出典：中学校・高等学校数学科教育課程開発に関する研究(11)
発行：筑波大学数学教育学研究室、pp.123-135、2004年3月

道具と数学史を用いた解釈学的営みとしての授業研究

―レンズを題材とした円錐曲線の教材開発―

筑波大学大学院修士課程教育研究科
今村　幸永

章構成

1．はじめに
2．研究目的・研究方法
3．円錐曲線の教材化
4．教材の数学的解説
5．円錐曲線の授業概要
6．議論
7．おわりに

要約

本研究は、数学史と原典解釈、その中で用いられている道具を取り入れた授業研究として、デカルトの「屈折光学」を一次文献として扱い、その解釈を通して円錐曲線に焦点を当て、道具を用いて追体験を行う授業を実践することにより、生徒の数学観の変容について考察したものである。授業結果から、数学史と原典解釈、道具を用いた追体験を行う授業が有用であることが示せた。

キーワード：デカルト、円錐曲線、道具、追体験、解釈学的営み

1．はじめに

今年度から施行された新しい高等学校学習指導要領（数学科）では、新たな科目「数学基礎」の導入が大きな変更点である。「数学基礎」の目標は、「数学と人間とのかかわりや、社会生活において数学が果たしている役割について理解させ、数学に対する興味・関心を高めるとともに数学的な見方考え方の良さを認識し数学を活用する態度を育てる」であり、これを実践するために数学史を取り入れた授業の必要性を述べている。この数学史の導入について礒田（2002）は、「数学を生み出す活動は、人によって営まれる。他者の立場に心情を重ねつつ、自らの教訓を導き出そうとする共感に支えられた主体の行為に解釈学的営みは光を当てる。例えば、数学の考えの良さを教えるためにはどうしたらよいか。まずはよさを求めて教材に対する解釈学的営みがなされる。」（礒田,2002p.8:72-78）と述べている。また、L.Grugnetti and L.Rogers（2000）は「歴史は過去の出来事に関する解釈を正当化するために論理や理由付け、証明のさまざまな形態を利用するので、これらのアイデアは数学の記述に関する正当化を探し求める過程に類似しているとみなすことができる。これらの比較に対する教師の気配りは、生徒の討論や理解を関連付け勇気付ける事に関して、非常に重要である。」（John.F(eds) ,2000, pp39-62）と述べている。そして Maria.G（2000）は、「生徒たちが道具を実際に操作し触るという経験の中には、数学的活動において認識的基礎となりうる重要なところを含んでいる」（John.F(eds),2000,pp343-349）と述べている。このことから数学史に対し生徒が解釈学的営みを行い、生徒が道具を扱うことに注目した授業を通して生徒の数学観の変容を見出す。

筆者はこの数学史と道具の利用を「数学基礎」にとどまらず、数学全体に応用できるのではないかと考え、数学 C の「いろいろな曲線」特に、円錐曲線に対して数学史の導入を試みようと考えた。先行研究において高見（2003）は、アポロニウスの円錐曲線論へ日時計と原典解釈を用い、数学が文化的営みであることを示した。福田（2003）は、パスカルの円錐曲線試論に対し、原典解釈と器具の使用により生徒の数学観の変容を示唆し、中嶋（2002）はアポロニウスの円錐曲線論へ Cabri・GeometryⅡ（以下カブリと呼ぶ）を用いた幾何的作図の教材開発を行った。先行研究の中では、数学史の原典解釈は生徒にとって有用なものであることは示唆されているが、生徒一人一人が道具を手にし、それをじっくり用いることで、生徒の数学観の変容が促されるかといったことは研究されていない。そこで筆者は円錐曲線に対して、身近に存在するもの「レンズ」を題材として取り上げ、さまざまな道具を開発し、その原典解釈を行い、円錐曲線について学習していく授業は、数学化の過程を追体験でき、数学に対する興味・関心をより引き出せ、自ら学び・考える力を育成することができると考え、実践した。

２．研究目的・研究方法

（1）研究目的

円錐曲線に関する数学史原典（原典とは翻訳文献まで含める）を解釈する授業及び、古典的な道具を生徒が用いる授業を行い追体験することで、道具の持つ役割・歴史的価値を自ら考え、その有用性を通して数学観の変容を考察する。また、円錐曲線の性質についての知識を深めることができるかを考察する。

上記の目的を達成するため、以下の課題を考察する。

課題 1：眼の構造やレンズという身の回りのものを用いて学習していくことにより、数学がさまざまなところに存在し、いろいろなものに発展できることを感じ取れるか。

課題 2：課題１を通して、数学史の原典解釈を行うことで、数学に対する新しいものの見方・考え方ができるようになるか。

課題 3：課題１、課題２を通して、道具を自分自身で取り扱うことで追体験を行い、道具が数学に必要なものであることを感じ、数学への興味・関心を引き出すことができ、その変容がうかがえるか。

（2）研究方法

円錐曲線の原典を用いた歴史的なテキストと道具を開発し、それらを用いて授業実践を行う。そして、授業前後のアンケート、各授業のビデオによる記録に基づき考察を行う。

３．円錐曲線の教材化

今回の授業研究では、題材としてデカルトの「屈折光学」を取り上げ、この中に出てくるレンズ製作機と、その原理となっている円錐の切断により生じる円錐曲線を中心とし、道具をメインとした教材化を行った。

出典：中学校・高等学校数学科教育課程開発に関する研究(11)
発行：筑波大学数学教育学研究室、pp.123-135、2004年3月

「屈折光学」はデカルトの「我思う、ゆえに我あり」という言葉で有名な「方法序説」の本編として「幾何学」「気象学」とともに出版されたものである。デカルトの生きた時代（1596－1650）はルネサンスが終焉を向かえ、科学革命の時代にあった。その中でデカルトは人間機械論を押し出し、人間の全てを機械的にあらわそうとした。視覚についても例外ではない。目にはレンズがついており、そのレンズ全般についての研究が書かれたのが「屈折光学」である。開発したテキストは 3 冊（1 時間 1 冊）からなり、各時間とも古典的道具を作成し利用した。

