出典：中学校・高等学校数学科教育課程開発に関する研究(11)
発行：筑波大学数学教育学研究室、pp.136-150、2004年3月

デカルト『幾何学』を用いた授業研究

―道具を通して原典を読む解釈学的営み―

筑波大学大学院修士課程教育研究科
新木　伸次

章構成

要約

数学史を解釈学的営みによって学習することを通して、生徒が自ら数学を人の文化的営みであると知る活動に取り組むことが期待される。そして、道具は「他者の立場の想定」することにおいて価値を持つ。そこで本研究では、『幾何学』を題材にした教材開発と授業実践を行なった。その結果、道具に着目した解釈学的営みによって現在自分たちの学んでいる数学と当時の数学を比較でき、数学を人の文化的営みであると認め、創造的に捉えていることが示された。

キーワード：解釈学的営み，デカルト，メソラボス・コンパス，道具

1. はじめに

高等学校指導要領解説(1999)において、数学科の目標の中のひとつとして、「数学的活動を通して創造性の基礎を培う」と、数学を創造的にとらえることの必要性が述べられている。また、数学基礎の目標における「(1)数学と人間の活動」において、「数学の諸概念が人間の活動とのかかわりの中から生まれてきたことを認識することや、数学を文化や社会などとの関連からとらえることは、それ自身として重要であるとともに、数学に対する興味・関心等を高め、数学をより身近なものとして感じとらせるための有効な方法の一つである。」(p.33)と、数学を人の文化的営みであると理解することが重要であると述べられている。

礒田(2001)はこのような点に対し、数学を人の文化的営みであると理解し数学観の変容を促すことについては、異文化体験による文化的視野の覚醒が寄与しうること、そして、そのような文化的視野の覚醒に対しては数学史がその契機を提供しうることを指摘している。また、そのような文化的視野の覚醒を導く異文化体験においては、「文化比較に通じる課題設定をした上で、他者の身になって考えてみる、他者の世界において考えてみることが有効な方策となる」(礒田 2001, p.46)ことを述べている。

そのような「他者の身になって考えてみる、他者の世界において考えてみること」は、解釈学的営みによる数学的活動という立場から説明され、原典解釈を取り入れることによる解釈学的営みを通じて、生徒は自ら数学を人の文化的営みであると知る活動に取り組むことができる(礒田 2002)。

Grugnetti、Rogers (2000)もまた、学校数学に関して、哲学的な見地に立ったとき、「数学は文化的、創造的な側面を伴った人間の活動として見られなければならない」(p.61)ことを指摘しており、「歴史的なアプローチは、数学を静的な結果としてではなく既存を伴う知的な過程として、また世の中から切り離された完成された構造としてではなく、個々人の進行している活動として見なすことを促進し、可能にする」(p.45)と述べている。

デカルトの『幾何学』を教材とする先行研究には、阿部(2002)による解釈学的営みに基づく授業実践があるが、道具を中心として扱っていない。それに対し本研究では、礒田(2003)の「4) 他者の立場の想定に役立つ道具」としての道具の価値に基づき、『幾何学』の中に現れる道具に着目することによる解釈学的営みの授業実践を行なう。

2．研究目的・方法

(1)．研究目的

デカルトの『幾何学』を題材として道具に着目した解釈学的営みを行なう授業実践によって、数学が人の文化的営みであることを生徒が知り、数学観の変容を促すことができるか。

(2)．研究方法

上記の目的の達成を確認するために以下の課題を設定し、アンケートや授業後の感想、授業の様子を撮影したビデオ等によって、設定した課題が達成されたかどうかを調査する。

課題 1：デカルトの道具に着目して原典を解釈することによって、現在自分たちが学んでいる数学と当時の数学を比較して考えることができるか。

課題 2：デカルトによって数学が変えられたことを追体験することによって、数学が人の文化的営みであると知り、数学を創造的に捉えることができるか。

3．『幾何学』の教材化

本研究では原典としてデカルトの『幾何学』を中心にテキストを開発した。本研究において原典とは、翻訳文献も含んでいる。

「自分の理性を正しく導き、いろいろな学問において真理を求めるための方法について」述べた『方法序説』(1637)の三つの試論の一つとして、『幾何学』(1637)はデカルト(1596-1650)によって著された。その『幾何学』においてデカルトは、幾何学と代数学とを統合を図ろうとした。

