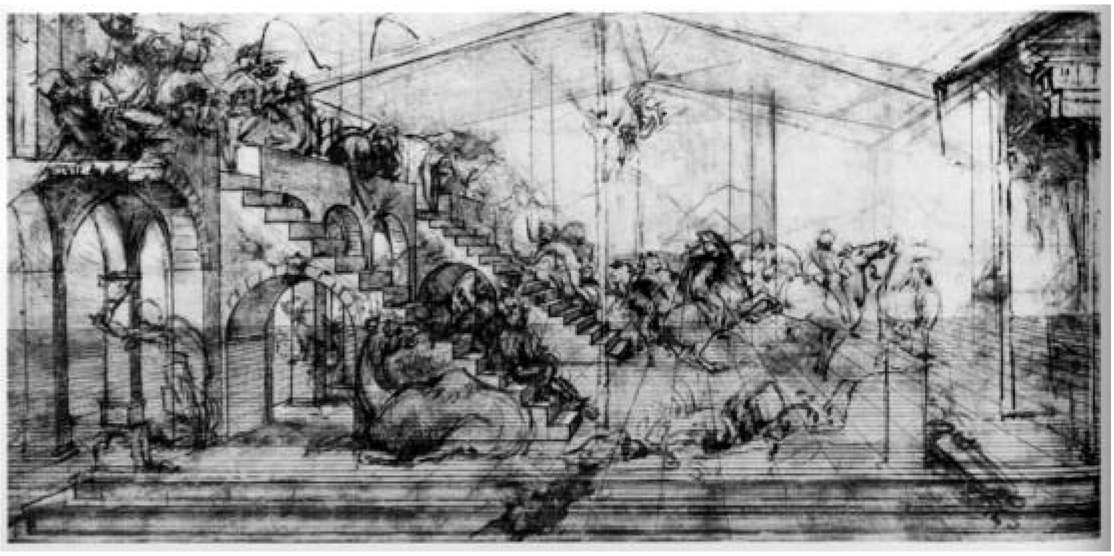
授業資料

2 年　　組　　番

透視図法と数学

1時間目

－透視図法と線束－



授業者：筑波大学大学院教育研究科 1 年
福田　匡弘

これは上が１２，１３世紀の「十字架」で、下の写真がルネサンス時期の「マリア懐胎の間」です。２つを見比べて、気づいたことを書いてください。

Memo:

立体や空間の三次元世界を平面に表すための方法であり、人間の目に見えるのと同様に描こうとする技法は「透視図法」と呼ばれています。15、6 世紀ルネサンス期、この透視図法を完成させ北ヨーロッパに伝えた人物がいました。

§1．Albrecht Durer（アルブレヒト・デューラー）

下の絵は、ドイツの画家デューラーが 1525 年に出版した「Underweysung der messung」の中に出てくる絵画です。

問：絵中の右側の男の人は何をしているのでしょうか？

Memo:

Albrecht Durer（1471－1528）

ドイツ・ルネサンスの画家。

「Underweysung der messung」は、“測定教本”または“計量法”などと訳されている。

「Underweysung der messung」についての参考ページ：

http://www.kanazawa-it.ac.jp/dawn/152501.html

§２．レオナルド・ダ・ヴィンチ

レオナルド・ダ・ヴィンチは、パリ手稿の中で、透視図について次のように言っている。

「プロスペティーヴァ（透視図）とは、平らで十分に透明なガラスの後ろ側から見て、そのガラスの表面に、ガラスの向こう側にある一切の事物を写し取ることに他ならなくて、これらの事物は、目を頂点とするピラミッドで捉えられ、そのピラミッドは、上述のガラスの位置において切断されるのである」―A 手稿１V　(下線　授業者)

波線のところで、レオナルドは何を言っているのでしょうか。

問い：ピラミッドとはどういう意味か考え、左下のスペースに図で表してみましょう。

図	Memo

Leonardo da Vinci　（1452-1519）

イタリア・ルネッサンスを代表する偉人レオナルド・ダ・ヴィンチ。本業は画家であるが、その業績は一言では表現できない「万能の天才」である。

有名な作品に「モナリザ」などがある。

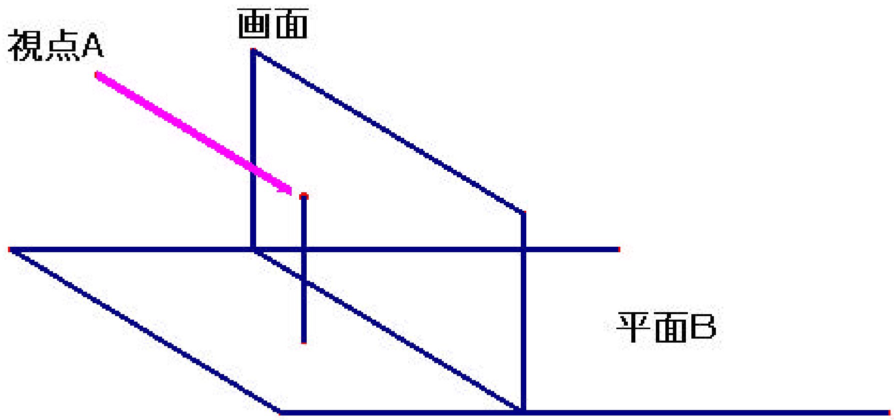
§３．平行線は、交わる？

下の写真は、春日部高校近くの線路の写真です。

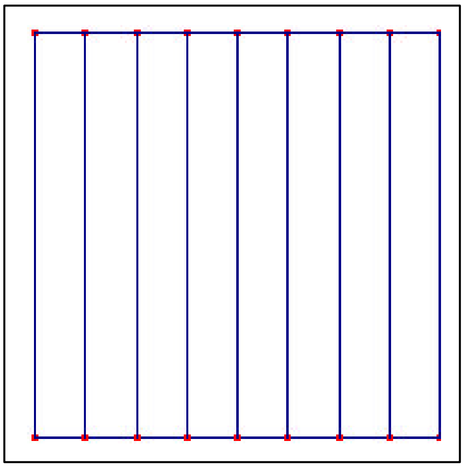
この写真からどんなことがわかりますか？

memo

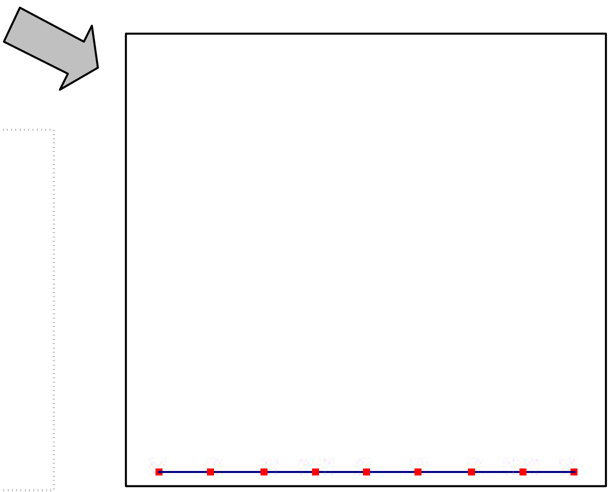
　今、下図のように視点Ａから画面を通して、平面Ｂを眺めています。このとき、次の問いに答えましょう。