1 時間目では眼の構造からレンズについて探求し、そこから円錐曲線の存在を意識してもらうためのテキストを開発した。原典はデカルト（Rene Descartes,1596-1650）の『La Dioptrique（屈折光学）』を取り上げた。ここから、デカルトが行った網膜に映る像とレンズの研究の原典の図を題材にし、網膜に映る実像と、レンズと網膜の間の空間に光による双曲円錐が存在することを「カメラオブスキュラ」を作成し実際に追体験を行ってもらった。この操作によりレンズを用いることで、普段の生活の中に数学が存在していることを感じ、その当時の研究に触れることができるようにした。また、数学化を行うために、レンズによる屈折について考え数学的な証明を与えることで、光が平らな水面に入射する時の屈折率は一定であることを示した。このとき、カブリを用いて視覚的にもわかるようにした。数学で用いられる道具もまた身近に存在し、簡単に扱うことができ、その性質を考えてもらうために、原典より楕円の定義を抜き出し、古典的な道具、ヒモとピンを用いて作図を行った。

2 時間目は 1 時間目同様に、生徒の数学的な力と新しい見方・考え方が身につくように原点を用いて楕円、双曲線の長軸に平行にそれぞれの曲面に入射する光は、入射点より遠いほうの焦点を通り、これらの曲面においても屈折率が一定であることを数学的に証明した。この性質が原典で証明されている過程を通して、解釈学的営みを行うことにより、レンズには双曲線が適していることを示した。

3 時間目のテキストでは、円錐曲線の成立の過程が古代のギリシャにあることを認め、円錐の切断を示すために、1 時間目に用いたカメラオブスキュラを改良して追体験をしてもらった。確認のために実際に筆者が行った実験をビデオ撮影し、また、カブリを用いて三次元的に見ることのできるカブリファイルを作成した。

デカルトがどのようにレンズを製作したのかを疑問点として出題し、レンズ製作機の原典を解釈すること、実際にその機械に用いることにより、この道具が古代ギリシャの理論によってできていることを確認した。ここでは機械全体ではなく、双曲線を描き出す図部分だけを作成した。この道具を用いることにより、数学史を解釈学的に学習すること、道具の正確性と有用性が確認できるのではないかと考えた。最後に、機械全体のミニチュアを作り、実際にどのように削ったのかを確認した。

４．教材の数学的解説

（１）カメラオブスキュラ１

「カメラオブスキュラ」は、1250 年頃にレオン・バティスタ・アルベルティに考

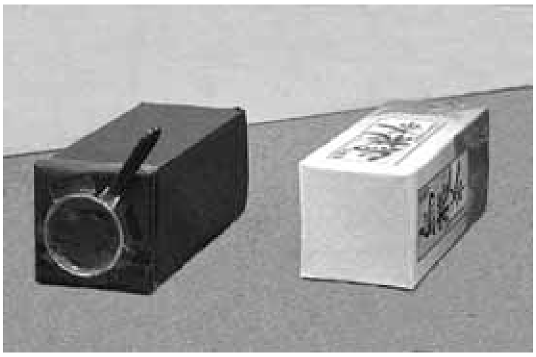


図１：カメラオブスキュラ

案され、魔術師や科学者、レオナルド・ダ・ビンチら芸術家達が描写の小道具として使用していた。カメラオブスキュラはカメラ＝部屋、オブスキュラ＝暗いという二つの言葉の組み合わせであり、開発当初は暗い大きな部屋の壁にピンホールを空けて風景を映していた。筆者はより簡単に取り扱いができるように図１のような道具を作成した。材料は、虫眼鏡、牛乳パック、黒い厚紙、トレーシングペーパーである。この道具を使うことで、網膜に映る映像を確認できる。今回の目的は、図２のように、レンズとスクリーンの間に光による二面葉の倒立円錐が存在することを確認するためである。

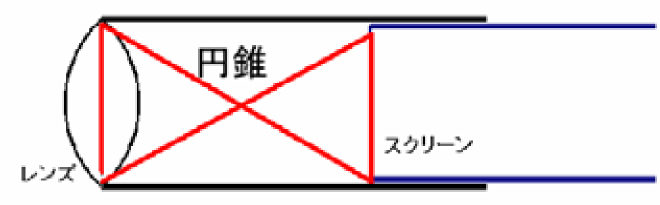


図２：カメラオブスキュラの中の円錐

（２）楕円・双曲線作図道具

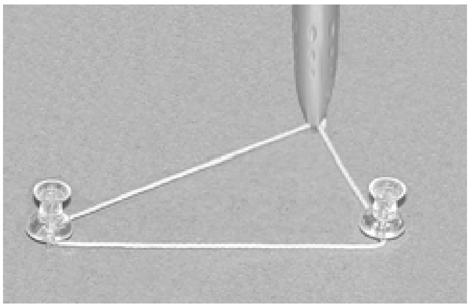


図３：楕円の作図

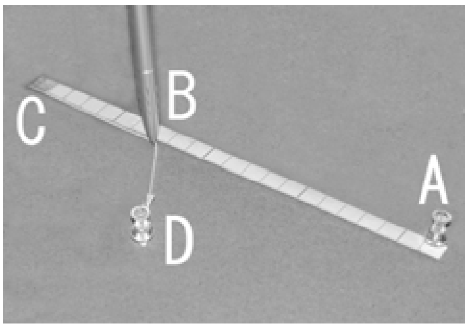


図４：双曲線の作図

この左の二つの作図道具は、屈折光学の中で触れられており、筆者が誰にでも簡単に扱えるように作製したものである。楕円の場合は、図３のようにヒモの長さを固定することにより、定義である「2 定点からの距離の和が一定の点の軌跡」が描ける。双曲線の場合は、図４のように、ヒモと、棒の長さを固定することにより、双曲線の定義である「2 定点からの距離の差が等しい点の軌跡」が描ける。図４では、２定点Ａ、Ｄからの距離の差　ＡＢ－ＤＢ＝（ＡＣ－ＢＣ）－ＤＢ

