〕から八〔平方〕プゥスの図形ができるはずなのだね――もしこれと同じ長さの線が四つあつまるならば。

B　メノンの召使　はい。

ソクラテス　では、それ〔AK〕を基底にして、等しい長さの線を四つ書いてみよう。君の言う八〔平方〕プゥスの図形とは、これ〔AKLM〕のことだろうね？



メノンの召使　はい、たしかに。

ソクラテス　これ〔AKLM〕の中にはこれら四つの図形〔ABCD、BKPC、CPLQ、DCQM〕があって、そのひとつひとつは、この四〔平方〕プゥスの図形〔ABCD〕と等しいのではないかね？

メノンの召使　はい。

ソクラテス　そうすると、それ〔AKLM〕はいくらになるかね。これだけの大きさ〔ABCD〕の四倍ではないかね？

メノンの召使　まちがいありません。

ソクラテス　とすると、これだけの四倍がすなわち二倍だということになるのかね？

メノンの召使　けっしてそんなことはありません。

ソクラテス　では何倍かね？

メノンの召使　四倍です。

(83)
C　ソクラテス　してみると、君、二倍の長さの線からは、二倍の大きさのものではなくて、四倍の大きさの図形ができるわけだ。

メノンの召使　おっしゃるとおりです。

ソクラテス　四の四倍なら、つまり一六〔平方〕プゥスになるわけだ。ね？

メノンの召使　はい。

ソクラテス　では八〔平方〕プゥスの図形は、どのような線からできるのだろうか。――この線〔AK〕からは、四倍の大きさのものができるのではないかね？

メノンの召使　そうです。

ソクラテス　そして、その四分の一の大きさ[1]のこれ〔ＡＢＣＤ〕は、半分の長さのこの線〔ＡＢ〕からできているのだね？
メノンの召使　はい。
ソクラテス　よろしい。そして八〔平方〕プゥスの正方形というのは、これ〔ＡＢＣＤ〕の二倍で、これ〔ＡＫＬＭ〕の半分ではないかね？
メノンの召使　はい。
ソクラテス　その正方形をつくる一辺は、これだけの長さの線〔ＡＢ〕よりは長く、これだけの長さの線〔ＡＫ〕よりは短いのではないだろうか。それともどうかね？
D メノンの召使　たしかにそうだと思います。
ソクラテス　そうそう、君がそうだと思ったとおりに答えてくれればいいのだ。――そこできくけれども、この線〔ＡＢ〕は二プゥスで、この線〔ＡＫ〕は四プゥスだったね？
メノンの召使　はい。
ソクラテス　してみると、八〔平方〕プゥスの一辺となる線は、二プゥスの長さのこの線〔ＡＢ〕よりは長く、四プゥスの長さの線よりは短くなければならないということになる。
メノンの召使　そうですね。
E ソクラテス　では言ってみてくれたまえ――君はそれがどれだけの長さだと主張するかね？
メノンの召使　三プゥスです。
ソクラテス　三プゥスだとすると、この線〔ＡＢ〕の半分〔ＢＲ〕をつけ加えると三プゥスになるはずだね？　これ〔ＡＢ〕が二プゥスで、これ〔ＢＲ〕が一プゥスなのだから。そしてこちら側〔ＡＴ〕でも同じように、これ〔ＡＤ〕が二プゥスで、これ〔ＤＴ〕が一プゥス。――こうしてここに、君の言うような図形〔ＡＲＳＴ〕ができるわけだ。
メノンの召使　はい。
ソクラテス　そうすると、ここ〔ＡＲ〕が三プゥスで、ここ〔ＡＴ〕が三プゥスなら、この図形全体は、三の三倍だけのプゥスからできているのではないかね？
メノンの召使　そのようです。
ソクラテス[2]　で、三の三倍のプゥスは幾〔平方〕プゥスかね？
メノンの召使　九〔平方〕プゥスです。
ソクラテス　しかるに、二倍の大きさの図形というのは、幾〔平方〕プゥスでなければならなかったのかね？
メノンの召使　八〔平方〕プゥスです。
ソクラテス　してみると、三プゥスの長さの線からもやはり、八〔平方〕プゥスの大きさの図形はまだできないわけだ。
メノンの召使　たしかにできません。
84 ソクラテス　ではどのような線からできるのだろうか。正確に言ってみてくれたまえ。勘定したくないのなら、それがどのような線か、手で指し示すだけでもいいのだよ。
メノンの召使　いや、ゼウスに誓って、ソクラテス、私にはわかりません。

〔召使の子に向かって〕では、君、答えてくれたまえ。——ここに四〔平方〕プゥスの大きさの図形〔正方形ＡＢＣＤ〕がある。わかるね？

メノンの召使　ええ。

ソクラテス　ここに、もうひとつ別の等しい図形〔ＢＫＰＣ〕を、これにつけ加えることができるね？

メノンの召使　はい。

ソクラテス　さらに、このどちらとも等しい第三番目のもの〔ＣＰＬＱ〕を、ここにつけ加えることができるね？

メノンの召使　はい。

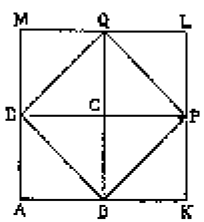
ソクラテス　この角のあいているところを、これ〔ＤＣＱＭ〕をつけ加えてうずめることができるね？