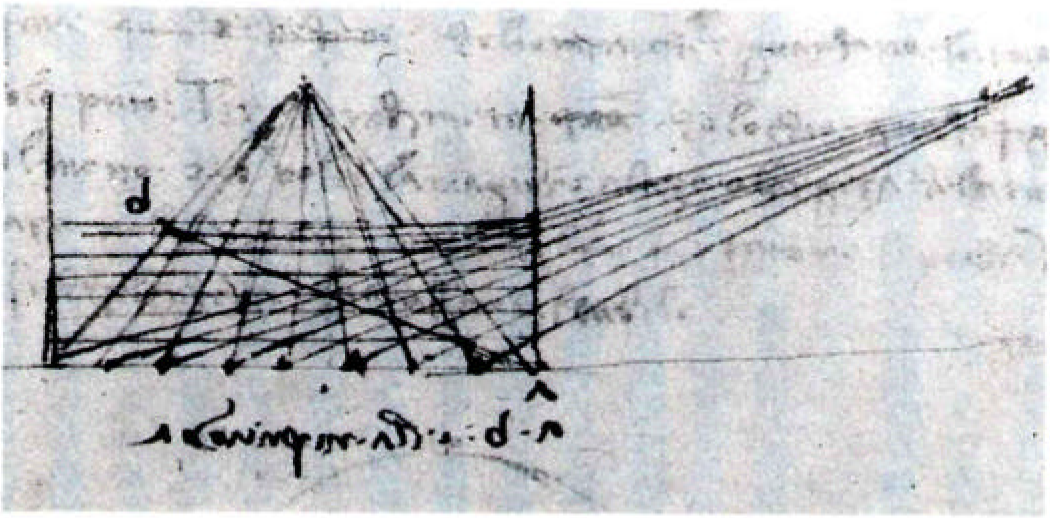
問１：左下図のように等間隔に平行線を引いた長方形の形をしたものを平面Ｂに置いたとき、視点Ａから見た透視図は、画面のところではどのように写るでしょうか。予想し、右下図に描いてみよう。



Memo



下の絵画は、レオナルド・ダ・ヴィンチが「絵画論」の中で描いている絵画です。どのような意味があるでしょうか。見ていきましょう。



上の図からわることとして、平行線が･･･。

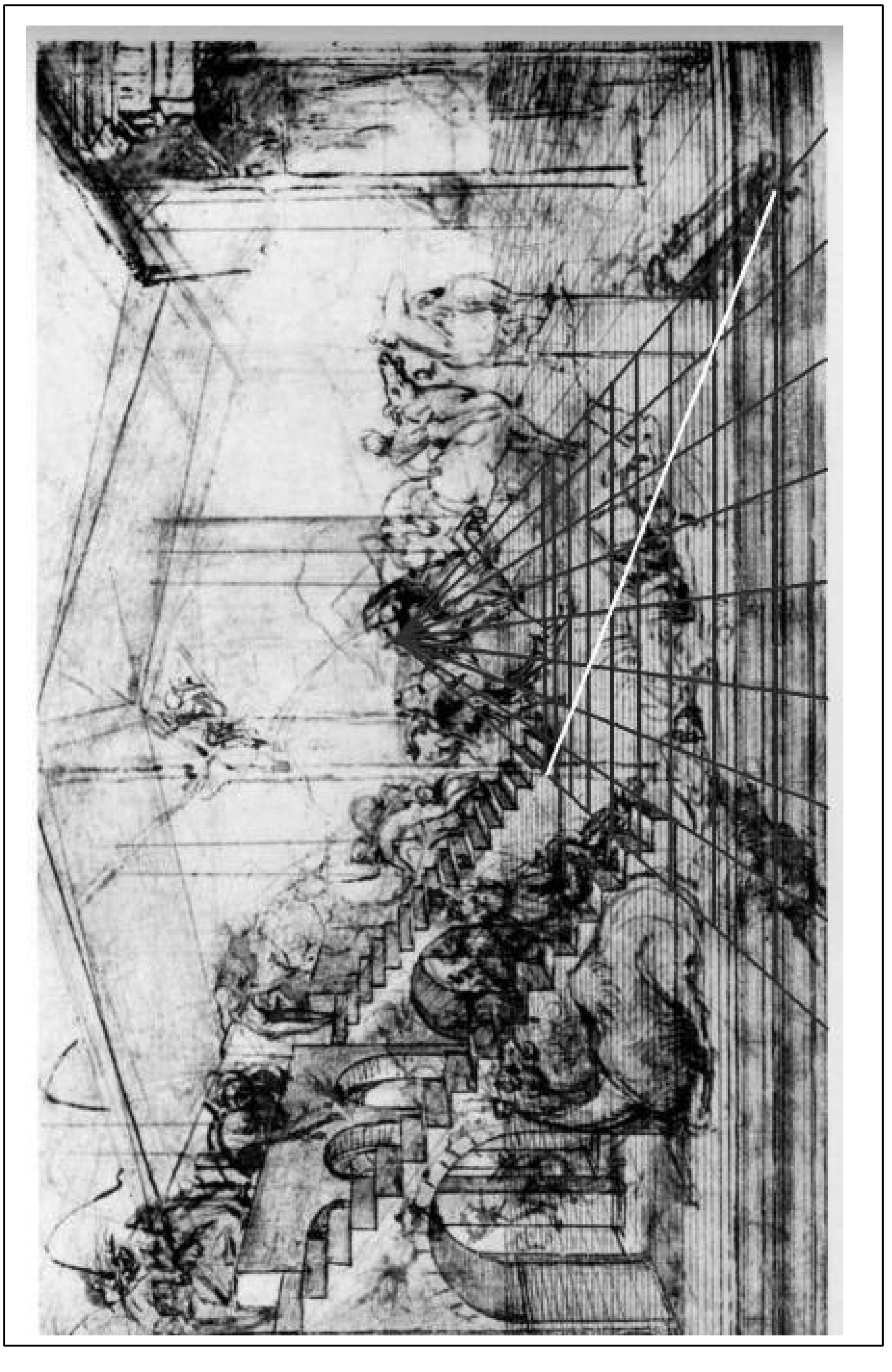
問：平行線の後に続く言葉を考えよう。

以上のことから<u>平行線は画面上では、一点で交わるか平行</u>であること

が言えた。

このように、直線が一点で交わることを線束と言うことにする。

このような方法を実際使って描いた絵画は、レオナルド・ダ・ヴィンチの次のような絵画である。　　　　　　　　　　　（マギの礼拝背景図）



資料

　下の文は､ルネサンス時代のイタリアのポムポ二ウス・ガウリクスの透視図法的処理である。レオナルドは、図によって、横線の距離を表していましたが、ガウリクスは言葉でそれを残していました。

“Ad perpendiculum mediam lineam demittito,Heinc inde semicirculos circunducito,Per eorum intersections lineam ipsam aequoream trahito, Nequis uero fiat in collocandis deinde personis error, fieri oportere demonstrant hoc modo, Esto iam in hac quadrata.,nam eiusmodi potissimum utimur,tabula hec inquiunt linea, At quantum ab hac, plani definitrix distare debebit? Aut ubi corpora collocabimus? Quiprospicit, nisi iam in pedes despexerit, prospiciet a pedibus, unica sui ad minimum dimensione. Ducatur itaque quot uolueris pedum linea hec,Mox deinde heic longius attollatur alia in humanam staturam Sic, Ex huius autem ipsius uertice ducatur ad extremum aequoreae linea Sic,itidem ad omnium harum porcionum angulos Sic, ubi igitur a media aequorea perpendicularis hec, cum ea que ab uertice ad extrmum ductafuerat. se coniunxerit, plani finitricis Lineae terminus heic esto. quod si ab equorea ad hanc finitricem. ab laterali ad lateralem, absque ipsarum angulis ad angulos. plurimas hoe modo perduxeris lineas, descriptum etiam collocandis personis locum habebis, nam et cohaerere et distareuti oportuerit his ipsis debebunt inter.uallis.”