デカルト以前の幾何学はギリシャ由来の幾何学であり、そこでは解析とよばれる作図されたと結論を仮定することによる発見法を用いていた。しかし、デカルトによれば解析は「いつも図形の考察にしばられているので、理解力をはたらかせようと思うと想像力をたいへん疲れさせずにはおかれない」ものであった。また、デカルト以前の代数学はアラビア由来の代数学であり、未知のものが求められたと考えてそれを求める解法のアルゴリズ

出典：中学校・高等学校数学科教育課程開発に関する研究(11)
発行：筑波大学数学教育学研究室、pp.136-150、2004年3月

ムを研究していた。しかし、その解法の正しさは、今日のように式で表わされることで示されたとされるものではなく、言葉による解法が幾何学的に図形で示されることによってその妥当性を得ていた。そこでは、2 つの数を掛けたものは面積、3 つの数を掛けたものは体積を意味しており、$a+cd$ のような式によって表される関係は長さに面積を加えることであり、意味として考えられないという問題が存在した。すなわち、その表現方法において、次元の制約を持っていたということである。今回の授業では、このようなアラビア由来の代数学の考えを知るための例として、カルダノ(1501-1576)による二次方程式の解法の例を考えられるようにした。

デカルトは、幾何学の「解析」と代数学の「未知のものが求められた」と考える方法が、その考えにおいて同じであることを『精神指導の規則』(1618 年頃)で述べている。そして、幾何学と代数学とを統合を目指し、「何ら特殊な質量に関わりなく、順序と計量関係とについて求められうるすべてのことを、説明するところの或る一般的な学問」である「普遍数学（Mathesis universalis）」を構想した。デカルトは『幾何学』第 1 巻において、代数学では長さ、面積、体積などで表される数が、すべて線分に帰着できることを比例の関係を用いた作図によって示した。これによって、問題であった次元の制約をのりこえることに成功した。

本研究で用いた道具である「メソラボス・コンパス(circinus mesolabi)」 (佐々木 2003)は、『幾何学』の中では、第 2 巻の「幾何学に受け入れられる曲線はどのようなものか」を論じる中で、デカルトの考える幾何学的曲線を描く作図器として現れる。ギリシャの幾何学は作図のための道具として、定木とコンパスしか認めておらず、それらによって作図できるものを幾何学的と呼び、それ以外のものによって作図されるものを機械的と呼んだ。それに対しデカルトは、幾何学的と呼ばれるものの中に、「2 本またはそれ以上の線が互いによって動かされ、それらの交点が他の線を作り出す、ということを仮定する」ことによって描かれる曲線、すなわち、道具によって描かれる曲線を含めることを提案した。なぜならば、線分算によって幾何学と代数学を結びつけたデカルトの数学の上では、これらの曲線はすべてデカルトの述べる「幾何学的計算」によって考察の対象とすることが可能だからである。メソラボス・コンパスはそのような幾何学的とされる曲線を与えるための作図器として、よい例となり得るのである。

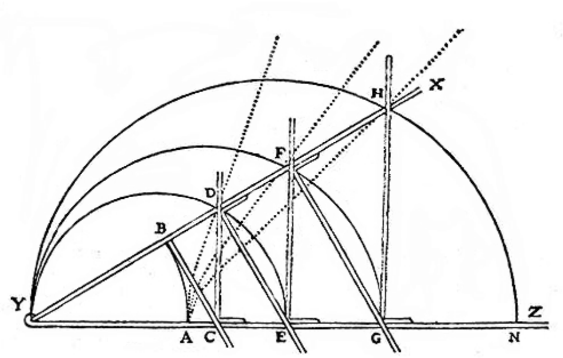
また、メソラボス・コンパスのような道具を幾何学的とすることのよさは、第 3 巻に述べられているような多くの比例中項を見出すことができるという点でも示される。なぜなら、立方体の倍積問題を解く、すなわち、2 本の線分の間の 2 つの比例中項を作図することは定木とコンパスによる作図では不可能である。しかし、メソラボス・コンパスを用いれば、その作図は可能となる。そして、定木の数を増やしていけば 2 つだけでなくさらに多くの比例中項までをも作図でき、n 乗根までも作図できる対象になるのである。メソラボスとは、比例中項を得ることを意味しており、このメソラボス・コンパスが考案された本来的目的は、このような比例中項を求めるための道具であったと考えられる(佐々木