＝ＡＣ－（ＢＣ+ＤＢ）

今、ＡＣ（棒の長さ）とＢＣ+ＤＢ（ヒモの長さ）は、それぞれ一定なので差も一定になる。

よって、双曲線の定義を満たす。

（３）カメラオブスキュラ２

この道具（図 5）は、（１）で用いたカメラオブスキュラとまったく同じものであるが、スクリーンの角度に変化を持たせることで（１）で出てきた光の双曲円錐を切断する面を作成したものである。手前から、楕円、双曲線、放物線、円を表すスクリーン（図 5）となっている。円錐を切断してできる曲線は図６のとおりである。

出典：中学校・高等学校数学科教育課程開発に関する研究(11)
発行：筑波大学数学教育学研究室、pp.123-135、2004年3月

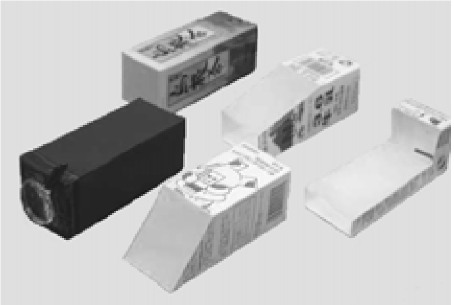


図５：円錐を切断するカメラオブスキュラ手前から、楕円、双曲線、放物線、円となっている

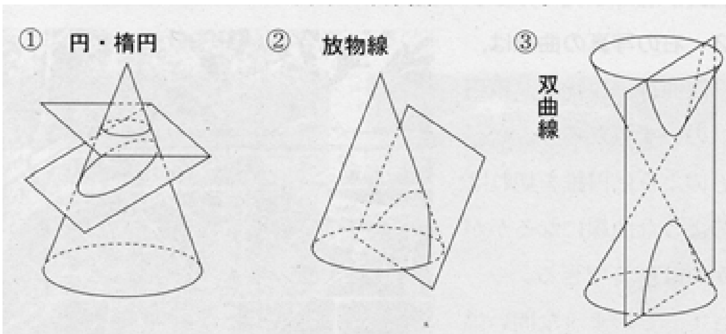


図６：円錐の切断面（教育科学数学教育 2003,5,No546,p92）

（４）双曲線作図機

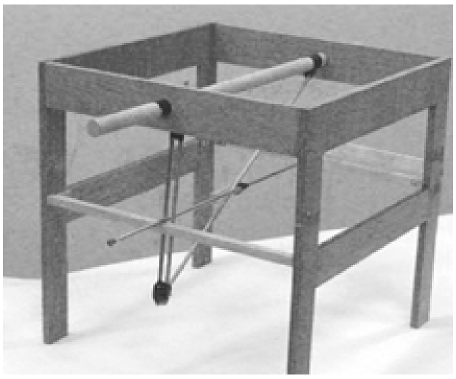


図７：双曲線を作図する機械

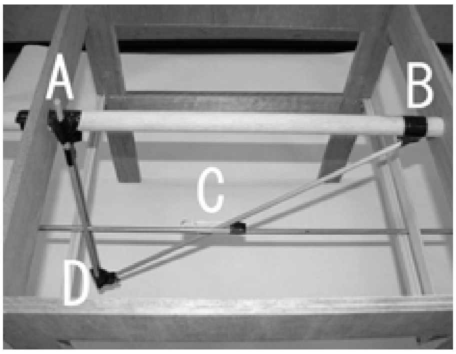


図８：機械の内部

この道具（図７）は、（３）で作ることのできる双曲線を作図するための道具である。デカルトは独自の研究から、双曲線がレンズに適している事を発見し、双曲面を作ることのできる大掛かりな機械（図 19）を製作した。筆者はその双曲線を作図する部分（図 20）を製作した。図８のＡＢを軸としてＢＤを回転させることにより、ＢＤを母線、半径ＡＤを底面とする円錐ができる。ＣはＢＤが回転するとそれに伴って動くものであり、Ｃの軌跡は双曲線となる。なぜなら、（３）より、円錐を軸にと平行に切断するとその切断面の形状は双曲線になるからである。今、Ｃから軸に平行に出ている棒が切断面を表している。その棒上で、Ｃから常に等距離にある点の軌跡もまた双曲線になる。授業ではこちらの点を扱った。

５．円錐曲線の授業概要

（１）授業環境

対象：栃木県公立高校２学年　１クラス（43 名）

日時：平成 15 年 11 月 6 日（木）、7 日（金）、13 日（木）（45 分×3）
補足として平成 15 年 11 月 11 日（火）放課後に　Cabri GeometryⅡの指導会と補習を実施

準備：コンピューター（Windows）、作図ツール「カブリ」、Microsoft Power Point
ビデオプロジェクター、事前・事後アンケート、授業資料、道具作成