日本語に直すと下のようになっています。

「中央（すなわち画板中央！）に垂直線を引き、つぎにここから半円を描け。半円との交点に通じる水平線を引け。さて諸々の形像配置のさい誤謬が生じないように、われわれが教えられたごとく、以下の仕方で処理せよ。
　前方を見る人は、直接自分の足を見下すのでなければ、自分の身の丈ほど前方を見るものである。それゆえこの線は君の望むだけ長く延ばさなければいけない。こうして、このかなり離れたところ（かなりの長さならず！）に、別に一本、人の高さの線が引けよう、このようにである。この線の頂点から水平線の起点にまで一本の線が引けよう、このようにである。同じく部分的長さのすべての終点にも一本の線が引けよう、このようにである。さて今度は、この中央垂直線が、頂点（すなわち人の高さの線の頂点）から水平線の起点にまで引いた線と交わるところ、ここを下地方形の境界線の場所とすべきである。そしてこの境界線へと水平線から、いま私が行っているように、一方から他方へと幾つもの線を引き、そしてこれらの線の相互の交点を結び合せるならば、そのとき君は、人物像などを
配置すべき場所を画定したことになる、というのも人物像などはまさにこうした距たりにおいて、然るべき具合に、それぞれが連なったり離れたりとなろうからである。」

現代の言葉で語れば、ガウリクスの処理は以下のごとく述べることができる。

　画面全体を中央垂直線 ab で二分し、垂直線上の点 e に水平線 cd を引く。水平線 cd を各点 ghiklmnopqrs によって等分し、r に垂直線 rt を引く。t を cghiklme のそれぞれと結ぶ。tc と ab との交点が地平面上の方形最後部境界線の楊所たる f を与えてくれる。 ab と tg、th 等々との交点が横線の場所を与えてくれる。つぎに点 u をつくるが、この点と水平線 cd との距離は rt と等高にする。だが u の横線上の位置は自由に選択できるものとする。この u を cghiklm のそれぞれと結ぶ。これらの結合線が地平面上の方形の、画面に垂直な直線を与えてくれる。画面に垂直な直線が既知の横線と交わる交点を結び合せることによって、方形内部に幾つもの対角線を引くことができる。

授業資料

2年　　組　　番

透視図法と数学

2時間目

－デザルグの定理の考え－

授業者：筑波大学大学院教育研究科1年
福田　匡弘

§4. デザルグの定理

デザルグは､透視図法の中の視覚ピラミッドと切断という方法を数学の世界のなかで考え、射影と切断から射影幾何学という数学の世界を作った人物である。これからは､射影と切断により線束というものを考えることにする。

Gerard Desargues (1593−1662)

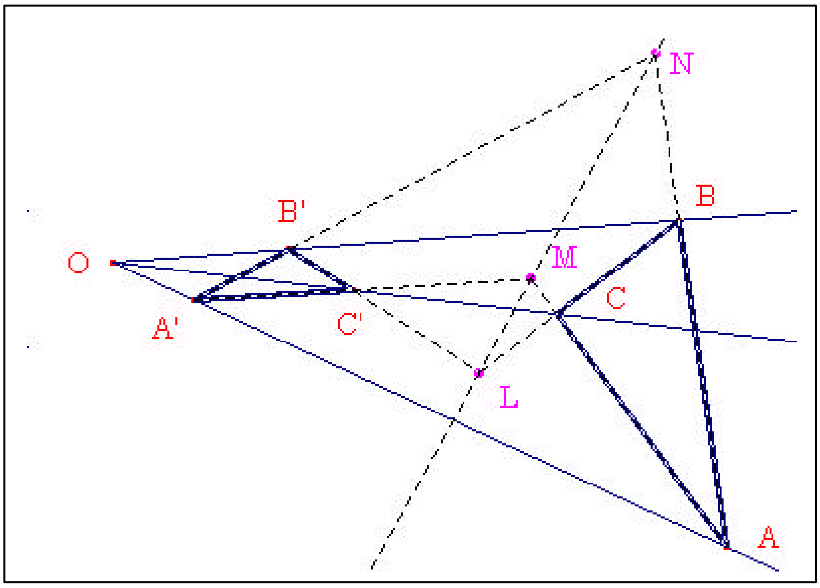
ジラール・デザルグはフランスのリヨンというまちで生れました。デザルグは、これまでの透視図法をさらに発展させて、今日の射影幾何学の糸口をつくったのです。ところが､この時代はデカルトの解析幾何学の研究が盛んでしたので、デザルグの研究は、パスカルなどの少数の数学者からは評価され、尊敬されましたが、多くの数学者からは、功績を認められず、非道な迫害を加えられたといわれます。

この肖像は、http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/history/PictDisplay/Desargues.html

ここで、線束を使ったデザルグの定理と呼ばれている定理を取り上げます。

デザルグの定理

二つの三角形ＡＢＣ、Ａ'Ｂ'Ｃ'があり、対応する頂点を結ぶ３直線ＡＡ'、ＢＢ'、ＣＣ'が一点で交わるならば、対応する辺（ＡＢ、Ａ'Ｂ）（ＢＣ、Ｂ'Ｃ'）（ＣＡ、Ｃ'Ａ'）の交点Ｎ，Ｌ，Ｍは一直線上にある。



デザルグの定理の証明

C’D//OA になるような点Dをとり、**C’D’//OB** になるような点D’をとる。
この時、△**COA** と△**CC’D** において、

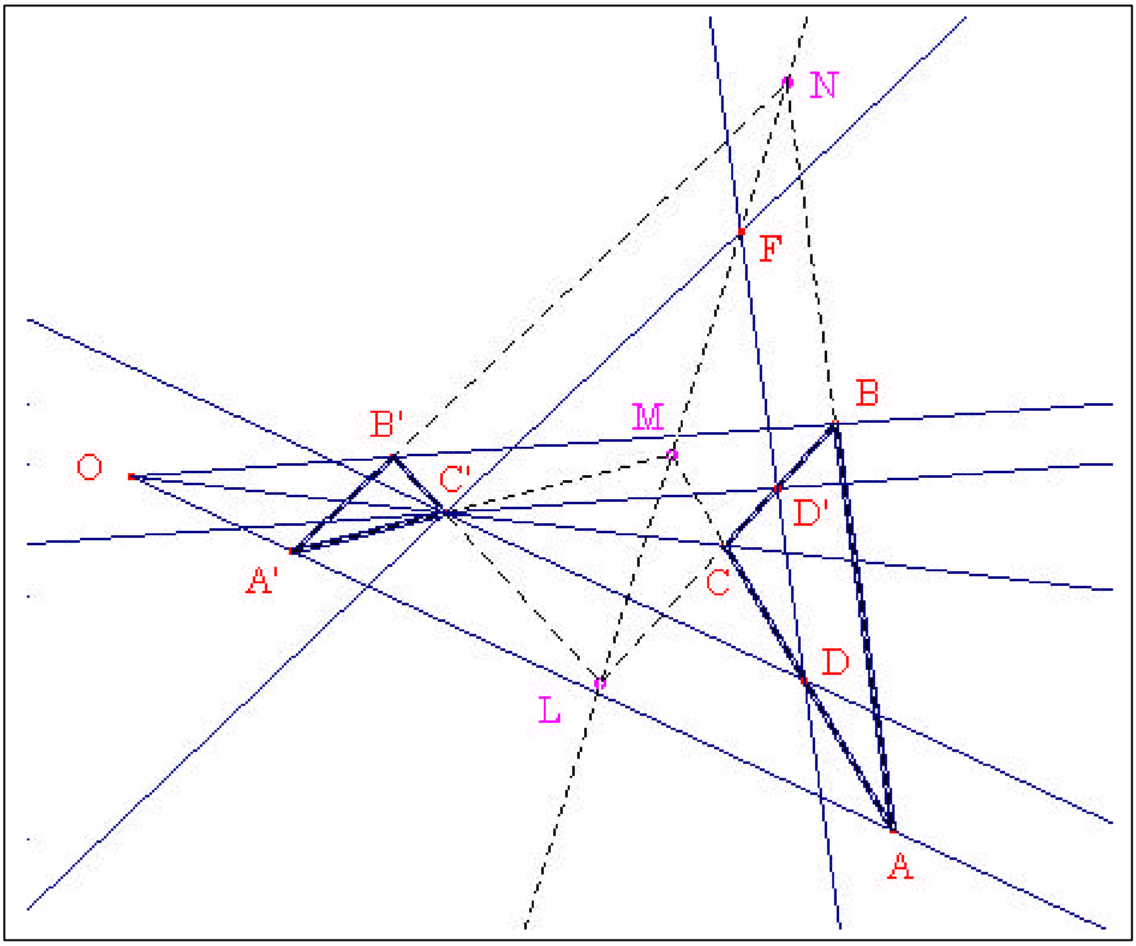
$\frac{DA}{\boxed{}} = \frac{C'O}{CC'}$ が成り立ち、