2003)。

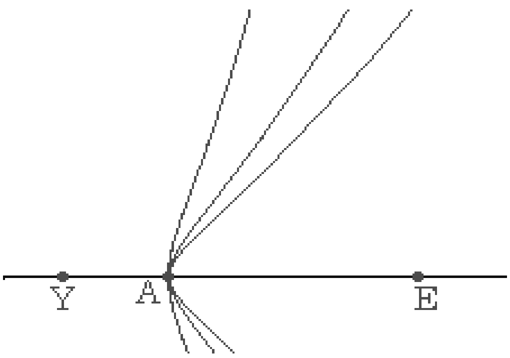
本研究では、メソラボス・コンパスを授業の初めに示し、「なぜデカルトはそのような道具を用いたのか」という問いをもって考えていくことから始めた。そして、そこからデカルトの『幾何学』を読むことによって、デカルトの考えを追体験する解釈学的営みを行なった。

また、本研究においてはメソラボス・コンパスを生徒が操作して考察する際、作図ツール(Cabri GeometryⅡ、以下 Cabri と呼ぶ。) を用いている。メソラボス・コンパスの作図ツールによる先行研究には、幾何学的、数的、代数的な経験の間のバランスのとれた対話を、メソラボス・コンパスから対数曲線やその傾きまでの歴史的アプローチから論じた Dennis(1997)のものがある。そこでの作図ツールは、物理的な探究と記号による言語との対話を助けるものとして用いられている。それに対し本研究における作図ツールは、他者の立場に立って考えるための道具としての意味を持っている。それは、デカルトが考えるために用いた道具を自分の手で動かし、考察することで、デカルトの立場に立って考えられるようにするためである。

4．メソラボス・コンパスの数学的解説



【図 1】メソラボス・コンパス(『幾何学』より抜粋)



【図 2】

まず、メソラボス・コンパス(図 1)の仕組みを説明する。図 1 のように 2 本の定木 YX と YZ が Y を中心として開閉できるように繋げられている。そして、Z 上の長さ YA と等しくなるように、X 上に YB をとる。したがって、B は X を開閉したとき、半径 A の円周上を動く。また、B から YX と垂直になるように定木が取り付けられており、YZ との交点が C である。定木 CD も定木 BC と同様に C で YZ に垂直になるように取り付けられている。したがって、定木 YX を開くと定木 BC が定木 CD を押すようにして動かす。このとき、定木 CD は定木 YX と垂直を保ったまま動くようになっている。以下、同様な仕組みで、DE、EF、FG、GH というように定木を組み合わせていく。

メソラボス・コンパスを閉じた状態から開くと、交点 D は図 1 のような曲線 AD を軌跡として描く(第 1 の曲線とする)。同様に、交点 F は曲線 AF (第 2 の曲線)を、交点 H は曲線 AH (第 3 の曲線)を描く。このようにして定木の組み合わせの数だけ曲線を得ることができる。

出典：中学校・高等学校数学科教育課程開発に関する研究(11)
発行：筑波大学数学教育学研究室、pp.136-150、2004年3月

前述したように、メソラボス・コンパスは多くの比例中項を見つけることができるが、デカルトは描かれた曲線を基にして比例中項を見つけるための説明を与えている。例えば、図 2 のような長さ YA と YE との間に 2 つの比例中項を見つけたいとする。図 2 のようにメソラボス・コンパスによって曲線を描く。このとき、YE を直径とした円を描き、円とメソラボス・コンパスによって描かれた第 1 の曲線との交点を D とする。そのようにして求められた点 D に対して、メソラボス・コンパスをあてがえば、図 1 と同じになる。このことから、2 つの比例中項が YD と YC であることがわかる。なぜなら、直角三角形の相似より、△YCB∽△YDC∽△YED であり、YB : YC = YC : YD = YD : YE となるからである。4 つの比例中項を見つけたいときは、第 2 の曲線を使うことによって、同様にして得られる。同様に、第 3 の曲線を使えば、6 つの比例中項を見つけることができる。したがって、定木を増やして描く曲線を増やせば、それだけ多くの比例中項を見つけることができる。

第 1 の曲線 AD を座標を用いて式で表現する。YZ を x 軸と考えて、Y = (0,0) , A = (a,0) , D = (x,y)とすれば、$\mathrm{YD}^2 = x^2 + y^2$ である。また、YA : YC = YC : YD より $\mathrm{YD} = \dfrac{x^2}{a}$ であるから、$x^4 = a^2(x^2 + y^2)$ となり、4 次曲線であることが分かる。また、F = (x,y)として考えれば、同様にして第 2 の曲線 AF の式 $x^8 = a^2(x^2 + y^2)^3$ を得ることができる。H = (x,y)とすれば、第 3 の曲線 AH の式 $x^{12} = a^2(x^2 + y^2)^5$ を得ることができる。