（２）授業展開

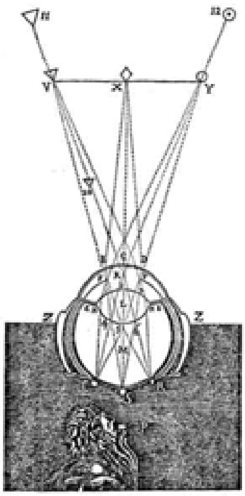


図 9：眼球とレンズの構造

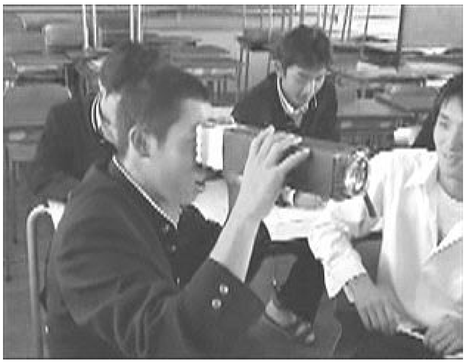
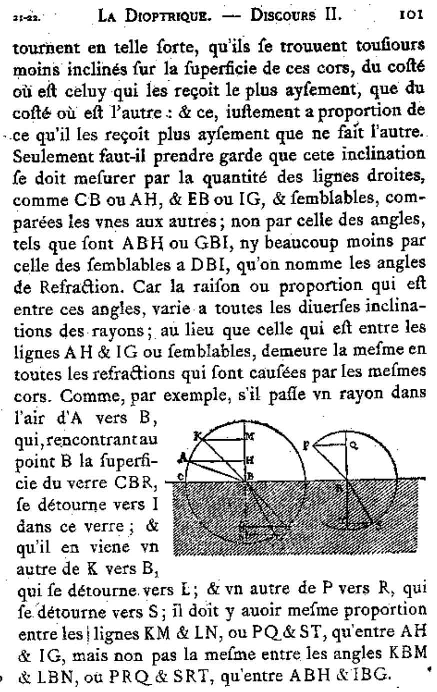


図 10：カメラオブスキュラを覗く生徒



21-22. LA DIOPTRIQUE. — DISCOURS II. 101

tournent en telle ſorte, qu'ils ſe trouuent touſiours moins inclinés ſur la ſuperficie de ces cors, du coſté où eſt celuy qui les reçoit le plus ayſement, que du coſté où eſt l'autre : & ce, iuſtement a proportion de ce qu'il les reçoit plus ayſement que ne fait l'autre. Seulement faut-il prendre garde que cete inclination ſe doit meſurer par la quantité des lignes droites, comme CB ou AH, & EB ou IG, & ſemblables, comparées les vnes aux autres ; non par celle des angles, tels que ſont ABH ou GBI, ny beaucoup moins par celle des ſemblables a DBI, qu'on nomme les angles de Refraction. Car la raiſon ou proportion qui eſt entre ces angles, varie a toutes les diuerſes inclinations des rayons ; au lieu que celle qui eſt entre les lignes AH & IG ou ſemblables, demeure la meſme en toutes les refractions qui ſont cauſées par les meſmes cors. Comme, par exemple, s'il paſſe vn rayon dans l'air d'A vers B, qui, rencontrant au point B la ſuperficie du verre CBR, ſe détourne vers I dans ce verre ; & qu'il en viene vn autre de K vers B, qui ſe détourne vers L ; & vn autre de P vers R, qui ſe détourne vers S ; il doit y auoir meſme proportion entre les lignes KM & LN, ou PQ & ST, qu'entre AH & IG, mais non pas la meſme entre les angles KBM & LBN, ou PRQ & SRT, qu'entre ABH & IBG.

図 11：屈折に関する原典（DISCOURS DE LA METHEODE&ESSAIS, p 101）

〈1 時間目〉円錐曲線の導入

ねらい：「レンズを持った眼という身近にあるものを扱うことにより、数学はいたるところに存在していること、レンズにはいろいろな曲線が存在していることを知り、そして、その曲線の定義を学習する。」

導入では、デカルトがどのようにレンズについて研究したのか、なぜそのような研究を行ったのかを知ることから始めた。まず始めに、図 9 の 17 世紀に描かれた眼球の構造とレンズの作用の図を提示し、一体何をしている所なのかを想像してもらった。この図が眼球の構造の研究をしているところだということに気付いた生徒は数人であった。

この研究を実際に追体験してもらうために「カメラオブスキュラ」（図 1）を使用し、スクリーン（網膜）にどの様な映像が映し出されるのか、レンズとスクリーンの間にどの様な立体が生ずるかを描いてもらう問題を出題した。このスクリーンに映し出されたものが上下左右逆の逆像であることは実験から全員の生徒が回答することができたが、レンズとスクリーンの間に二面葉の倒立円錐ができていることに気づいたのは数人であった。二面葉の倒立円錐がイメージしにくいと考えカブリで提示した。しかし、この実験を通して、生徒が今後課題となる円錐曲線に通じるレンズがどの様な働きをするのか、また、レンズの不思議に興味を持ってもらうことができた。そして、眼の中には円錐が存在しているということを共有した。そして次にレンズの性質を探るために、水面に入射する光の屈折について学習した。デカルトがどの様に考えていたのかを知るために、原典（フランス語）（図 11）とその和訳を示した。このようにすることで、当時の人が書いた文書を体験でき、さらに英訳、和訳となり今の私たちに伝えられてきていることを感じてもらえるようにした。したがって日本語訳は原典に忠実に和訳されたものを授業資料に掲載した。