メノンの召使　たしかに。

ソクラテス　そうすると、ここに四つの等しい図形ができることになるね？

E　メノンの召使　はい。

ソクラテス　で、どうだろう——この全体〔ＡＫＬＭ〕は、これ〔ＡＢＣＤ〕の何倍になるだろうか？



メノンの召使　四倍です。

ソクラテス　しかるにわれわれには、二倍の大きさのものができなければならないのだった。おぼえていないかね？

メノンの召使　たしかにそうでした。

ソクラテス　では、こういうふうに角から角へ線〔ＢＤその他〕をひいて行くと、これらの図形のひとつひとつ

85　を二分することになるのではないかね？

メノンの召使　はい。

ソクラテス　そうすると、これら四つの等しい線〔ＤＢ・ＢＰ・ＰＱ・ＱＤ〕ができて、この図形〔ＤＢＰＱ〕をとりかこむことになるね。

メノンの召使　ええ、そういうことになります。

ソクラテス　さあ考えてごらん——この図形〔ＤＢＰＱ〕の大きさはいくらだろうか？

メノンの召使　わかりません。

(83)　ソクラテス　このひとつひとつの線〔ＤＢ・ＢＰ・ＰＱ・ＱＤ〕は、ここに四つの図形があるが、そのおのおのの半分ずつを内側に切りとっているのではないか。ね？

メノンの召使　はい。

ソクラテス　では、半分に切りとられたそれだけの大きさのものが、これ〔ＤＢＰＱ〕の中にいくつあるかね？

メノンの召使　四つあります。

ソクラテス　これ〔ＡＢＣＤ〕の中にはいくつあるかね？

メノンの召使　二つあります。

ソクラテス　四つは二つの何にあたるかね？

メノンの召使　二倍です。

ソクラテス　そうすると、これ〔ＤＢＰＱ〕は何〔平方〕プゥスになるかね？

B　メノンの召使　八〔平方〕プゥスです。

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

（引用：「プラトン全集９」藤沢　令夫訳、岩波書店）

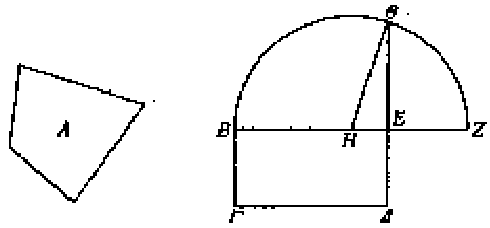
（考察）

4、ユークリッドの作図　（原論より）

14

与えられた直線図形に等しい正方形をつくること。

与えられた直線図形を A とせよ。このとき直線図形 A に等しい正方形をつくらねばならぬ。



直線図形 A に等しい直角平行四辺形 $B\Delta$ がつくられたとせよ。そうすればもし BE が $E\Delta$ に等しければ，命じられたことはなされたことになるであろう。なぜなら正方形 $B\Delta$ が直線図形 A に等しくつくられたから。もし等しくなければ，BE, $E\Delta$ の一方が大きい。BE が大きいとし，BE が Z まで延長され，EZ が $E\Delta$ に等しくされ，BZ が H で２等分され，H を中心とし，HB, HZ の一を半径として半円 $B\Theta Z$ が描かれ，ΔE が Θ まで延長され，$H\Theta$ が結ばれたとせよ。

そうすれば線分 BZ は H において等しい部分に，E において不等な部分に分けられたから，BE, EZ にかこまれた矩形と EH 上の正方形との和は HZ 上の正方形に等しい。そして HZ は $H\Theta$ に等しい。それゆえ矩形 BE, EZ と HE 上の正方形との和は $H\Theta$ 上の正方形に等しい。ところが ΘE, EH 上の正方形の和は $H\Theta$ 上の正方形に等しい。ゆえに矩形 BE, EZ と HE 上の正方形との和は ΘE, EH 上の正方形の和に等しい。双方から HE 上の正方形がひかれたとせよ。そうすれば残りの BE, EZ にかこまれた矩形は $E\Theta$ 上の正方形に等しい。ところが EZ は $E\Delta$ に等しいから，矩形 BE, EZ は $B\Delta$ である。それゆえ平行四辺形 $B\Delta$ は ΘE 上の正方形に等しい。そして $B\Delta$ は直線図形 A に等しい。ゆえに直線図形 A も $E\Theta$ 上に描かれた正方形に等しい。

よって与えられた直線図形 A に等しい正方形，すなわち $E\Theta$ 上に描かれうる正方形がつくられた。これが作図すべきものであった*)。

（引用：「ユークリッド原論」ハイベルグ著　中村　幸四郎他訳　共立出版）

5、古代ギリシアの３大問題（３大作図問題）

① 示された立方体の体積を２倍にするような辺の長さを作図せよ。

「立方体倍積問題、デロス問題」

（正方形の面積を２倍にするような辺の作図は出来るのだが・・・）

② 示された角の３等分線を作図せよ。　「角の３等分問題」

（２等分線の作図は出来るのだが・・・）

③ 示された円と同じ面積の正方形を作図せよ。　「円積問題」

（多角形と同じ面積の三角形の作図は出来るし、三角形と同じ面積の四角形ならできるのだが・・・）

【注意】 ここでいう作図とは『**まっすぐな定木とコンパスを有限回使用するのみ**』という条件がつく。そして、『**定木**』であり『**定規**』ではない。この違いは『**定木**』とは目盛りのない直線が引けるだけのものであり『**定規**』は目盛りで測れるものとする。

⇩

実は、この条件の下では、この３大問題の作図は不可能なことがすでに証明されている。①と②はワンツェル（1837)、③はリンデマン（1882）が不可能であることを証明した。

⇒不可能の証明は巻末参照

○立方体倍積問題の起こり

デルフィーの神託の

"現存する宮殿の２倍の体積をもつ宮殿を造れ"

というお告げ。

宮殿とは…デロス島のアポロン神殿（B．C．５４０頃）のこと。デロス人は疫病から逃れるためにアポロン神に伺いをたてた。そして、お告げ〔デルフィの神託〕を賜わった。

○原典（英訳，日本語訳）

1. DUPLICATION OF THE CUBE

(a) General

Theon Smyr., ed. Hiller 2. 3-12

Ἐρατοσθένης μὲν γὰρ ἐν τῷ ἐπιγραφομένῳ Πλατωνικῷ φησιν ὅτι, Δηλίοις τοῦ θεοῦ χρήσαντος ἐπὶ ἀπαλλαγῇ λοιμοῦ βωμὸν τοῦ ὄντος διπλασίονα κατασκευάσαι, πολλὴν ἀρχιτέκτοσιν ἐμπεσεῖν ἀπορίαν ζητοῦσιν ὅπως χρὴ στερεὸν στερεοῦ γενέσθαι διπλάσιον, ἀφικέσθαι τε πευσομένους περὶ τούτου Πλάτωνος. τὸν δὲ φάναι αὐτοῖς, ὡς ἄρα οὐ διπλασίου βωμοῦ ὁ θεὸς δεόμενος τοῦτο Δηλίοις ἐμαντεύσατο, προφέρων δὲ καὶ ὀνειδίζων τοῖς Ἕλλησιν ἀμελοῦσι μαθημάτων καὶ γεωμετρίας ὠλιγωρηκόσιν.

1. DUPLICATION OF THE CUBE

(a) General

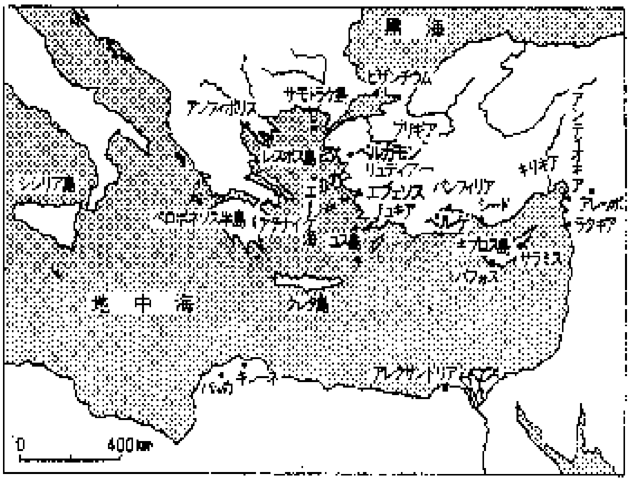
Theon of Smyrna, ed. Hiller 2. 3-12

In his work entitled *Platonicus* Eratosthenes says that, when the god announced to the Delians by oracle that to get rid of a plague they must construct an altar double of the existing one, their craftsmen fell into great perplexity in trying to find how a solid could be made double of another solid, and they went to ask Plato about it. He told them that the god had given this oracle, not because he wanted an altar of double the size, but because he wished, in setting this task before them, to reproach the Greeks for their neglect of mathematics and their contempt for geometry.