5．授業概要

(1)．授業環境

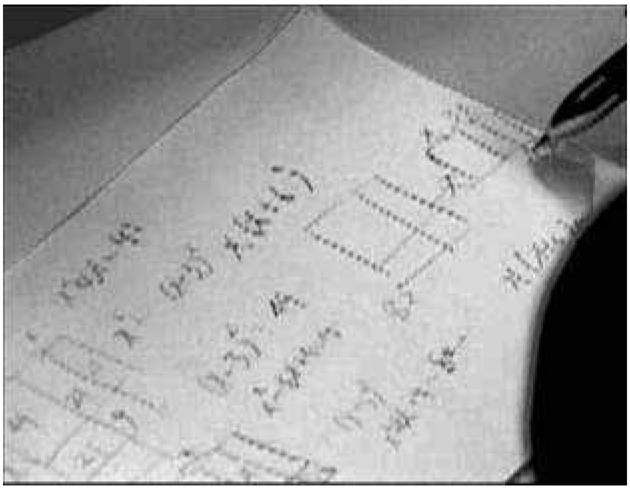
① 日時：平成 15 年 10 月日(65 分×3)
② 対象：埼玉県立高等学校　第 2 学年(2 クラス 79 名)
③ 準備：コンピュータ(Windows)、Microsoft Power Point、プロジェクター、実物投影機、作図ツール(Cabri GeometryⅡ)、原典を基に作成した道具(メソラボス・コンパス、双曲線の作図器(『幾何学』第 2 巻の挿絵のもの))、授業テキスト、事前課題、事前・事後アンケート、授業記録用ビデオカメラ等。

(2)．授業展開

＜1 時間目＞

まず、原典を基に作成したメソラボス・コンパスを提示し、それがどのように作られているかという説明をした。そして、『幾何学』に書かれているメソラボス・コンパスの説明を読んでもらい、実際にそれがどのように動くのかを見てもらうために、生徒の一人を指名しメソラボス・コンパスを動かしてもらった。その動きは、実物投影機を通じて他の生徒にも伝わるようになっている。そして、動かした生徒にどこを動かしたらどのように動いたのかを説明してもらい、コンパスの一本の定木を開くとそれに伴って他の定木も動くことを確認した(図 3)。その後になぜデカルトはこのような道具を使ったのかを問いかけた。

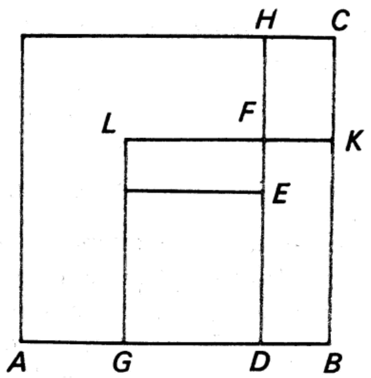
【図 3】道具を動かしてみる



【図 4】カルダノの解法を考える

(授業者と生徒の対話 1)
授業者:何かこれを動かしてみてわかることはあるかな？どんなことができそう？
生徒 1：半径の違う円が描ける？
授業者:半径の違う円が描ける。なるほど。他に何かあるかな？
生徒 2：…ちょっとわからない。
授業者:わからない。どう使うことができそう。
生徒 3：予想ができない。
授業者:うん。ちょっと動かしただけでは何で使ったかはわからないよね。そこで、今回の授業では、これ(メソラボス・コンパス)を何で使ったかを考えてってみよう。

メソラボス・コンパスについて疑問をもったところで、それを考えた人物としてデカルトを紹介し、『方法序説』と試論としての『幾何学』について説明した。そして、『方法序説』の幾何学と代数学の統合を目指していることが述べられている一節を読んでもらった。ここで述べられていることを読み解いていくことが授業の目標であるので、ここではデカルトが数学を変えようとしているということを確認する程度に留めた。そして、デカルトの学んでいた数学と生徒が現在学んでいる数学は、異なっていたということを知ってもらうために、デカルト以前の「代数学」について生徒が考えるような例を提示した。



【図 5】x^2 = 6x +16 の図
(『Ars Magna』より抜粋)