また、△**COB** と△**CC’D’**において、

$\frac{D'B}{\boxed{}} = \frac{C'O}{CC'}$ が成り立つ。　　したがって、$\frac{DA}{CD} = \frac{D'B}{CD'}$ が成り立つ

つまり、$\boxed{}$ となる。

したがって、**C’**から **A’B’**に平行線をひいて、**DD’**との交点を **F** とすれば△**FC’D’** と△**BB’N** とは相似の位置にあることとなるから、対応頂点を結ぶ３直線**NF**、**BD’**、**B’C’**は、一点Ｌに会する。すなはち、**N,L** はＦを通る
同様にして、**N,M**もＦ通ることが証明できるから結局ＮＭＬは一直線上にある。



下の図は、Bosse **がパリで** 1648 **年に書いた、***La Perspective de Mr Desargues,***の中の** first geometrical proposition**（一つ目の幾何学的命題）の初めの数行と図である。**

340 154. PLANCHE.

PROPOSITION GEOMETRIQVE.

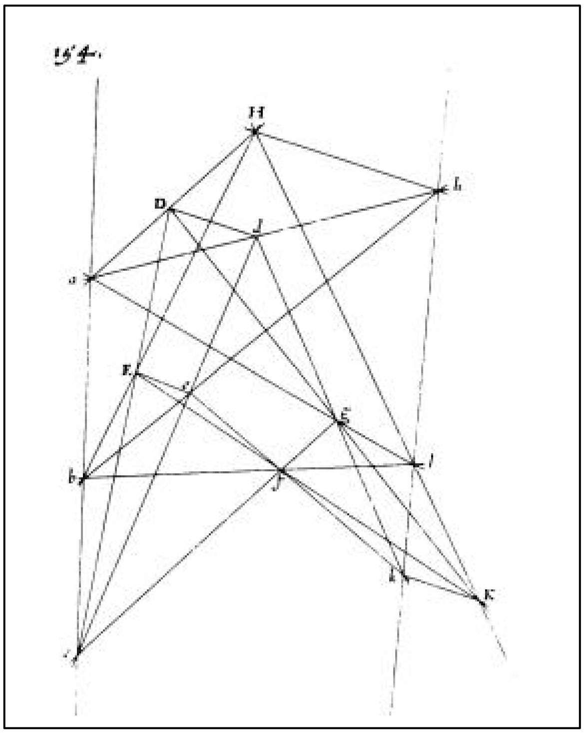
QVand des droites H D *a*, H E *b*, *c* E D, *l g a*, *l f b*, H *l* K, D *g* K, E *f* K, *soit en diuers plans soit en vn mesme, s'entrerencontrent par quelconque ordre ou biais que ce puisse estre, en de semblables points; les points c, f, g, sont en vne droite c f g. Car de quelque forme que la figure vienne, & en tous les cas; ces droites estans en diuers plans, celles a b c, l g a, l f b, sont en vn; celles* D E *c*, D *g* K, K *f* E, *en vn autre; & ces points c, f, g, sont en chacun de ces deux plans; consequemment ils sont en vne droite c f g. Et les mesmes droites estans en vn mesme plan,*

$$gD\text{-}gK \begin{Bmatrix} aD\text{-}aH \\ lH\text{-}lK \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} cD\text{-}cE \\ bE\text{-}bH \end{Bmatrix} \Bigg| \; cD\text{-}cE \begin{Bmatrix} gD\text{-}gK \\ fK\text{-}fE \end{Bmatrix}$$

$$fK\text{-}fE \begin{Bmatrix} lK\text{-}lH \\ bH\text{-}bE \end{Bmatrix} \quad bH\cdot bE$$

Consequemment c, g, f, sont en vne droite.

Et par conuerse les droites a b c, H D *a*, H E *b*, D E *c*, H K, D K *g*,



次の文章は、デザルグの著書の編集者であるパウドラが 1864 年に書いたもので、*La Perspective de Mr Desargues* Vol. Ｉ、pp. 430－433 に書かれているものの註釈である。
授業では、デザルグの三つある命題のうちの [First] Geometrical Proposition を扱う。

The following note is given by Poudra, the editor of Desargues's works, vol. I, pp. 430–433.

ANALYSIS OF THE FIRST GEOMETRICAL PROPORTION OF DESARGUES

Note: The small letters *a, b, c* of the figure denote points situated in the plane of the paper while the capitals *E, D, H, K* denote points which may be outside the paper.

The proposition contains three distinct parts:

1. If two triangles *abl, DH*(sic)*K*, in space or in the same plane, are such that the three straight lines *aD, bE, lK* which connect the corresponding vertices of the two triangles meet at a point *H*, it follows; that the sides of the two triangles meet in three points *c, f, g* which are in one straight line.

2. If the corresponding sides of two triangles meet in three collinear points *c, f, g* it follows conversely, not only that the three straight lines *aD, bE, lK* which connect the corresponding vertices are concurrent at the point *H*; but also that the three lines *ag, bf, HK* pass through the point *l* because *c* may be regarded as the apex of a pyramid passing through the vertices of the triangles *bfE, agD,* from which, etc.

Likewise, considering *f* as the apex of another pyramid passing through the vertices of the two triangles *bcE, lgK*, it can be demonstrated that the corresponding sides give the collinear points *A*(sic), *D, H.*

And again, taking *g* for the apex, the two triangles *acD, lfK* have their corresponding sides meeting in collinear points *b, E, H.*

3. If from the three vertices *D, E, K* of the triangle *DEK* and from the vertex *H*, the vertical lines *Dd, Ee, Kk, Hb* are drawn, these lines intersect the plane of the paper in the points *d, e, k, b* which are such that the line *bd* passes through the point *a* of the line *HD*, likewise *bk* passes through *l, de* through *c, be* through *b, dk* through *g*. Thus there is determined in the plane of the paper a figure which corresponds point to point, line to line and proof to proof to that in different planes and then the properties of the figures may be reasoned about from either one or the other, and by this means there may be substituted for a figure in relief one in a single plane.

An important remark which reveals the end which Desargues had in view in this proposition.