出典：中学校・高等学校数学科教育課程開発に関する研究(11)
発行：筑波大学数学教育学研究室、pp.123-135、2004年3月

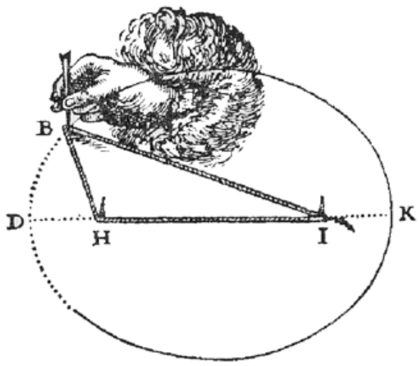


図 12：原典（DISCOURS DE LA METHEODE&ESSAIS, p166））

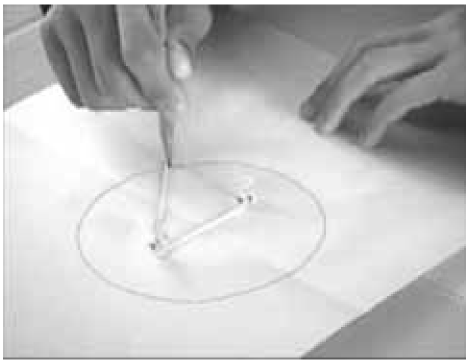


図 13：楕円を描く生徒

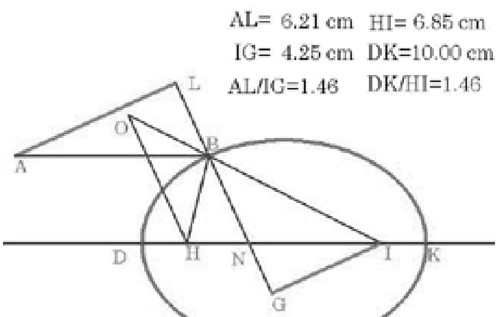


図 14：カブリで作図した楕円の性質

証明

AB // NI、AL // GI より
△ALB ∽ △IGN （2 角が等しい）
∴ AL : IG=□ : IN
また、AB＝BI（仮定）より
AL : IG=□ : IN となる。・・・①

HO // NB より
△BNI∽△OHI （2 角が等しい）
∴ BI : IN＝OI : IH となる。・・・②

∠HBN＝∠NBI（仮定）と∠NBI＝∠HOB（6）より
∠HOB＝∠□となる。
なぜなら、外角の関係より
∠HBI＝∠HOB＋∠BHO
2∠HOB＝∠HOB＋∠BHO
だから、∠HOB＝□∠
よって、△BOH は二等辺三角形となる
∴OB＝BH・・・③
今、IB＋BH＝DK であった。（楕円の定義）
よって、③より DK＝□となる

①に戻ってみると
AL : IG＝BI : IN＝OI : IH＝DK : IH
①　②　③

Q.E.D

図 15：楕円の性質の証明

ここでは、屈折を起こす際には入射角と屈折角の間にはどのような関係も無いが、その Sin の値の間には比例関係があることを原典より解釈し、それが屈折率となっていることを確認した。しかし、言葉や 1 つの図でわかりにくいと考え、カブリを用いて実際に入射角を変化させても屈折角との Sin の比の値は一定であることを示した。

このことにより生徒への定着度がかなり高まった。そして、平面では屈折率一定であるが、平面以外で考えたときはどうなるだろうという発問を行い、そこからレンズの曲線の種類を類推してもらった。

解答として多かったのが「楕円」「双曲線」「放物線」であった。しかし、数学Ｃのいろいろな曲線は未習であったため楕円の定義をデカルトの原典より抜粋し掲載した。（図 12）そしてこの楕円が簡単な道具で書けてしまうということを昔の道具（図 3）を用いて、作図してもらった。（図 13）その際に、昔の人がどの様に作図していたのかを考えながら行ってもらった。特にピンとピンの間を離すことにより色々な楕円が書けること、また、円になってしまうことに注意をおいた。

＜２時間目＞円錐曲線の性質の学習

ねらい：「円錐曲線の定義とその性質を原典解釈を通して自ら学び・自ら考えだせるようにする。」

デカルトが屈折光学の中で証明した、楕円の長軸に平行に入射する光は、入射点より遠いほうの焦点を通るという性質について学習した。

これは 1 日目同様に、フランス語の原典を掲載し、その日本語訳（要約）を掲載した。生徒には原典解釈を行ってもらい、その結果を穴埋め形式の証明問題で確認した（図 15)。解釈を行う際にいかに平面と同じように考えることができるかに注意をおいた。今回も 1 日目同様に言葉だけではわかりにくいと考え、カブリで長軸に平行な直線を動かし、実際に遠いほうの焦点を通ることを示した（図 14)。やはり視覚的に捕らえた方が生

徒への定着度や興味・関心は増すようである。

楕円同様に双曲線、放物線の定義を原典に従って行い、その性質の証明を宿題として出した。そして楕円のとき同様に、作図方法を自分で考えながら双曲線を作図してもらった。（図 16）残念ではあるが、焦点からの距離の差が等しいということが図形的にどういったことなのかということがあまりわかっていなかった。

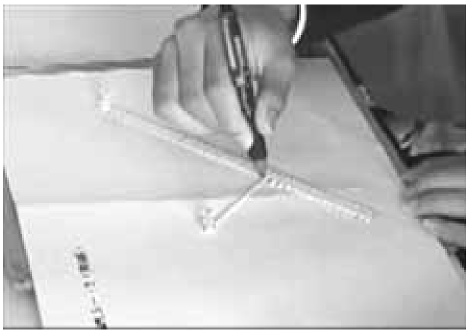


図 16：双曲線を描く生徒

〈3 時間目〉円錐から円錐曲線、そしてデカルトのレンズ作製機へ

ねらい：「円錐曲線が円錐を切断することで生じることを、実際に道具を自分で使うことで解釈し、その有用性を知る。そしてデカルトのレンズ作製機もその原理に従っていることを知る。」

これまで学習してきた楕円、双曲線、放物線がギリシャ時代から研究されてきて、円錐を切断することにより生じるものであることを説明し、これらの曲線が円錐曲線と呼ばれることを話した。そして、それを図 5 のカメラオブスキュラを用いて追体験を行ってもらった。直接太陽を見ることは危険を伴うため、白熱電球を高いところからつるして、光源とした。写真のどの道具を使えばどの曲線が現れるのかを考えながら行ってもらった。ここでは実際に筆者が行った追体験をビデオ撮影し（図 17）、それを生徒に見せるのと、カブリで作成したファイル（図 18）を提示することでよりいっそうの定着度の増加をはかった。