デカルト以前の代数学の例として、カルダノの『Ars Magna』にある 2 次方程式$x^2+6x=91$の解法について、方程式とカルダノの用いた図を示し、その解法がどのようなものであったのかを考えてもらった(図 4)。(カルダノの時代は、今日用いているような式で方程式を表現するのではなく、文章で方程式とその解法を表現していた。しかし、授業ではどのような方程式を考えているのかをわかりやすくするため、考える対象となる方程式を現代の表現で表

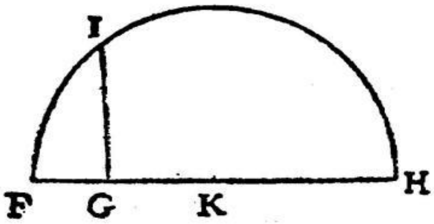
出典：中学校・高等学校数学科教育課程開発に関する研究(11)
発行：筑波大学数学教育学研究室、pp.136-150、2004年3月

わした。) カルダノの説明を見なくても方程式と図を見ただけで、方程式の解法がわかった生徒がいたので説明してもらった。その後で、テキストに文章で書かれているカルダノの解法についての説明を加えた。次に、$x^2 = 6x + 16$ を今度はカルダノの解法を読みながら、その解法について考えてもらった。この解法については、カルダノの解法を読んでもその内容がわかりにくいため、生徒も戸惑っていた。

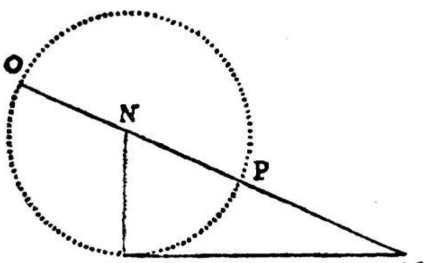
【図 6】乗法の説明

このようにして 2 次方程式を図形の面積を用いて解くことはわかりにくいということを感じることでデカルトの立場に立てるようにした。そして、デカルトは度量によらない数学を目指していることを生徒が知ることができるように、『精神指導の規則』の中の普遍数学について述べられた一節を読んだ。

デカルトの目指した数学に対して、デカルトは実際にどのように考えたのかを『幾何学』から読み取り、すべての演算が線分に帰着できることを主張していることを確認した。そして、まず加法・減法はどのように考えられるのかを考えてもらったが、これは容易に作図できるために授業者が説明した。しかし、乗法の場合についてはなぜ乗法が表せるのかを、生徒が考えるようにした。これについては、作図の方法と何を示したいのかを確認することで、生徒自身が比の関係に気付くことができたので、生徒一人を指名し、なぜ乗法がデカルトの作図で示せるのかを説明してもらった(図 6)。除法については同様に説明できるので、今回は説明せずに課題とした。最後に、平方根を求める場合を考えた(図 7)。しばらく考えてもらった後に、『幾何学』にある図に補助線を加えてヒントを出した。そして、生徒になぜ平方根が求められるのかを説明してもらった。



【図 7】平方根の作図(『幾何学』より抜粋)

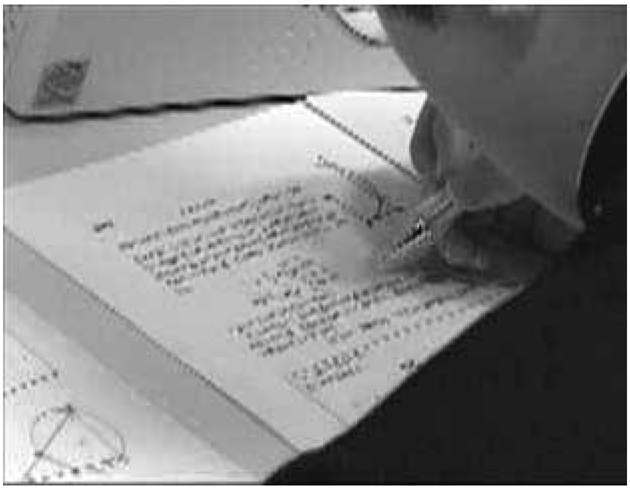


【図 8】$z^2 = az + bb$ の解の作図(『幾何学』より抜粋)