1．　立方体の倍積（Duplication of the Cube）

（a）General

Eratosthenes は著書 Platonicus の中で、神が Delians に神託を示し、それは疫病から抜け出すには彼らは現存する宮殿の２倍の宮殿を構築しなければならないというものであった。彼らの建築士はひどい当惑に陥った。どうしたら２倍の立体を見つけられるか。そして，彼らは Plato にそれについて聞きに行った。彼は彼らに伝えた。この神託で神は、２倍の宮殿が欲しいわけでなく，この難問を与えることで、ギリシャ人が数学を怠り、幾何学をさげすんでいることを非難している。



（図１）小アジアの地図

6，立方体倍積問題の解明

○キオスのヒポクラテス（Hippocrates）はこの作図問題を解かなかったけれども、２つの与えられた量ａとｂの間に２つの比例中項（two mean proportionals）*ｘとｙを挿入するという問題と同等であると考えた。

線分ａ、ｂ、ｘ、ｙがあり，ａ：ｘ＝ｘ：ｙ＝ｙ：ｂの関係。

○立方体倍積問題を作図した先人たち

ディオクレス(Diocles)、エラトステネス（Eratosthenes）、アルキュタス（Archytas）ニコメデス（Nicomedes）らがその比例中項を作図した。

【MEMO】

7、ディオクレス(Diocles)の解法

○原典（英訳，日本語訳）

Eutoc. *Comm. in Archim. De Sphaera et Cyl.* ii., Archim. ed. Heiberg iii. 66. 8–70. 5

Ὡς Διοκλῆς ἐν τῷ Περὶ πυρίων

Ἐν κύκλῳ ἤχθωσαν δύο διάμετροι πρὸς ὀρθὰς αἱ ΑΒ, ΓΔ, καὶ δύο περιφέρειαι ἴσαι ἀπειλήφθωσαν ἐφ' ἑκάτερα τοῦ Β αἱ ΕΒ, ΒΖ, καὶ διὰ τοῦ Ζ παράλληλος τῇ ΑΒ ἤχθω ἡ ΖΗ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΔΕ. λέγω, ὅτι τῶν ΓΗ, ΗΘ δύο μέσαι ἀνάλογόν εἰσιν αἱ ΖΗ, ΗΔ.

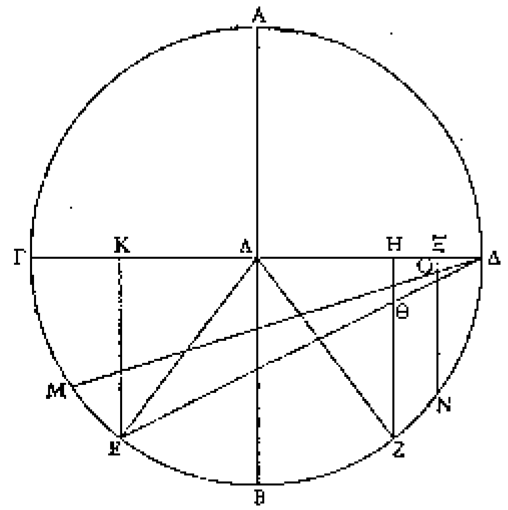
Ἤχθω γὰρ διὰ τοῦ Ε τῇ ΑΒ παράλληλος ἡ ΕΚ· ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ μὲν ΕΚ τῇ ΖΗ, ἡ δὲ ΚΓ τῇ ΗΔ. ἔσται γὰρ τοῦτο δῆλον ἀπὸ τοῦ Λ ἐπὶ τὰ Ε, Ζ ἐπιζευχθεισῶν εὐθειῶν· ἴσαι γὰρ γίνονται αἱ ὑπὸ ΓΛΕ, ΖΛΔ, καὶ ὀρθαὶ αἱ πρὸς τοῖς Κ, Η· καὶ πάντα ἄρα πᾶσιν διὰ τὸ τὴν ΛΕ τῇ ΛΖ ἴσην εἶναι· καὶ λοιπὴ ἄρα ἡ ΓΚ τῇ ΗΔ ἴση ἐστίν. ἐπεὶ οὖν ἐστιν, ὡς ἡ ΔΚ πρὸς ΚΕ, ἡ ΔΗ πρὸς ΗΘ, ἀλλ' ὡς ἡ ΔΚ πρὸς ΚΕ, ἡ ΕΚ πρὸς ΚΓ· μέση γὰρ ἀνάλογον ἡ ΕΚ τῶν ΔΚ, ΚΓ· ὡς ἄρα ἡ ΔΚ πρὸς ΚΕ καὶ ἡ ΕΚ πρὸς ΚΓ, οὕτως ἡ ΔΗ πρὸς ΗΘ. καί ἐστιν ἴση ἡ μὲν ΔΚ τῇ ΓΗ, ἡ δὲ ΚΕ τῇ ΖΗ, ἡ δὲ ΚΓ τῇ ΗΔ· ὡς ἄρα ἡ ΓΗ πρὸς ΗΖ, ἡ ΖΗ πρὸς ΗΔ καὶ ἡ ΔΗ πρὸς ΗΘ. ἐὰν δὴ παρ' ἑκάτερα τοῦ Β ληφθῶσιν περιφέρειαι ἴσαι αἱ ΜΒ, ΒΝ, καὶ διὰ μὲν τοῦ Ν παράλληλος ἀχθῇ τῇ ΑΒ ἡ ΝΞ, ἐπιζευχθῇ δὲ ἡ ΔΜ, ἔσονται πάλιν τῶν ΓΞ, ΞΟ μέσαι ἀνάλογον αἱ ΝΞ, ΞΔ. πλειόνων οὖν οὕτως καὶ συνεχῶν παραλλήλων ἐκβληθεισῶν μεταξὺ τῶν Β, Δ καὶ ταῖς ἀπολαμβανομέναις ὑπ' αὐτῶν περιφερείαις πρὸς τῷ Β ἴσων τεθεισῶν ἀπὸ τοῦ Β ὡς ἐπὶ τὸ Γ καὶ ἐπὶ τὰ γενάμενα σημεῖα ἐπιζευχθεισῶν εὐθειῶν ἀπὸ τοῦ Δ, ὡς τῶν ὁμοίων ταῖς ΔΕ, ΔΜ, τμηθήσονται αἱ παράλληλοι αἱ μεταξὺ τῶν Β, Δ κατά τινα σημεῖα, ἐπὶ τῆς προκειμένης καταγραφῆς τὰ Ο, Θ, ἐφ' ἃ κανόνος παραθέσει ἐπιζεύξαντες εὐθείας ἕξομεν καταγε-

Eutocius, *Commentary on Archimedes' Sphere and Cylinder* ii., Archim. ed. Heiberg iii. 66. 8–70. 5

(iii.) *The Solution of Diocles in his Book "On Burning Mirrors"* [a]

In a circle let there be drawn two diameters ΑΒ, ΓΔ at right angles, and on either side of Β let there be cut off two equal arcs ΕΒ, ΒΖ, and through Ζ let ΖΗ be drawn parallel to ΑΒ, and let ΔΕ be joined. I say that ΖΗ, ΗΔ are two mean proportionals between ΓΗ, ΗΘ.

For let ΕΚ be drawn through Ε parallel to ΑΒ; ΕΚ will therefore be equal to ΖΗ, and ΚΓ to ΗΔ; this will be clear if straight lines are drawn joining



Λ to Ε, Ζ; for the angles ΓΛΕ, ΖΛΔ are equal, and the angles at Κ, Η are right; and therefore, since ΛΕ = ΛΖ, all things will be equal to all; and therefore the remaining element ΓΚ is equal to ΗΔ. Now since

$$\Delta K : KE = \Delta H : H\Theta,$$

but $\Delta K : KE = EK : K\Gamma$ (for ΕΚ is a mean proportional between ΔΚ, ΚΓ),

therefore $\Delta K : KE = EK : K\Gamma = \Delta H : H\Theta$.