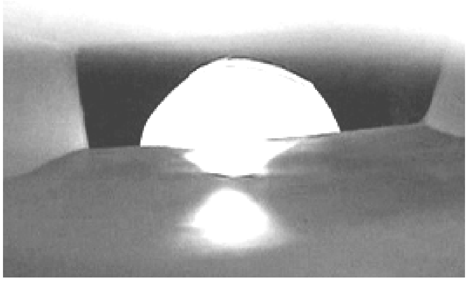


図 17：ビデオの映像（双曲線）光源は白熱電球

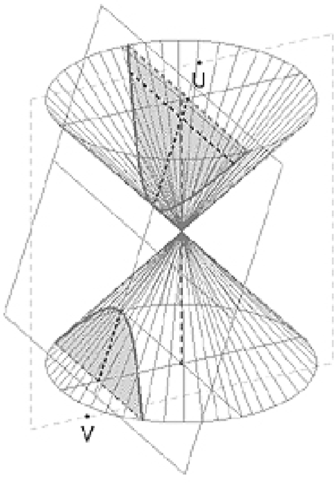


図 18：カブリで作成した円錐の切断を示すファイル

今まで自分が作図してきた楕円や双曲線を思い出してもらい、正確にかけたかどうか、また、デカルトはどのようにレンズを削ったのか、自分ならどのように削るかを考えてもらった。ギリシャ時代、デカルトの時代も、ヒモや定木では正確に円錐曲線は描けなかったということを感じ取ってもらった上で、実際にデカルトが用いたレンズ作製機の図（図 19、20）を提示した。この機械がどの様な動作をして双曲線を描き出すのかを、穴埋めを行いつつ、原典解釈をすることで読み進

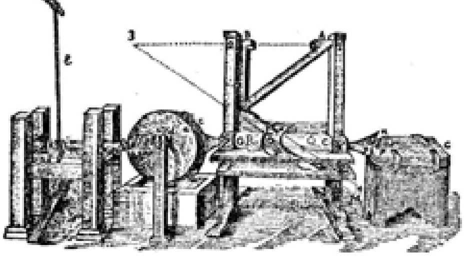


図 19：デカルトが作成したレンズ作製機（DISCOURD DE LA METHODE &ESSAIS　p218）

出典：中学校・高等学校数学科教育課程開発に関する研究(11)
発行：筑波大学数学教育学研究室、pp.123-135、2004年3月

めていった。

実際に自分で製作した機械（図 7）を提示することで興味・関心を引き、その有用性を実感してもらった。さらに、カブリでのファイル（図 21）も提示した。このファイルでは点Ｐが双曲線を描く。

最後に、レンズ製作機のミニチュアを提示し、実際にどんな動きをしてレンズが作成されるのかを見てもらい授業を終了した。（図 22）。

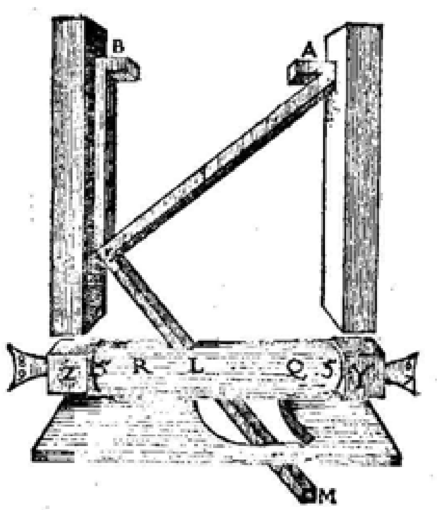


図 20：筆者が作った機械の部分の原典（DISCOURD DE LA METHODE&ESSAIS ｐ219）

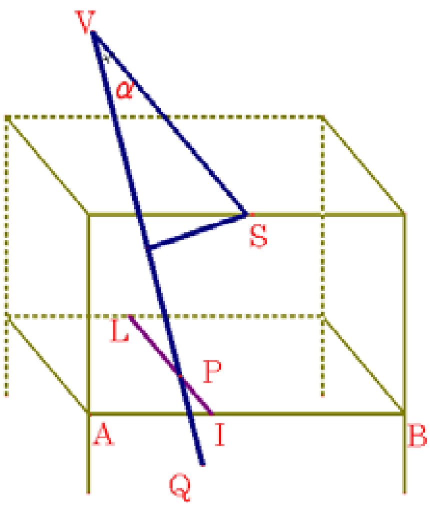


図 21：双曲線のカブリファイル

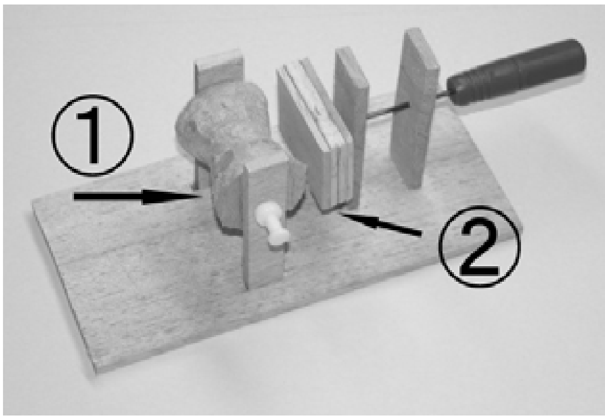


図 22：レンズを削るメインの模型

解説：中央のひょうたん型のものが図 7 を用いて双曲線状に削られたもの（①とする）であり、その右の四角いものがレンズの原型(②)となるガラス等である。①と②をそれぞれの回転軸にあわせ回転させ②を①へ押し付けると①が双曲面状に削られ。レンズができる。

６．議論

事前・事後アンケートより課題 1～3 についての考察を行っていく。

課題 1：眼の構造やレンズといった身の回りのものを用いて学習していくことにより、数学がさまざまなところに存在し、発展できることを感じ取れるか。

事前アンケートにおいて「数学は日常の生活に役に立ちます」という質問に対して、肯定的な回答「非常に役に立つ」「少し役に立つ」と回答した生徒は、21 名（全体 39 名）53.8%であった。事後アンケートにおいての同じ質問に対して、肯定的な回答は 26 名、66.7%となり、数学が以前よりも身近に感じられるようになったといえる。また、「数学は生活をする上で必要とされて出てきたものです。」という質問に対し、事前アンケート