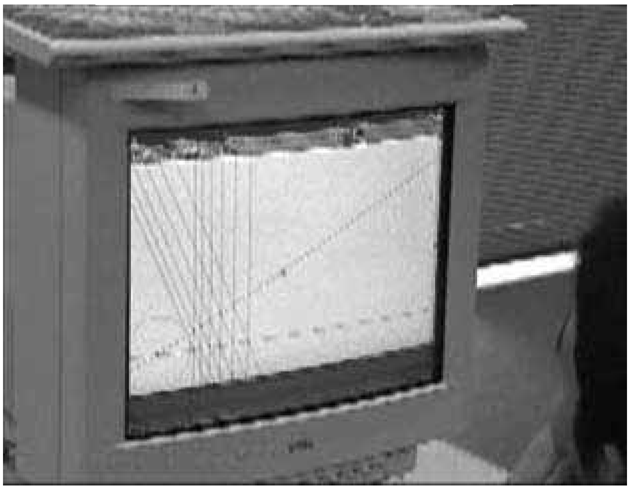
＜2 時間目＞

デカルトの述べている平面的な問題とはどのようなものか、幾何学について説明し、デカルトが代数

方程式を幾何学的に説明していることを読み取ることから始めた。まず、$z^2 = az + bb$ の解がどのように幾何学的に説明されるのかを、方程式と作図の方法を確認した後で生徒が証明を考えるようにした(図 8)。その際、方程式の表現が現代に近くなっていることについても説明した。(デカルトは＝を使わずに、同様な意味を表わすものとして∝を反転させた記号を用いているが、表記の都合上デカルトの記号を説明した上で、＝を使用した。) この方程式はカルダノの $x^2 = 6x + 16$ の解法と比較できるようになっており、デカルトの考え方のよさを感じることができるようになっている。さらに、$yy = -ay + bb$ の場合について同じ作図で考察することによって、カルダノの $x^2 + 6x = 91$ の場合とも比較できるようにしてある。これについては、自分で確認する課題としておいた。また、別の作図によって $z^2 = az - bb$ の解がどのように幾何学的に説明されるのかを、$z^2 = az + bb$ のときと同様に証明を生徒が考えるようにした(図 9)。



【図 9】



【図 10】Cabri で作図

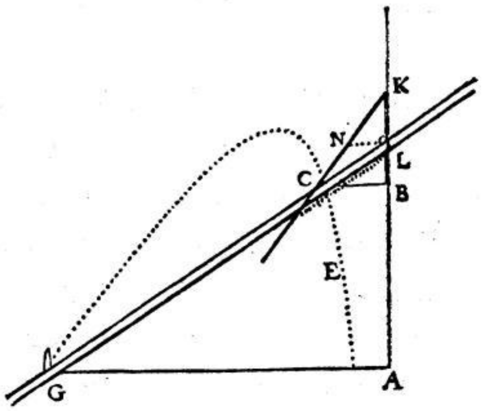
次に、デカルトの幾何学というのはどのようなものであったのかということについて考えた。デカルト以前の幾何学とはどのようなものであったのか、そこでデカルトは何を主張しようとしていたのかを原典を基に解釈していった。その際、円錐曲線について生徒は未習であるため、円錐曲線とはどのようなものなのかを説明するために、楕円、双曲線、放物線が円錐の切り口として現れることを Cabri を用いて確認し、これらは式として表現されたものではなく、古代人は円錐の切り口に現れる曲線として考えていたことを伝えた。

デカルトが道具によって作図される曲線を幾何学的なものに含めようとしたことを確認し、それによってどのようなことが可能となるのかを示す例として、立方体の倍積問題について扱った。2 倍の立方体の一辺を作図するためには、2 の 3 乗根がわかれば良いことは、生徒もすぐに答えることができた。そして、その作図が 2 つの比例中項を見つけることに帰着でき、定木とコンパスでは作図できないことを解説した。比例中項については、

出典：中学校・高等学校数学科教育課程開発に関する研究(11)
発行：筑波大学数学教育学研究室、pp.136-150、2004年3月

事前課題として考えられるようにしておいたが、ここでもう一度確認した。

立方体の倍積問題がどのような問題かわかったところで、立方体の倍積問題、すなわち 2 つの比例中項の作図はメソラボス・コンパスによってどのように解かれるのかを考察することにした。考察に移る前に、生徒がメソラボス・コンパスを自分の手で動かして考えることができるように、メソラボス・コンパスを Cabri で作図する活動を行なった。生徒は Cabri を使うことは初めてであるので、まず、Cabri の操作に慣れることから始めた。そして、ある程度操作に慣れたところで、メソラボス・コンパスがどのように動くのかを道具を用いてもう一度確認し、その仕組みを考えながら Cabri で作図できるようにした(図 10)。