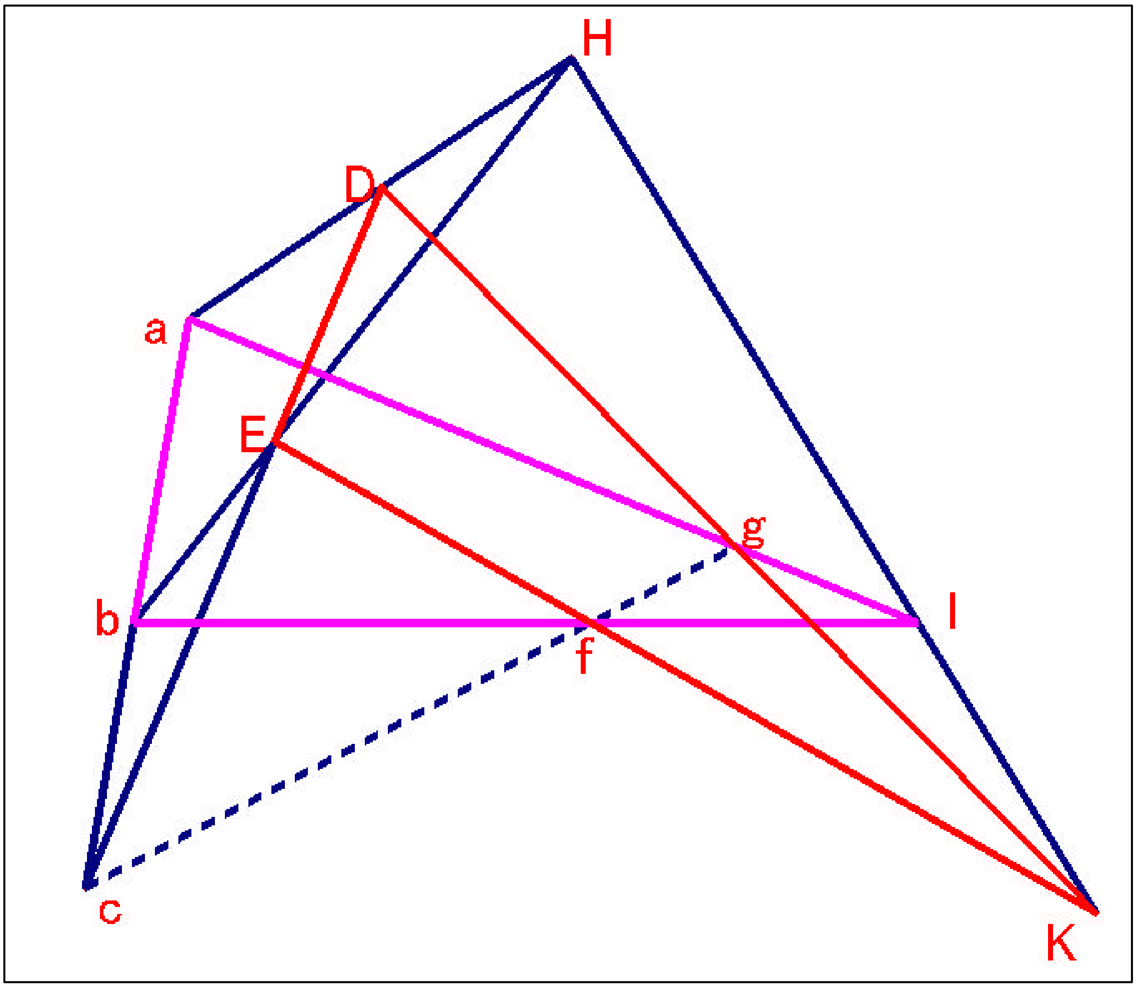
次の註釈はデザルグの著書　Vol. Ⅰ、pp. 430－433　の編集者であるパウドラによるものである。

ANALYSIS OF THE FIRST GEOMETRICAL PROPOSITION OF DESARGUES

註：図中の小文字 a、b、c は紙面の平面上にある点を示し、大文字の E、D、H、K は紙面外の点を示す。

この命題は、異なる３つの部分を含んでいる：

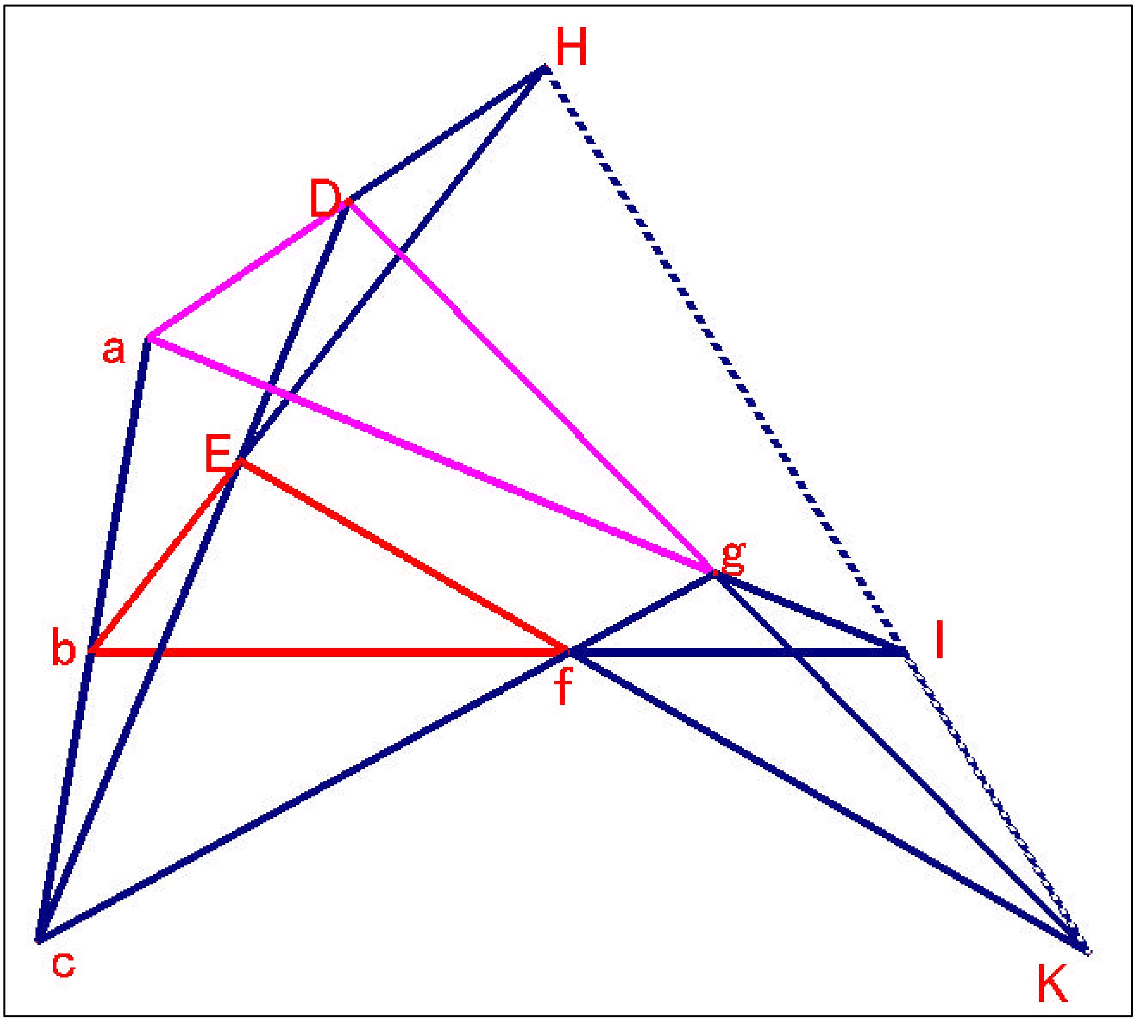
１．もし空間内または平面上の二つの三角形 abl、DEK が、その対応する頂点どうしを結んだ３つの直線 aD、bE、lK が点 H で交わるようなものであるとき、その二つの三角形の辺は一直線上の３点 c、f、g で交わる。