And $\Delta K = \Gamma H,\ KE = ZH,\ K\Gamma = H\Delta$;

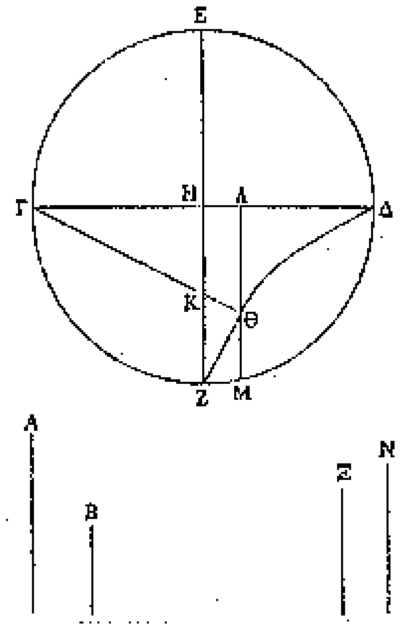
therefore $\Gamma H : HZ = ZH : H\Delta = \Delta H : H\Theta$.

If then on either side of Β there be cut off equal arcs ΜΒ, ΒΝ, and ΝΞ be drawn through Ν parallel to ΑΒ, and ΔΜ be joined, ΝΞ, ΞΔ, will again be mean proportionals between ΓΞ, ΞΟ. If in this way more parallels are drawn continually between Β, Δ, and arcs equal to the arcs cut off between them and Β are γραμμένην ἐν τῷ κύκλῳ τινὰ γραμμήν, ἐφ' ἧς ἐὰν ληφθῇ τυχὸν σημεῖον καὶ δι' αὐτοῦ παράλληλος ἀχθῇ τῇ ΑΒ, ἔσται ἡ ἀχθεῖσα καὶ ἡ ἀπολαμβανομένη ὑπ' αὐτῆς ἀπὸ τῆς διαμέτρου πρὸς τῷ Δ μέσαι ἀνάλογον τῆς τε ἀπολαμβανομένης ὑπ' αὐτῆς ἀπὸ τῆς διαμέτρου πρὸς τῷ Γ σημείῳ καὶ τοῦ μέρους αὐτῆς τοῦ ἀπὸ τοῦ ἐν τῇ γραμμῇ σημείου ἐπὶ τὴν ΓΔ διάμετρον.

Τούτων προκατεσκευασμένων ἔστωσαν αἱ δοθεῖσαι δύο εὐθεῖαι, ὧν δεῖ δύο μέσας ἀνάλογον εὑρεῖν, αἱ Α, Β, καὶ ἔστω κύκλος, ἐν ᾧ δύο διάμετροι πρὸς ὀρθὰς ἀλλήλαις αἱ ΓΔ, ΕΖ, καὶ γεγράφθω ἐν αὐτῷ ἡ διὰ τῶν συνεχῶν σημείων γραμμή, ὡς προείρηται, ἡ ΔΘΖ, καὶ γεγονέτω, ὡς ἡ Α πρὸς τὴν Β, ἡ ΓΗ πρὸς ΗΚ, καὶ ἐπιζευχθεῖσα ἡ ΓΚ καὶ ἐκβληθεῖσα τεμνέτω τὴν γραμμὴν κατὰ τὸ Θ, καὶ διὰ τοῦ Θ τῇ ΕΖ παράλληλος ἤχθω ἡ ΛΜ· διὰ ἄρα τὰ προγεγραμμένα τῶν ΓΛ, ΛΘ μέσαι ἀνάλογόν εἰσιν αἱ ΜΛ, ΛΔ. καὶ ἐπεί ἐστιν, ὡς ἡ ΓΛ πρὸς ΛΘ, οὕτως ἡ ΓΗ πρὸς ΗΚ, ὡς δὲ ἡ ΓΗ πρὸς ΗΚ, οὕτως ἡ Α πρὸς τὴν Β, ἐὰν ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ ταῖς ΓΛ, ΛΜ, ΛΔ, ΛΘ παρεμβάλωμεν μέσας τῶν Α, Β, ὡς τὰς Ν, Ξ, ἔσονται εἰλημμέναι τῶν Α, Β μέσαι ἀνάλογον αἱ Ν, Ξ· ὅπερ ἔδει εὑρεῖν.

marked off from Β in the direction of Γ, and straight lines are drawn from Δ to the points so obtained, such as ΔΕ, ΔΜ, the parallels between Β and Δ will be cut in certain points, such as Ο, Θ in the accompanying figure. Joining these points with straight lines by applying a ruler we shall describe in the circle a certain curve,[a] and if on this any point be taken at random, and through it a straight line be drawn parallel to ΑΒ, the line so drawn and the portion of the diameter cut off by it in the direction of Δ will be mean proportionals between the portion of the diameter cut off by it in the direction of the point Γ and the part of the parallel itself between the point on the curve and the diameter ΓΔ.

With this preliminary construction, let the two



given straight lines, between which it is required to find two mean proportionals, be Α, Β, and let there be a circle in which ΓΔ, ΕΖ are two diameters at right angles to each other, and let there be drawn in it through the successive points a curve ΔΘΖ, in the aforesaid manner, and let $A : B = \Gamma H : HK$, and let Γ, Κ be joined, and let the straight line joining them be produced so as to cut the line in Θ, and through Θ let ΛΜ be drawn parallel to ΕΖ; therefore by what has been written previously ΜΛ, ΛΔ are mean proportionals between ΓΛ, ΛΘ. And since $\Gamma\Lambda : \Lambda\Theta = \Gamma H : HK$ and $\Gamma H : HK = A : B$, if between Α, Β we place means Ν, Ξ in the same ratio as ΓΛ, ΛΜ, ΛΔ, ΛΘ,[a] then Ν, Ξ will be mean proportionals between Α, Β; which was to be found.

（引用：「ギリシア数学史」ヒース著）

○著書"On Burning Mirrors"の中のDioclesの解法

円の中に２つの直径、ＡＢ、ΓΔを直交するようにとり、Ｂの両側に２つの等しい円弧、ＥＢ、ＢＺとなるように分け、Ｚを通りＡＢと平行にＺＨをとり、そして、ΔＥを結ぶ。
ＺＨ、ＨΔはΓＨ、Ｈθの比例中項になる。
Ｅを通り、ＡＢと平行にＥＫをとると、ＥＫはＺＨと、ＫΓはＨΔと等しくなる。
ΛからＥ、Ｚに直線で結ぶと明らかになる。∠ΓΛＥと∠ＺΛΔは等しく、∠Ｋと∠Ｈは直角である。それゆえにΛＥ＝ΛＺより、すべてお互いに等しくなる。残っている成分ΓＫはＨΔと等しい。