【図 11】双曲線の作図器(『幾何学』より抜粋)

＜3 時間目＞

デカルトの幾何学に受け入れられ得る曲線としたものはどのようなものであったのか、前回作ったメソラボス・コンパスを動かしてみることによって調べる活動から始めた。前回メソラボス・コンパスを作図できなかった生徒には、あらかじめ授業者が用意しておいた Cabri ファイルを使うことによって、すぐに曲線を調べる活動ができるように配慮した。また、Cabri のトレース機能を使い、曲線がコンパスを動かしたときの軌跡として視覚的に得られるようにした。そして、メソラボス・コンパスで描かれる曲線はどのようなものかを Cabri を用いて描くことによって、これらは定木とコンパスで描くことができない曲線であることを確認した。

立方体の倍積問題においては 2 つの比例中項を求めることが問題であったことを確認し、それがメソラボス・コンパスのどこに現れ、どのようにして作図されるのかを考察した。また、定木の数を増やすことによって 2 つ以上の比例中項も求めることができることについても解説した。

次に、デカルトの幾何学における曲線の分類について解説した。そして、曲線がどのようにして方程式によって表され


【図 12】

るのかを生徒が考察するようにした。そのために用いたのは、『幾何学』第 2 巻の挿絵にある双曲線の作図器である(図 11)。考察するにあたって、まず、挿絵を基にして作った道具を実物投影機で示し、実際にそれがどのように動くのかを確認した。その後で、授業者が用意したこの道具を作図した Cabri ファイルを用いて、生徒一人一人が手元で道具を動かしながら考察できるようにした(図 12)。

(授業者と生徒の対話 2)

授業者：どんな曲線が描けましたか？

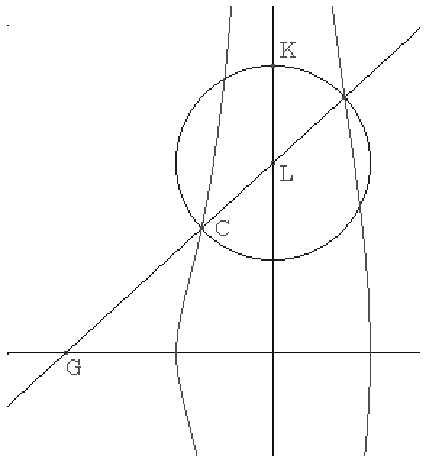
生徒 4：反比例？

授業者：反比例の曲線はなんていったっけ？

生徒 4：……双曲線。

授業者：そう、双曲線。(Cabri で曲線を描いて)実際にこれは反比例の曲線と同じなのかな？それを考えてみる必要があるよね。

どのような曲線が得られるのかを確認した後、曲線を方程式で表すことについて考察した。その際、既知の量、未知の量は何であるのかを道具を動かしながら確認した。そして、デカルトの曲線ではこの曲線は何類に分類されるのかを確認した。この曲線が双曲線になることについては、前述の通り、生徒は双曲線について未習であり、双曲線として反比例のグラフのイメージしかもっていない。したがって、双曲線の作図器の定木の傾きを変えることで生徒のもつイメージに近い双曲線が現れることを示した。



【図 13】条件換えで現れるコンコイド

双曲線の作図器の条件を変えることによって、コンコイドなどが現れることについては、授業者が Cabri を用いてどのような曲線が描かれるのかを示し、解説するに留めた(図 13)。最後に、メソラボス・コンパスで現れる曲線について、「あとに来る線ほど最初の線に比べて複雑であり、最初の線自体は円より複雑である」ことの意味を考察した。