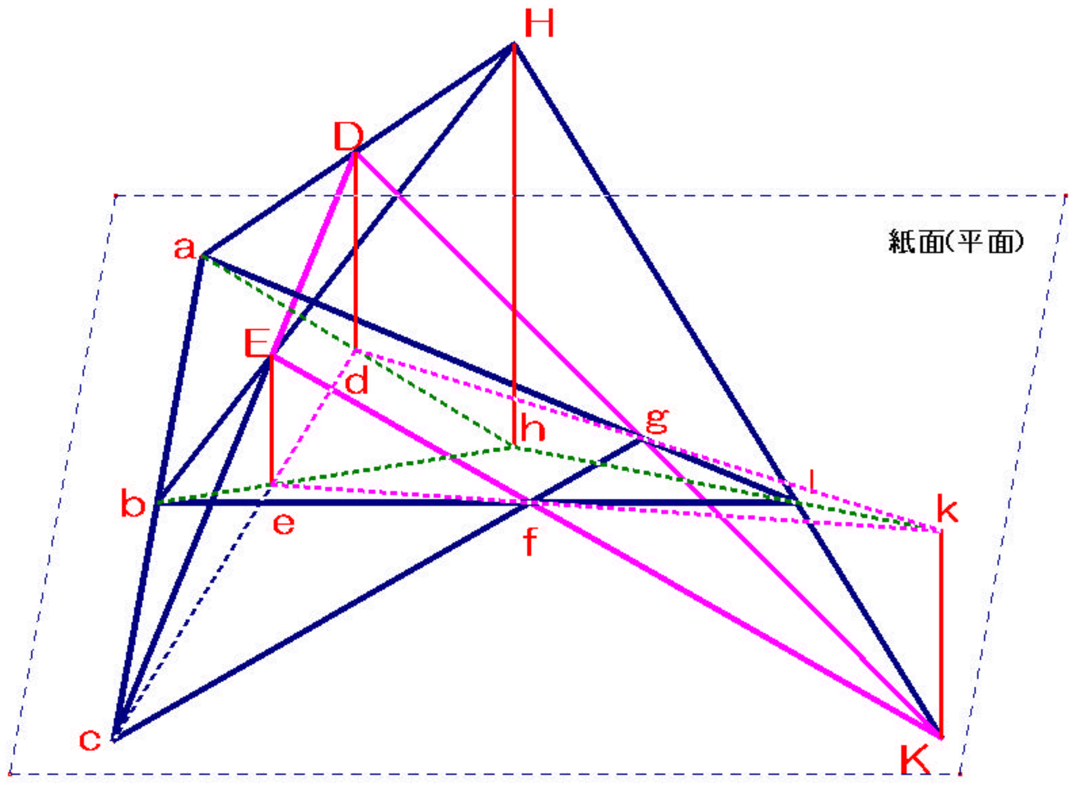
２．もし二つの三角形の対応する辺が同一直線状の３点 c、f、g で交わるならば、逆に、対応する頂点どうしを結んだ３つの直線 aD、bE、lK が点 H で交わるだけでなく、c が三角形 bfE、agD の頂点を通る角錐の頂点とみなせることから 3 つの直線 ag、bf、HK が点 l を通る。

同様に f を二つの三角形 bcE、lgK の頂点を通る角錐の頂点と考えると、対応する辺は同一直線上の点 a、D、H を与える。

さらに、g を二つの三角形 acD、lfK の対応する辺は同一直線上の３点 b、E、H で交わる。



３．もし、三角形 DEK の 3 つの頂点 D、E、K と頂点 H から垂線 Dd、Ee、Kk、Hh が引かれるなら、これらの直線は紙面の平面と d、e、k、h で交わる。そしてそれらは、直線 hd は直線 HD 上の点 a を通り、同様に hk は l を通り、de は c を通り、he は b を通り、dk は g を通るようなものである。



したがって紙面上の平面には、他の平面上の図形と点と点、直線と直線そして比と比が対応するような決定された図形があり、それゆえその図形の性質がひとつのもの、または他方のものから論じられる。このことは、ただひとつの平面上の図形によって代替されるという意味によっている。

この命題においてデザルグがもくろんでいた目的が、この重要な所見(remark)に現れている。

下の文は、*La Perspective de Mr Desargues,*の英訳「The Geometrical Work of Girard Desargues」の［First］Geometrical Proposition の最後の文である。

> point; and ratio for ratio; to the three-dimensional figure *abcEHlkgf*. And one can discuss their properties in the same way in the one figure as in the other, and so do without the solid figure,[5] by using instead the figure in the plane.

> ・・・・・。そして同じ方法で、一つの図形の特性がほかの図形の特性として議論でき、また、一つの平面の図形を使うことによって三次元の図形なしに三次元の図形を議論することができる。　　（下線部　授業者）

上の文の下線部で、デザルグは、なぜこういうことを議論出来るといえると思ったのか考えてみよう。

Memo

資料 [First] Geometrical Proposition

下の文は、*La Perspective de Mr Desargues,*の英訳「The Geometrical Work of Girard Desargues」の [First] Geometrical Proposition である。

When straight lines HDa, HEb, cED, lga, lfb, Hlk, DgK, EfK, [cab,][1] which either lie in different planes or in the same one, cut one another in any order and at any angle in such points [as those implied in the lettering]; the points c, f, g lie on a straight line cfg. For, whatever form the figure takes, in every case; if the straight lines lie in different planes, the lines abc, lga, lfb lie in a plane; the lines DEc, DgK, KfE lie in another; and the points c, f, g lie in each of these two planes; consequently they lie on a straight line cfg. And if the same straight lines all lie in the same plane,

$$\frac{gD}{gK} = \frac{aD}{aH}\frac{lH}{lK},$$

and

$$\frac{fK}{fE} = \frac{lK}{lH}\frac{bH}{bE},$$

and

$$\frac{aD}{aH} = \frac{cD}{cE}\frac{bE}{bH},$$ [2]

therefore

$$\frac{cD}{cE} = \frac{gD}{gK}\frac{fK}{fE}.$$

Consequently c, g, f lie on a straight line.

And, conversely, if the straight lines abc, HDa, HEb, DEc, HK, DKg, KEf meet one another in any manner and at any angles, in points such as those [that are given], the lines lying either in different planes or in the same one; the lines agl, bfl will always meet at a butt l which lies on the line HK.[3] For if the straight lines lie in different planes, one of these planes is $HKgDag$; another is $HKfEbf$; and another $cbagf$: and the straight lines HlK, bfl, agl are the lines of intersection of these three planes; therefore they all meet at the butt l. And if the same straight lines all lie in one plane; if we draw through the point a the line agl to meet the line HK, and then draw the line lb, it has just been proved that this line meets the line EK in a point such as f which is collinear with the points c and g, which is to say that the line [lb] passes through f, and consequently that the two lines ag, bf meet at a butt l, on the line HK. And if, again, the same lines lie in different planes, if through points on them, H, D, E, K there pass other straight lines Hh, Dd, Ee, Kk which all meet at some butt at an indeterminate distance, or, to put it another way, are parallel to one another; and these lines meet one of the planes, $cbagfl$, in points such as h, d, e, k; the points h, l, k lie on a straight line; the points h, d, a lie on one; the points h, e, b lie on one; the points k, g, d lie on one; the points k, f, e lie on one; and the points c, e, d lie on one. For by this construction the straight lines Hh, Kk, HlK all lie in a plane; the lines abc, bfl, klh lie in another; and the points h, l, k lie in each of the two planes. Consequently they lie on a straight line; and similarly for every other set of three points [in the proposition]. And all these straight lines lie in a plane, *cgabfl*, and each of them is divided by the parallel lines through the points H, D, E, K in the same way as the corresponding line in the three-dimensional figure.[4] So the figure which these parallel lines have defined in the plane *hdabcedgfkl* corresponds straight line for straight line; point for point; and ratio for ratio; to the three-dimensional figure *abcEHlkgf*. And one can discuss their properties in the same way in the one figure as in the other, and so do without the solid figure,[5] by using instead the figure in the plane.