ΔＫ：ＫＥ＝ΔＨ：Ｈθ

しかし

ΔＫ：ＫＥ＝ＥＫ：ＫΓ（ＥＫはΔＫ、ＫΓ間の比例中項）

それゆえ

ΔＫ：ＫＥ＝ＥＫ：ＫΓ＝ΔＨ：Ｈθ

そして

ΔＫ＝ΓＨ、ＫＥ＝ＺＨ、ＫΓ＝ＨΔ

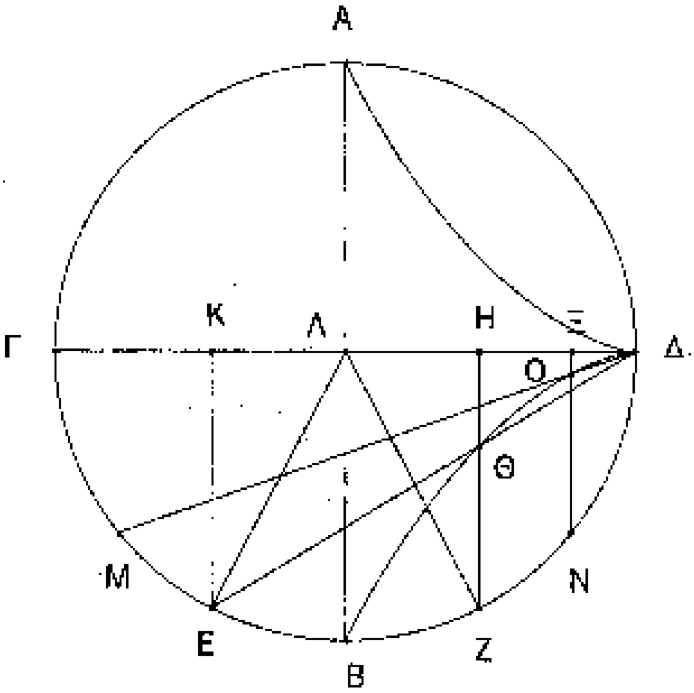
それゆえに

ΓＨ：ＨＺ＝ＺＨ：ＨΔ＝ΔＨ：Ｈθ

Ｂの両側に円弧ＭＢ、ＢＮが等しくなるように分け、Ｎを通りＡＢと平行になるようにＮΞと結ぶ。ΔＭを結び、ＮΞ、ΞΔはΓΞ、ΞＯ間の比例中項になる。このようにしてＢΔ間にさらに平行線を描き、それらの間で切断された円弧と同じ長さの円弧ＢをＢからΓの方向へ区分し、さらにΔＥ、ΔＭのようにΔから得られた点までＢとΔの間の直線をかくと、平行線は点Ｏ、θのようなある点で切断される。定規を当ててこれらの点を直線でつなぐと、円の中に曲線を描くことができ、任意にある点をとり、ＡＢに平行に直線をとり、その描かれた線と直径の一部をΔの方向に切り取ったところは、比例中項になり、直径の一部をΓの方向に切り取った部分と曲線の点と直径ΓΔ間は比例中項になる。

この予備の構造物とともに、２つの比例中項を見つけるために与えられた、２つの直線をＡ、Ｂとし、互いに直交する２つの直径ΓΔ、ＥＺが円の中にあり、その円内で連続する点を通り曲線ΔθＺを描く。前述のやり方でさらに、Ａ：Ｂ＝ΓＨ：ＨＫとし、Γ、Ｋを結び、直線点θでその直線を切断するように、θを通り、ΛＭをＥＺと平行になるようにとる。それゆえに以前のＭΛ、ΛΔはΓΛ、Λθ間の比例中項になる。ΓΛ：Λθ＝ΓＨ：ＨＫ、ΓＨ：ＨＫ＝Ａ：Ｂなので、Ａ、Ｂ間に比例中項Ｎ、ΞをΓΛ、ΛＭ、ΛΔ、Λθと同じ割合で置くと、Ｎ、ΞはＡ、Ｂ間の比例中項となる。

○作図例



【MEMO】

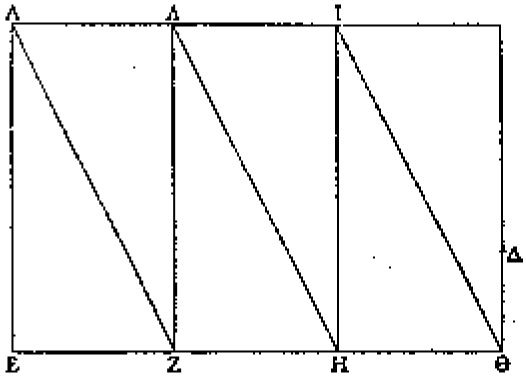
8. エラトステネス（Eratosthenes）の解法

○原典（英訳，日本語訳）

Ibid. 88. 3–96. 27

Ὡς Ἐρατοσθένης . . .

Δεδόσθωσαν δύο ἄνισοι εὐθεῖαι, ὧν δεῖ δύο μέσας ἀνάλογον εὑρεῖν ἐν συνεχεῖ ἀναλογίᾳ, αἱ ΑΕ, ΔΘ, καὶ κείσθω ἐπί τινος εὐθείας τῆς ΕΘ



πρὸς ὀρθὰς ἡ ΑΕ, καὶ ἐπὶ τῆς ΕΘ τρία συνεστάτω παραλληλόγραμμα ἐφεξῆς τὰ ΑΖ, ΖΙ, ΙΘ, καὶ ἤχθωσαν διάμετροι ἐν αὐτοῖς αἱ ΑΖ, ΛΗ, ΙΘ· ἔσονται δὴ αὗται παράλληλοι. μένοντος δὴ τοῦ μέσου παραλληλογράμμου τοῦ ΖΙ συνωσθήτω τὸ μὲν ΑΖ ἐπάνω τοῦ μέσου, τὸ δὲ ΙΘ ὑποκάτω, καθάπερ ἐπὶ τοῦ δευτέρου σχήματος, ἕως οὗ γένηται τὰ Α, Β, Γ, Δ κατ' εὐθεῖαν, καὶ διήχθω διὰ τῶν Α, Β, Γ, Δ σημείων εὐθεῖα καὶ συμπιπτέτω τῇ ΕΘ ἐκβληθείσῃ κατὰ τὸ Κ· ἔσται δή, ὡς ἡ ΑΚ πρὸς ΚΒ, ἐν μὲν ταῖς ΑΕ, ΖΒ παραλλήλοις ἡ ΕΚ πρὸς ΚΖ, ἐν δὲ ταῖς ΑΖ, ΒΗ παραλλήλοις ἡ ΖΚ πρὸς ΚΗ. ὡς ἄρα ἡ ΑΚ πρὸς ΚΒ, ἡ ΕΚ πρὸς ΚΖ καὶ ἡ ΚΖ πρὸς ΚΗ. πάλιν, ἐπεί ἐστιν, ὡς ἡ ΒΚ πρὸς ΚΓ, ἐν μὲν ταῖς ΒΖ, ΓΗ παραλλήλοις ἡ ΖΚ πρὸς ΚΗ, ἐν δὲ ταῖς ΒΗ, ΓΘ παραλλήλοις ἡ ΗΚ πρὸς ΚΘ, ὡς ἄρα ἡ ΒΚ πρὸς ΚΓ, ἡ ΖΚ πρὸς ΚΗ καὶ ἡ ΗΚ πρὸς ΚΘ. ἀλλ' ὡς ἡ ΖΚ πρὸς ΚΗ, ἡ ΕΚ πρὸς ΚΖ· καὶ ὡς ἄρα ἡ ΕΚ πρὸς ΚΖ, ἡ ΖΚ πρὸς ΚΗ καὶ ἡ ΗΚ πρὸς ΚΘ. ἀλλ' ὡς ἡ ΕΚ πρὸς ΚΖ, ἡ ΑΕ πρὸς ΒΖ, ὡς δὲ ἡ ΖΚ πρὸς ΚΗ, ἡ ΒΖ πρὸς ΓΗ, ὡς δὲ ἡ ΗΚ πρὸς ΚΘ, ἡ ΓΗ πρὸς ΔΘ· καὶ ὡς ἄρα ἡ ΑΕ πρὸς ΒΖ, ἡ ΒΖ πρὸς ΓΗ καὶ ἡ ΓΗ πρὸς ΔΘ. ηὕρηνται ἄρα τῶν ΑΕ, ΔΘ δύο μέσαι ἥ τε ΒΖ καὶ ἡ ΓΗ.