において肯定派は 21 名 53.8%であったが、授業後には 27 名 69.2%に上昇していることがわかった。このことと、授業中の「なんだ、こんな簡単なものも数学なんだ」といった生徒の発言より、数学がいつも自分たちの身近に存在し、生活していく上で必要であり、発展してきたということが言える。

アンケートの感想の中に以下のようなものがあったので抜粋した。

- 以前より数学は生活に役に立つと思った。
- 思ったより自分の生活にも使われていると感じた。
- 数学的思考が生活を楽にしてくれると思いました。
- ヒモひとつであんな色々なことができるとは思わなかった。
- 円錐によって 4 つの円錐曲線が出来てしまうなんて驚いたし、それが数学の勉強でやったことがあったことだったので、身近に存在していることに、とても親近感を覚えた。

そして、「日常生活の中で数学を見つけようと思います」という質問に対して、事前アンケートにおいて肯定派は 4 名、10.3%だったのに対し、授業後は 24 名、61.5%まで上昇している。

このアンケート結果から、身の回りにある道具、今回はレンズなどであったが、を用いて導入を行い、それを発展させていくことで、生徒は心を動かし、数学を身近に感じる様になり、古典的な道具や考え方が現代の技術の中に用いられていることを自分自身で気付くことにより、数学が発展してきたことが確認できた。

課題 2：課題 1 を通して、数学史の原典解釈を行うことで、数学に対する新しいものの見方・考え方ができるようになるか。

事前アンケートにおいて「数学の歴史を考えること、学ぶことは重要です」という質問に対し、肯定派は 14 名、35.9%であり、「どちらでもない」と回答した生徒が 16 名、41%という結果であった。授業後のアンケートでこの「どちらでもない」と回答した生徒の変容を伺うため、選択肢を 4 つ、「とても重要」「少し重要」「あまり重要ではない」「まったく重要ではない」として調査を行った結果、16 名全ての生徒が「重要である」という肯定派に移行した。また、授業前では「まったく重要ではない」と回答した 2 名の生徒にも変容をうかがうことができた。

そして、「昔の人の考えを知る（解釈する）授業は大切であるか」という質問に対し、上記と同様の調査を試みたところ、「どちらでもない」と回答した 14 名の生徒のうち 12 名が肯定派に、2 名は否定派に回ったという結果が示された。

以下のような感想があげられる

- 数学は昔の人の苦労があって成り立っていて、僕たちが学んでいる公式も求めだした人が必ずいるのだと思った。
- 昔の人は眼がどの様になっているのか、レンズをどの様に使っているかを、面白くそして楽しく授業できてよかった
- 昔の人の考えを学ぶことは良い経験になった。

以上の結果から、数学史の原典を解釈する授業を行うことにより、生徒がその当時の人の心情や状況を知ることができ、そこから、今何気なく使っている公式などに対して、

出典：中学校・高等学校数学科教育課程開発に関する研究(11)
発行：筑波大学数学教育学研究室、pp.123-135、2004年3月

大きく言えば、数学に対して新しい見方・考え方ができたといえる。

課題３：課題１、課題２を通して、道具を自分自身で取り扱い追体験を行い、道具が数学に必要なものであることを感じ、数学への興味・関心を引き出すことができ、その変容がうかがえるか。

事前アンケートにおいて、「数学の中で道具を使うことは重要です」という質問に「とても重要」「少し重要」と解答した生徒は 39 名中 28 名（71.8%）であり、「どちらでもない」と解答した生徒が 11 名（28.2%）であった。この「どちらでもない」生徒がどのように変容するかを確認するアンケートを行った結果、7 名が「少し重要」、4 名が「あまり重要ではない」に移行し、約 3 分の２の生徒が重要の方向に移行したことがわかる。

また、以下のような感想があげられた。

- 結構人間は色々なところで数学の道具を使っていると思いました。道具、感無量です。
- 身近のものでもすごいことができ、道具は数学全体に必要。
- レンズに対してこんなにも「数学」が使われていたことがわかって驚いた。今回私たちは色々な道具を使い、手と眼を使ったのでとてもよく理解できたと思う。
- 昔の人は色々考えて色々な道具を使っていたのだと感心しました。
- 昔の道具に基づいて今の道具があるのだと思った。
- 数ばかりの世界ではないと思うようになった。
- 数学の新しい面が発見できた
- 以前よりも数学について知りたくなった
- 昔の人は工夫しながら数学を学んだんだと思いました
- 今まで私たちは「受験のための数学」をやってきたが、今回の授業は私たちが知らなかった「世界」を知ることが出来てとても刺激になったと思う。
- 数学もなかなか捨てたもんじゃないと思いました。パソコンや道具を使った授業は良かったです。
- ひとつのことを詳しく探っていきとても充実感を持てた
- 紙パックやヒモを用いた道具も良かったが、昔の道具を再現したものの実物を見れて良かった。
- 実際に体を使って楽しめ理解を深められた。

また、道具を用いた作図に関しても調査を行った結果、「作図は重要である」という質問に対し、事前では肯定派が 31 名（79.5%）に対し、事後では 35 名（89.7%）に増加しているという結果が導かれた。以下のような感想もあった。

- 身近なもので簡単に円錐曲線が書けるとわかったので、作図が身近に感じた。
- 作図の面白さを感じた。

今回の研究課題ではないが、先行研究によって明らかにされてきた「カブリ」を用いた授業をすることの重要性と有用性（中島 2002）は、本授業研究の補足として行ったカブリ講習会と生徒の感想からよりいっそう重要であることが確認できた。