授業資料

2年　　組　　番

透視図法と数学

3時間目

－デザルグからパスカル－

授業者：筑波大学大学院教育研究科1年
福田　匡弘

§5．パスカル

つづいて、デザルグの射影幾何学を認め、さらに発展させたパスカルについて紹介する。

Blaise Pascal　(1623～1662)

ブレーズ・パスカルは、1623 年フランスのクレモンに生まれた。ルネサンス特有の多面的才能を持ち、数理解析、射影幾何学、確率論、計算法、そして水力学の考案者である。彼は神童であって，16 歳のとき発見したといわれる円錐曲線に内接する 6 角形に関するパスカルの定理は有名である。

気圧の単位ヘクトパスカルは、パスカルにちなんで、使われている。

パスカル全集、数学論文集(円錐曲線試論)の中に次のような文がある。

「・・・これを最初に発見したのは，リヨンに生まれた当代の碩学デザルグ氏である。氏は数学，わけても円錐曲線論には最も造詣深い人のひとりであって，この部門に関する氏の著述は，数こそ少ないが，そこから学ぼうとした人々に対し，このことの豊かな証拠を与えたのである・進んで告白するが，私がこの部門に関して発見した僅かのことも氏の著述に啓発されたものであって・・・」

このことからもわかるように、パスカルは、円錐曲線試論の中でデザルグの考えを使って自分の考えが発見されたと言っていることがわかると思う。それでは、そのものとは何かを考えていきましょう。

§6．円錐曲線

パスカルが 16 歳のときに円錐曲線試論という論文を書いたといわれています。それでは、まず始めに「円錐曲線」というものがどういうものなのかパスカルの定義Ⅱに従って考えていきましょう。

Definition II

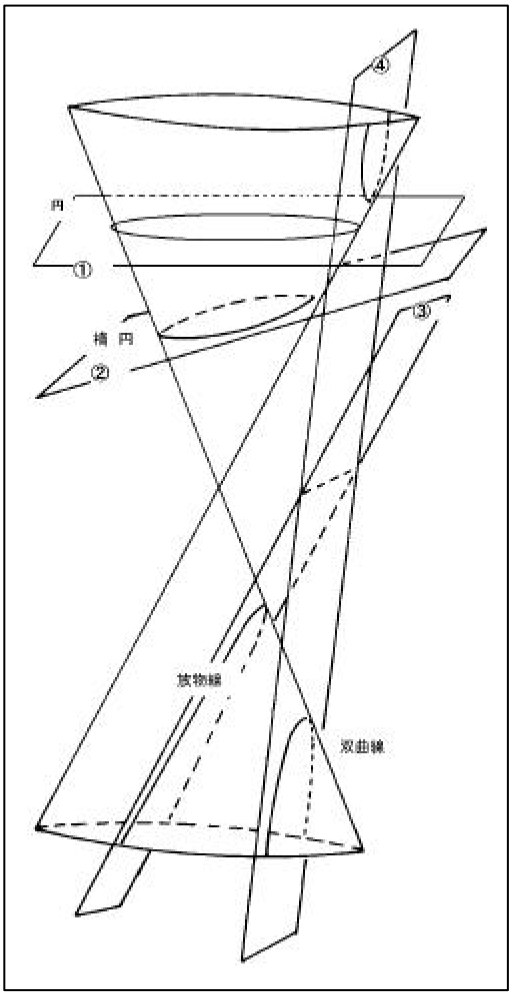
By the expression "conic section," we mean the circle, ellipse, hyperbola, parabola, and an angle; since a cone cut parallel to its base, or through its vertex, or in the three other directions which produce respectively an ellipse, a hyperbola, and a parabola, produces in the conic surface, either the circumference of a circle, or an angle, or an ellipse, a hyperbola, or a parabola.

定義　Ⅱ

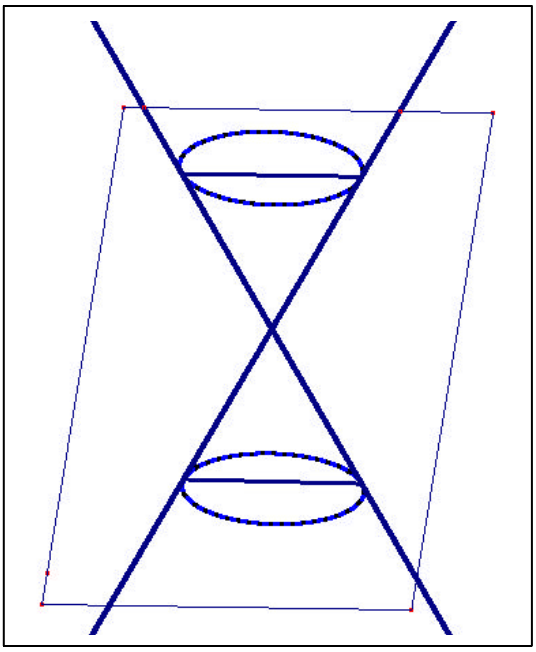
円錐曲線 section de Cone なる語によって，われわれは，円周，楕円，双曲線，放物線，角を作る 2 直線を意味する。なぜなら，円錐を底面に平行に切るか，頂点を通って切るか，そのほか，楕円，双曲線，放物線を生成する 3 種の方向に切るかによって，円錐面上に，あるいは円周，あるいは楕円、あるいは双曲線，あるいは放物線が生成されるからである。　(下線　授業者)

定義Ⅱではどんなことを言っているのでしょうか。

円錐とは次のようなものです。平面で円錐を切ってみると、次のように、円錐曲線があらわれてきます。それぞれどうやって切ったら楕円，双曲線，放物線，角を作る 2 直線が作れるか考えてみましょう。



角を作る2直線



実際に上の図のように円錐を切断するとカメラオブスキュラで円周，楕円，双曲線，放物線，角を作る 2 直線が現れてくるか実際に見てみよう。

§6．パスカルの定理

円錐曲線試論

ESSAY ON CONICS

First Definition

When several straight lines meet at the same point, or are parallel to each other, all these lines are said to be of the same order or of the same *ordonnance*, and the totality of these lines is termed an order of lines, or an *ordonnance* of lines.[1]

定義　I

いくつかの直線が 1 点で交わるか，あるいはすべてたがいに平行であるとき，これらすべての線は同じ束 ordre あるいは同じ纏まり ordonnance にあるといい，これらの線の集まりを線の束 ordre de lignes あるいは線の纏まり ordonnance de lignes という。

パスカルの定理の定義 I として次があげられています。このことは透視図法のときに確認した線束のことです。

Definition III

By the word "droite" (straight) used alone, we mean "ligne droite" (straight line).[1]