Ταῦτα οὖν ἐπὶ τῶν γεωμετρουμένων ἐπιφανειῶν ἀποδέδεικται· ἵνα δὲ καὶ ὀργανικῶς δυνώμεθα τὰς δύο μέσας λαμβάνειν, διαπήγνυται πλινθίον ξύλινον ἢ ἐλεφάντινον ἢ χαλκοῦν ἔχον τρεῖς πινακίσκους ἴσους ὡς λεπτοτάτους, ὧν ὁ μὲν μέσος ἐνήρμοσται, οἱ δὲ δύο ἐπωστοί εἰσιν ἐν χολέδραις, τοῖς δὲ μεγέθεσιν καὶ ταῖς συμμετρίαις ὡς ἕκαστοι ἑαυτοὺς πείθουσιν· τὰ μὲν γὰρ τῆς ἀποδείξεως ὡσαύτως συντελεῖται· πρὸς δὲ τὸ ἀκριβέστερον λαμβάνεσθαι τὰς γραμμὰς φιλοτεχνητέον, ἵνα ἐν τῷ συνάγεσθαι τοὺς πινακίσκους παράλληλα διαμένῃ πάντα καὶ ἄσχαστα καὶ ὁμαλῶς συναπτόμενα ἀλλήλοις.

Ἐν δὲ τῷ ἀναθήματι τὸ μὲν ὀργανικὸν χαλκοῦν ἐστιν καὶ καθήρμοσται ὑπ' αὐτὴν τὴν στεφάνην τῆς στήλης προσμεμολυβδοχοημένον, ὑπ' αὐτοῦ δὲ ἡ ἀπόδειξις συντομώτερον φραζομένη καὶ τὸ σχῆμα,

Ibid. 88. 3–96. 27 [a]

(vi.) *The Solution of Eratosthenes* . . .

Let there be given two unequal straight lines ΑΕ, ΔΘ between which it is required to find two mean proportionals in continued proportion, and let ΑΕ be placed at right angles to the straight line ΕΘ, and upon ΕΘ let there be erected three successive parallelograms [b] ΑΖ, ΖΙ, ΙΘ, and let the diagonals ΑΖ, ΛΗ, ΙΘ be drawn therein ; these will be parallel. While the middle parallelogram ΖΙ remains stationary, let the other two approach each other, ΑΖ above the middle one, ΙΘ below it, as in the second figure,[c] until Α, Β, Γ, Δ lie along a straight line, and let a straight line be drawn through the points Α, Β, Γ, Δ, and let it meet ΕΘ produced in Κ ; it will follow that in the parallels ΑΕ, ΖΒ

$$AK : KB = EK : KZ$$

and in the parallels ΑΖ, ΒΗ

$$AK : KB = ZK : KH.$$

Therefore $AK : KB = EK : KZ = KZ : KH.$

Again, since in the parallels ΒΖ, ΓΗ

$$BK : K\Gamma = ZK : KH$$

and in the parallels ΒΗ, ΓΘ

$$BK : K\Gamma = HK : K\Theta,$$

therefore $BK : K\Gamma = ZK : KH = HK : K\Theta.$

But $ZK : KH = EK : KZ$, and therefore

$$EK : KZ = ZK : KH = HK : K\Theta.$$

But $EK : KZ = AE : BZ$, $ZK : KH = BZ : \Gamma H$, $HK : K\Theta = \Gamma H : \Delta\Theta.$

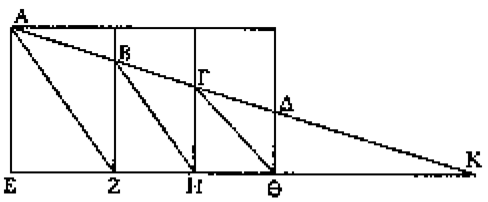
Therefore $AE : BZ = BZ : \Gamma H = \Gamma H : \Delta\Theta.$

Therefore between ΑΕ, ΔΘ two means, ΒΖ, ΓΗ, have been found.

Such is the demonstration on geometrical surfaces ; and in order that we may find the two means mechanically, a board of wood or ivory or bronze is pierced through, having on it three equal tablets, as smooth as possible, of which the midmost is fixed and the two outside run in grooves, their sizes and proportions being a matter of individual choice—for the proof is accomplished in the same manner ; in order that the lines may be found with the greatest accuracy, the instrument must be skilfully made, so that when the tablets are moved everything remains parallel, smoothly fitting without a gap.

In the votive gift the instrument is of bronze and is fastened on with lead close under the crown of the pillar, and beneath it is a shortened form of the proof μετ' αὐτὸ δὲ ἐπίγραμμα. ὑπογεγράφθω οὖν σοι καὶ ταῦτα, ἵνα ἔχῃς καὶ ὡς ἐν τῷ ἀναθήματι. τῶν δὲ δύο σχημάτων τὸ δεύτερον γέγραπται ἐν τῇ στήλῃ.

"Δύο τῶν δοθεισῶν εὐθειῶν δύο μέσας ἀνάλογον εὑρεῖν ἐν συνεχεῖ ἀναλογίᾳ. δεδόσθωσαν αἱ ΑΕ, ΔΘ. συνάγω δὴ τοὺς ἐν τῷ ὀργάνῳ πίνακας, ἕως ἂν κατ' εὐθεῖαν γένηται τὰ Α, Β, Γ, Δ σημεῖα. νοείσθω δή, ὡς ἔχει ἐπὶ τοῦ δευτέρου σχήματος. ἔστιν ἄρα, ὡς ἡ ΑΚ πρὸς ΚΒ, ἐν μὲν ταῖς ΑΕ, ΒΖ παραλλήλοις ἡ ΕΚ πρὸς ΚΖ, ἐν δὲ ταῖς ΑΖ, ΒΗ ἡ ΖΚ πρὸς ΚΗ· ὡς ἄρα ἡ ΕΚ πρὸς ΚΖ, ἡ



ΚΖ πρὸς ΚΗ. ὡς δὲ αὗται πρὸς ἀλλήλας, ἥ τε ΑΕ πρὸς ΒΖ καὶ ἡ ΒΖ πρὸς ΓΗ. ὡσαύτως δὲ δείξομεν, ὅτι καί, ὡς ἡ ΖΒ πρὸς ΓΗ, ἡ ΓΗ πρὸς ΔΘ· ἀνάλογον ἄρα αἱ ΑΕ, ΒΖ, ΓΗ, ΔΘ. ηὕρηνται ἄρα δύο τῶν δοθεισῶν δύο μέσαι.