以上の結果や、道具を使ったときの生徒の表情、「おおー、すげー」といった発言から、道具を生徒が実際に使用することで数学に対する道具の新しい解釈を身につけたという

ことができ、数学への興味・関心を引き出せたと言える。そして、道具が数学に有用であると考えられる。

課題１～３を通して、数学史原典を解釈し、道具を生徒が用いる授業を行うことで、道具の持つ役割・歴史的価値を解釈し、数学観の変容が見られたといえる。また、円錐曲線の生徒への定着度も普通の教科書の定義と公式だけを用いる授業よりも増したと考えうる。

題材として数学史と 原典を用い、その当時の時代背景や思想・心情を含めたものを解釈していくこと、またその中で使用されている道具を用いてその解釈を深めていくことは、今回の授業においてとても有用なものであった。また、数学史と道具は「数学基礎」の中だけでなく、数学Ｃ「いろいろな曲線」の授業の中において、生徒の考えを発展させていく有用なものになりうる。

７．おわりに

本研究では、数学史原典を用いそれを解釈する授業及び、古典的な道具を用いて追体験する授業を行うことで、道具の持つ役割・歴史的価値を自ら考え、その有用性を通して数学観の変容を考察することを目的として行った。アンケートや議論などからわかるように、生徒自身が今まで経験してきた数学とは違った、古いけれども新しい数学を発見でき、数学に対する更なる興味・関心を持てたということがわかった。

事後アンケートの内容から見ると、「原典が難しく、あまりよくわからなかった。」と述べている生徒がおり、数学史原典を用いる授業の難しさ、一次文献を授業者本人がしっかり解釈し理解した上で、生徒の解釈を導いていかなければならないことの難しさ、また、道具をいかに有効に利用できるかの難しさを改めて認識できた。

数学史原典と道具をいかに多くの分野で活用していけるか考察していくことが今後の課題である。

謝辞

授業研究の実施に際し、栃木県立佐野高等学校の石塚学先生、内田孝夫先生をはじめとする数学科の先生方、ならびに筑波大学に内地留学されている会田英一先生には、準備の段階より貴重なご意見と多大なるご尽力をいただきました。心より御礼申し上げます。

注：本研究は、平成 15 年度科学研究費、特定領域研究(2)課題番号 15020214「数学用機械と JAVA による移動・変換と関数・微積ハンズオン教材の WEB 化研究」（研究代表者礒田正美）において開発された歴史的道具を前提にして、平成 15 年度科学研究費、基盤研究(B)(2)課題番号 14380055「数学の文化的視野覚醒と新文化創出のための教材・指導法開発研究」（研究代表者礒田正美）の一環として行われた。

出典：中学校・高等学校数学科教育課程開発に関する研究(11)
発行：筑波大学数学教育学研究室、pp.123-135、2004年3月

引用文献・参考文献

１） 文部省(1999).*高等学校学習指導要領解説　数学編　理数編*.東京.実教出版.

２） 礒田正美（2002）解釈学から見た数学的活動の展開ー人間の営みを構想する数学教育学へのパースペクティブー.*筑波数学教育研究*.21.pp.1-10.

３） L.Grugnetti and L.Rogers（2000）.*Philosophical,multicultural and interdisciplinary issues*. In John Fauver and van Maanen(Eds.)(2000)*History in Mathematics Education*.the ICMI study.Kluwer Academic Publishers 2000.pp39-62.

４） Maria.G.Bartolini Bussi（2000）.*Ancient instruments in the modern classroom*. In John Fauver and van Maanen(Eds.)(2000)*History in Mathematics Education*.the ICMI study.Kluwer Academic Publishers 2000.pp343-349.

５） 高見香織(2003).道具からの数学化による文化的営みとしての数学授業ー日時計を用いた円錐曲線の教材開発ー.*中学校・高等学校数学科教育課程開発に関する研究（10）「確かな学力」の育成と歴史文化思考の数学教育ー個に応じた指導 数学史・道具ー*(pp.54-67).

６） 福田匡弘(2003).透視図法の数学化についての授業研究ー射影と切断の歴史を手がかりにー.*中学校・高等学校数学科教育課程開発に関する研究（10）「確かな学力」の育成と歴史文化思考の数学教育ー個に応じた指導 数学史・道具ー*(pp.103-115).

７） 礒田正美・中島俊朗(2003).光と影から生まれた数学の世界.日時計から数学のルーツをたどる（2）*教育科学/.数学教育 2003-5 月号 No546*.東京.明治図書.

上記以外に引用・参考にした文献および web

８） 礒田正美(2001)異文化体験から見た数学の文化的視野の覚醒に関する一考察ー隠れた文化としての数学観の意識化と変容を求めてー.*筑波数学教育研究*.20.pp.39-48.

９） Descartes(1637). La Dioptrique (pp82-228)　*DISCOURS DE LA METHOD＆ESSAIS* . PARIS.LINRAIRIE PHILOSOPHIQUE J.VRIN.

１０）デカルト(1974).*デカルト著作集Ｉ.屈折光学*（三宅徳嘉.小池健男.清水靖三.水野和久.赤木昭三.原亨吉訳）東京.白水社.

１１）S.Hollingdale..(1993)　*数学を築いた天才たち（上.下）*（岡部恒治監訳）.東京.講談社.

１２）T.L ヒース(1998). *復刻版ギリシア数学史*.東京.共立出版.

１３）Francisci a Acohooten .CONICARUM,SECTIOUM GEOMETRIS,OPTICIS;GNOMONICIS &MECHANICIS.*ORGANICA*.Ex Officina Elzeviriorum.

１４）実教出版（1996）.*数学Ｃ*.東京.実教出版.

１５）筑波大学数学教育研究室：数学歴史博物館：道具と数学的活動：数学の機械と文化の展示室 http://130.158.186.230/museum/MathematicalInstruments/inizio.htm