単に直 droite なる語によってわれわれは直線 ligne droite を意味する。

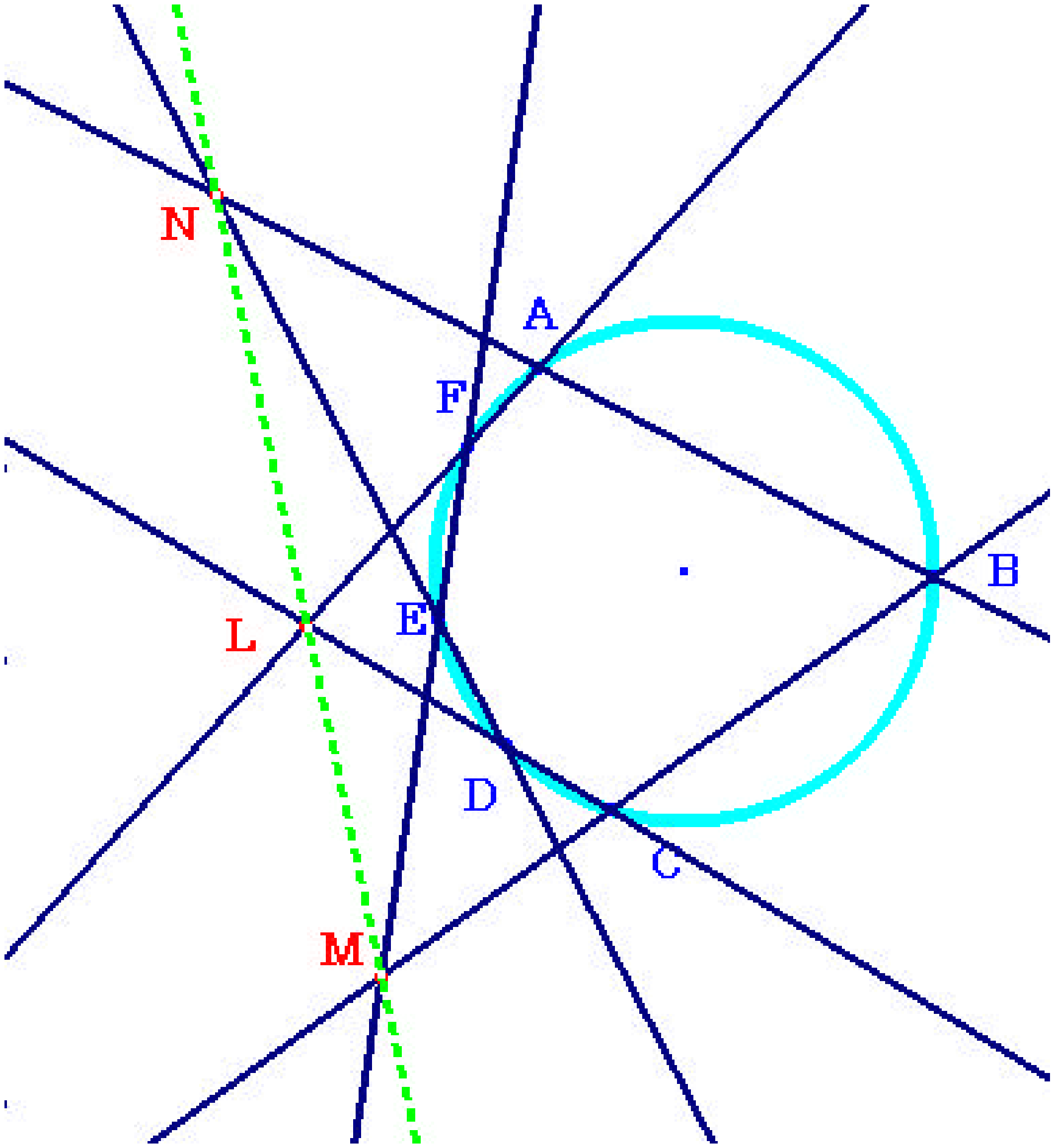
ここで、補題 I（円におけるパスカルの定理）を考える。

補題　I　（パスカルの定理）

平面 M，S，Q において、点 M から 2 直線 MK，MV を，また点 S から 2 直線 SK，SV をひき，直線 MK，SK の交点を K，直線 MV，SV の交点を V，直線 MA，SA の交点を A 直線 MV，SK の交点を μ とする。4 点 A，K，μ，V のうち点 M，S と同一直線上にない 2 点，例えば点 K，V を通る円周を描き，これが直線 MV，MK，SV，SK を切る点を O，P，Q，N とすれば，直線 MS，NO，PQ は同じ束にある。

円におけるパスカルの定理とは、つまり円に内接する六角形の対辺どうしを結んだ交点は、一直線上にあるというものである。この補題を次のように書き換えた。

円の内接六角形ABCDEFの３組の対辺ABとDE、BCとEF、CDとFAの交点N,M,Lは一直線上にある。



Lemma II

If through the same line several planes are passed, and are cut by another plane, all lines of intersection of these planes are of the same order as the line through which these planes pass.

補題　II

いくつかの平面が同一直線を通り，かつ，他の１平面によって切られるならば，これらの平面の切断線はすべて，さきの諸平面が通る直線と同じ束にある。

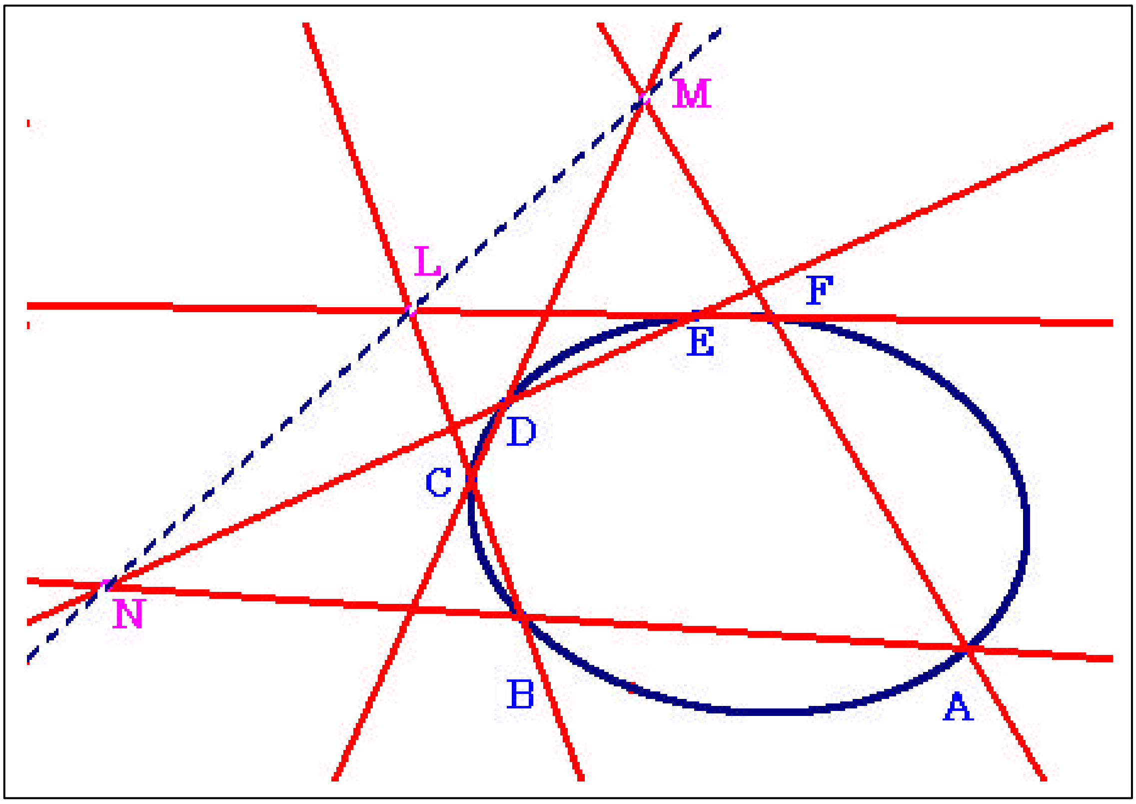
（補題　III)

On the basis of these two lemmas and several easy deductions from them, we can demonstrate that if the same things are granted as for the first lemma, that is, through points *K*, *V*, any conic section whatever passes cutting the lines *MK*, *MV*, *SK*, *SV* in points *P*, *O*, *N*, *Q*, then the lines *MS*, *NO*, *PQ* will be of the same order. This constitutes a third lemma.[1]

これら 2 つの補題と，それから容易に導かれる若干の結果とによってわれわれは次のことを証明するであろう。補題 I と同じ仮設のもとに、点 K，V を通る任意の円錐曲線が直線 MK，MV，SK，SV を点 P，O，N，Q において切るならば，直線 MS，NO，PQ は同じ束にある。これを第 3 の補題とする。

この補題は、つまり円錐曲線上にある六角形の対辺どうしを結んだ交点が一直線上にあることが成り立つといっているということを言っている。この補題を書き換えると

円錐曲線の内接六角形ABCDEFの 3 組の対辺ABとDE、BCとEF、CDとFAの交点 N,M,L は一直線上にある。



補題Ⅲ中の下線部で言っているように、どのようにしてこの考え（補題Ⅲ）が導かれたのであろうか。

定義Ⅱと補題Ⅰ、補題Ⅱを使ってどのように導かれたか考えてみよう。

Memo

予想。図などを入れてみよう。

それでは、パスカルが用いたデザルグの考えは何であったのか考えて見よう。

二日目のプリントの 10 **ページを見てみよう。**

Coffee break

このパスカルの定理からの系として有名な円錐曲線は任意の５点で一意に定まる。ということを考えて見よう。

実際｛1,2,3,4,5｝**を円錐曲線の点とし、mを**(5)**を通る任意の線とする。するとmは**(5)**とは異なる円錐曲線の唯一つの点**(6)**を含む。**

パスカルの定理の記号では、Ｐは(1,2)**と**(4,5)**の交点、Ｑは**(2,3)**とmの交点、Ｒは**(3,4)**とＰＱの交点である。こうして**(6)**は**(1,**R**)**とmの交点として定められる。**

(6)**のトレースをとってみよう。**

(6)**の軌跡をとって、**｛1,2,3,4,5｝**を動かしてみよう。**