"Ἐὰν δὲ αἱ δοθεῖσαι μὴ ἴσαι ὦσιν ταῖς ΑΕ, ΔΘ, ποιήσαντες αὐταῖς ἀνάλογον τὰς ΑΕ, ΔΘ τούτων ληψόμεθα τὰς μέσας καὶ ἐπανοίσομεν ἐπ' ἐκείνας, καὶ ἐσόμεθα πεποιηκότες τὸ ἐπιταχθέν. ἐὰν δὲ πλείους μέσας ἐπιταχθῇ εὑρεῖν, ἀεὶ ἑνὶ πλείους πινακίσκους καταστησόμεθα ἐν τῷ ὀργανίῳ τῶν ληφθησομένων μέσων· ἡ δὲ ἀπόδειξις ἡ αὐτή·

"Εἰ κύβον ἐξ ὀλίγου διπλήσιον, ὠγαθέ, τεύχειν
  φράζεαι ἢ στερεὴν πᾶσαν ἐς ἄλλο φύσιν
εὖ μεταμορφῶσαι, τόδε τοι πάρα, κἂν σύ γε μάνδρην
  ἢ σιρὸν ἢ κοίλου φρείατος εὐρὺ κύτος
τῇδ' ἀναμετρήσαιο, μέσας ὅτε τέρμασιν ἄκροις
  συνδρομάδας δισσῶν ἐντὸς ἕλῃς κανόνων.
μηδὲ σύ γ' Ἀρχύτεω δυσμήχανα ἔργα κυλίνδρων
  μηδὲ Μεναιχμείους κωνοτομεῖν τριάδας
διζήσῃ, μηδ' εἴ τι θεουδέος Εὐδόξοιο
  καμπύλον ἐν γραμμαῖς εἶδος ἀναγράφεται.
τοῖσδε γὰρ ἐν πινάκεσσι μεσόγραφα μυρία τεύχοις
  ῥεῖά κεν ἐκ παύρου πυθμένος ἀρχόμενος.
εὐαίων, Πτολεμαῖε, πατὴρ ὅτι παιδὶ συνηβῶν
  πάνθ', ὅσα καὶ Μούσαις καὶ βασιλεῦσι φίλα,
αὐτὸς ἐδωρήσω· τὸ δ' ἐς ὕστερον, οὐράνιε Ζεῦ,
  καὶ σκήπτρων ἐκ σῆς ἀντιάσειε χερός.
καὶ τὰ μὲν ὣς τελέοιτο, λέγοι δέ τις ἄνθεμα λεύσσων·
  τοῦ Κυρηναίου τοῦτ' Ἐρατοσθένεος."

and the figure, and along with this is an epigram. These also shall be written below for you, in order that you may have what is on the votive gift. Of the two figures, the second is that which is inscribed on the pillar.[a]

"Between two given straight lines to find two means in continuous proportion. Let ΑΕ, ΔΘ be the given straight lines. Then I move the tables in the instrument until the points Α, Β, Γ, Δ are in the same straight line. Let this be pictured as in the second figure. Then ΑΚ : ΚΒ is equal, in the parallels ΑΕ, ΒΖ, to ΕΚ : ΚΖ, and in the parallels ΑΖ, ΒΗ to ΖΚ : ΚΗ; therefore ΕΚ : ΚΖ = ΚΖ : ΚΗ. Now this is also the ratio ΑΕ : ΒΖ and ΒΖ : ΓΗ. Similarly we shall show that ΖΒ : ΓΗ = ΓΗ : ΔΘ; ΑΕ, ΒΖ, ΓΗ, ΔΘ are therefore proportional. Between the two given straight lines two means have therefore been found.

"If the given straight lines are not equal to ΑΕ, ΔΘ, by making ΑΕ, ΔΘ proportional to them and taking the means between these and then going back to the original lines, we shall do what was enjoined. If it is required to find more means, we shall continually insert more tables in the instrument according to the number of means to be taken; and the proof is the same.

"If, good friend, thou thinkest to produce from a small [cube][a] one double thereof, or duly to change any solid figure into another nature, this is in thy power, and thou canst measure a byre or corn-pit or the broad basin of a hollow well by this method, when thou takest between two rulers means converging with their extreme ends. Do not seek to do the difficult business of the cylinders of Archytas, or to cut the cone in the triads[b] of Menaechmus, or to produce any such curved form in lines as is described by the divine Eudoxus. Indeed, on these tablets thou couldst easily find a thousand means, beginning from a small base. Happy art thou, O Ptolemy, a father who lives his son's life in all things, in that thou hast given him such things as are dear to the Muses and kings; and in the future, O heavenly Zeus, may he also receive the sceptre from thy hands. May this prayer be fulfilled, and may anyone seeing this votive offering say: This is the gift of Eratosthenes of Cyrene."

(引用：「ギリシア数学史」ヒース著)

○ Eratosthenes の解法

連続する比例関係の中に２つの比例中項を見つけるために２つの等しくない直線ＡＥ、Δθを与え、直線Ｅθに対して直角にＡＥをとり、Ｅθ上に直立した３つの連続する平行四辺形ＡＺ、ＺＩ、Ｉθをつくり、その中に対角線ＡＺ、ΑＨ、Ｉθを描くと、それらは平行になる。中の平行四辺形ＺＩは固定したままで、他の２つの平行四辺形を互いに近づけ、２番目の図にあるように、真ん中の平行四辺形の上にAZ、下にＩθがくる。Ａ、Ｂ、Γ、Δが直線に沿って並ぶまで、点Ａ、Ｂ、Γ、Δを通って直線を描き、それがＥθの延長線とＫで交わるようにする。

ＡＥ、ＺＢは平行なので

$$AK : KB = EK : KZ$$

ＡＺ、ＢＨは平行なので

$$AK : KB = ZK : KH$$

それゆえ

$$AK : KB = EK : KZ = KZ : KH$$

また、ＢＺ、ΓＨは平行より

$$BK : K\Gamma = ZK : KH$$

ＢＨ、Γθは平行より

$$BK : K\Gamma = HK : K\theta$$

それゆえ

$$BK : K\Gamma = ZK : KH = HK : K\theta$$

しかし

$$ZK : KH = EK : KZ$$

それゆえ

$$EK : KZ = ZK : KH = HK : K\theta$$

しかし

$$EK : KZ = AE : BZ,\quad ZK : KH = BZ : \Gamma H,$$
$$HK : K\theta = \Gamma H : \Delta\theta$$

それゆえ

$$AE : BZ = BZ : \Gamma H = \Gamma H : \Delta\theta$$

したがってＡＥ、Δθの間には２つの比例中項ＢＺ、ΓＨが見つけられた。

〜〜

（以下、参考）

これらは幾何平面上での証明である。機械的に比例中項を見つける目的で、木や象牙、青銅の板、その上には３つの同じ刻板があったが、できるだけ滑らかに突きとおされ、ちょうど真中は固定され、溝の２つの外側の方向、それらの大きさと型は個々の選択の問題であった。証明が同じ方法で証明し終えるため、かなり正確に線を見つけられるように、その道具は精巧に作られなければならない。だから、刻板が動かされる際はすべてのものが、平行のままで保たれ、隙間なくスムーズに合う。

奉納物の中に、その道具は青銅製で、王冠の支柱の下に閉じられた鉛でしっかり固定され、その下には、証明や図形を縮めたものがあり、短い風刺もある。これらもまたあなたに書かれたもので、奉納物に何があるかを知るためのものだ。２つの図のうち、２つめの図は支柱に刻まれたものだ。

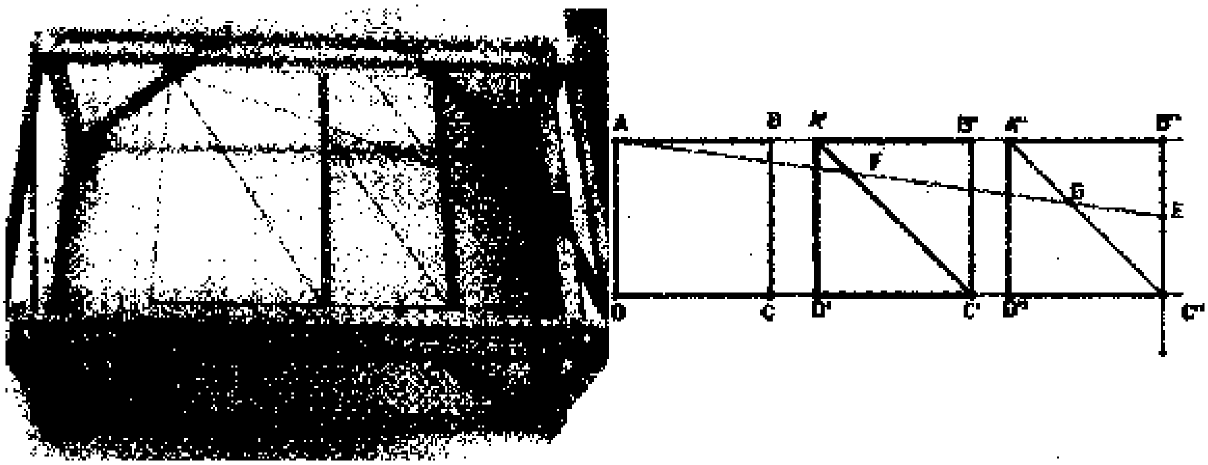
与えられた２つの直線間に連続する比例関係から２つの比例中項を見つける。与えられた直

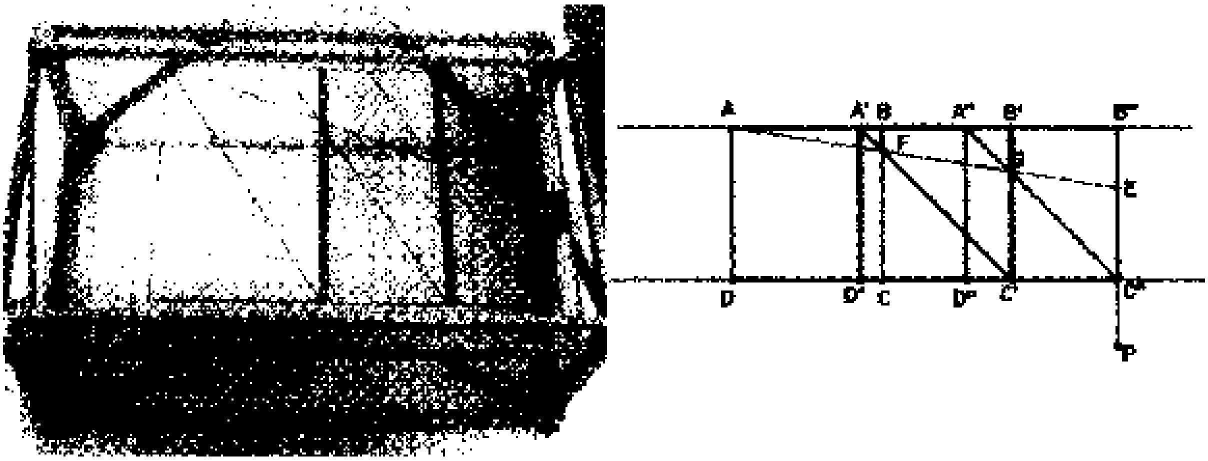
線ＡＥ、Δθがある。点Ａ、Ｂ、Γ、Δが同じ直線上にくるまで刻板を道具の上に移す。これを、２つ目にあるように描く。そうすると、ＡＥ、ＢＺが平行より、ＡＫ：ＫＢはＥＫ：ＫＺと等しい。ＡＺ、ＢＨが平行より、ＺＫ：ＫＨと等しい。したがって、ＥＫ：ＫＺ＝ＫＺ：ＫＨ。今、これはＡＥ：ＢＺとＢＺ：ΓＨの比でもある。したがって、同様にしてＺＢ：ΓＨ＝ΓＨ：ΔθでＡＥ、ＢＺ、ΓＨ、Δθは比例していることを示す。与えられた２つの直線から、２つの比例中項が見つけられた。

与えられた直線がＡＥ、Δθと等しくないならば、それらと比例するＡＥ、Δθを作り、これらの間に比例中項をとり、そして元の直線に戻れ。もしさらに比例中項を見つけなければならないならば、とられる比例中項の数に応じてその道具にさらに多くの刻板を連続的にいれなければならない。そして証明も同様だ。なんじ、小さい立方体より、その２倍の立方体を作る事や、他の性質を持つ図形に適切に変形する事を考えるならば、なんじはこれらの方法で、牛小屋、トウモロコシの穴、くぼんだ広いたらいをうまく測定する事ができる。なんじは２つの定規の間に収束する極端な限界がわかる。探さなくていい。Archytas の円柱の難しい論証や Menaechmus の３組の円錐の切断による論証を。線を曲げる事で神のような Eudoxus が記述するような曲がった形を線を作らなくていい。実際に、これらの刻板でなんじは簡単に小さな基線からたくさんの方法を見つける事ができた。。なんじの適切な技術により、O　Ptolemy、父はすべてにおいて息子と同じ生活をしたが、なんじは彼に Muses と王に贈られたようなものを与えた。そして将来、天の Zeus、彼もまたなんじの手から王権を受けとられた。この祈りは叶えられ、献上されたこの奉納物を見た誰もが“これは Cyrene の Eratosthenes の贈り物です”と言えますように。

【MEMO】

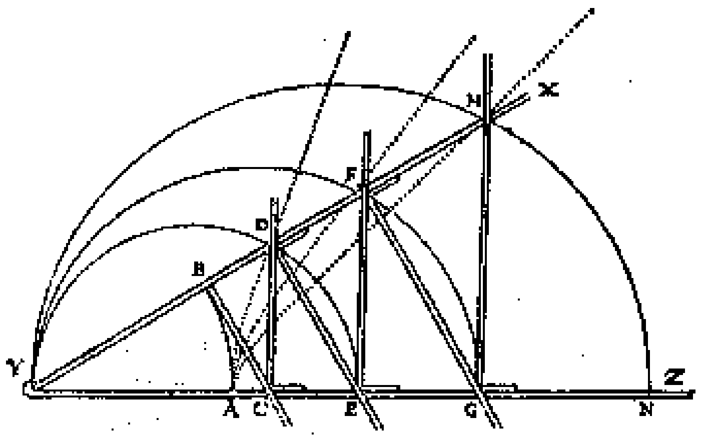
○エラトステネスが用いた道具





（参考）

○デカルトが用いた道具



（参考）

○立方体倍積問題不可能の証明

[illegible]

[illegible]

$$x^3=2$$

[illegible]

$$x^3-2=0$$

[illegible]

[illegible]

$$x=\frac{p}{q}$$

[illegible]

$$\left(\frac{p}{q}\right)^3-2=0$$

[illegible]

$$p^3=2q^3$$

[illegible]

$$p=2r$$

[illegible]

$$(2r)^3=2q^3$$

[illegible]

$$4r^3=q^3$$

[illegible]

（引用：「幾何の発想ギリシア」矢野健太郎，朝日出版社）