6．議論

研究目的と設定した課題について議論していく。

課題 1：デカルトの道具に着目して原典を解釈することによって、現在自分たちが学んでいる数学と当時の数学を比較して考えることができるか。

アンケートから次のような感想が得られた。

生徒①：あんな図形がかけるとは思わなかった。どういう線を描くか考えるのが難しかった。

出典：中学校・高等学校数学科教育課程開発に関する研究(11)
発行：筑波大学数学教育学研究室、pp.136-150、2004年3月

生徒②：昔の人は数学でも実験みたいなことをやっていたのかと驚いた。
生徒③：昔の人は、その当時にそれなりの工夫をしながら数学を解いていたと思うと感動した。
生徒④：リンケージという道具を始めて見た。円を描く道具かと思ったが、違った曲線が描けたから驚いた。昔の人が工夫した道具を使って、式を証明していたことに驚いた。
生徒⑤：昔の人はいろいろな道具をつくったり、それを使って解いたりするのはすごいと思った。
生徒⑥：昔の人は数学に関する道具を作るという創造性に富んでいたのだなと思った。逆に、そういう道具がある現在では、ほとんどの人が工夫することを忘れてしまっているような気がする。
生徒⑦：双曲線などを作り出すために道具を考案した昔の人はすごい。リンケージにしても、今はコンピュータなどがあるので作図は容易だが、昔は違う。昔の人の想像力はすごい。
生徒⑧：僕らはコンピュータなどがあるけれど、すべて自分たちで作るなんてすごい。

現れた曲線に対して驚きを表していることからも、生徒①は道具を用いて、どのような曲線が現れるのかを積極的に考察しようとしていたことが分かる。それは、デカルトの幾何学において受け入れられる曲線がどのようなものかを探究しようとしていたと考えられるので、道具の考察を通して当時の数学について考えいこうとする態度の現れであると考えることができる。

生徒②、生徒③、生徒④は道具を使って、デカルトの考察したものを体験したことによる感想である。生徒②は、デカルトが数学において道具を用いて考えていることに驚きを表しており、生徒④は道具を用いて考察される対象が証明であったことに驚きを表している。また、生徒③も、デカルトが定木とコンパスだけだったものに対し、道具を加えるという工夫をしたことのよさを、実際に自分も道具を用いてデカルトの考え方を追体験することによって感得したと考えられる。これらは、道具を使って考えるという、自分たちが現在学んでいる数学との違いを感じることによって得られた感想である。

生徒⑤、生徒⑥は、デカルトの数学を道具を通して考えて追体験したことによる感想である。両者ともデカルトの数学を考える上で道具を作って考えていこうとしているデカルトの数学を、現在の自分の数学と比較してみることによって、そのすごさを感じることができたものと考えられる。

生徒⑦、生徒⑧は、当時と現在ある道具とを比較することによる感想である。今回の授業では、デカルトの考えを知るために作図ツールを用いた。それによって生徒は曲線を軌跡として視覚的に捉えることができた。しかし、当時の数学で考えたとき、作図ツールなどがない時代であることが想像でき、その想像力のすごさを自分と比較することによって感じることができたと考えられる。

また、道具を用いて考えることに関するアンケートにおいても、道具に着目して原典を解釈することによって、道具を用いて考えることの重要性の意識が高まっていることが示されている。これは、当時の数学が現在よりも道具を用いて考えることを重視していたと感じることによるものであると思われる。

以上より、デカルトの道具に着目して原典を解釈することで、現在自分たちが学んでいる数学と当時の数学を比較して考えていたと考えられる。

・数学を考えるために、道具を使って考えることは必要だ(事前・事後アンケートより)

	大賛成	賛成	どちらでもない	反対	大反対
事前 (79)	17 (21.5%)	39 (49.4%)	17 (21.5%)	6 (7.6%)	0 (0%)
事後 (74)	23 (31.1%)	45 (60.8%)	6 (8.1%)	0 (0%)	0 (0%)

アンケート結果について母平均の差の検定を行った。事前と事後の母集団 $N(\mu_1, \sigma_1^2)$, $N(\mu_2, \sigma_2^2)$ において、帰無仮説は H_0： $\mu_1=\mu_2$ であり、対立仮説は H： $\mu_1<\mu_2$ である。このとき自由度 139 の t 分布 t(139)に従う。有意水準を $\alpha=0.05$ と設定する。t 分布表より、t 分布の片側 5 パーセント点は $t_{0.05}(120)=1.658 > t_{0.05}(139) > t_{0.05}(240)=1.651$ である。ここで $t=3.253$ であるので、$t > t_{0.05}(139)$。ゆえに帰無仮説は棄却される。従って母集団に関して平均値が上がっていることが検定から確認された。

課題 2：デカルトによって数学が変えられたことを追体験することによって、数学が人の文化的営みであると知り、数学を創造的に捉えることができるか。

アンケートからは次のような感想が得られた。

生徒⑨：数学は昔と比べてあまり変わらないものだと思っていたが、より簡単でわかりやすいものにするために、いろいろと努力していたことに感心した。

生徒⑩：数学っていうのは昔から少しずつ少しずつ発展してきて今に至っているんだなと感じました。

生徒⑪：考え方にはいろいろな方法があって、いろんな方法を考えることが大切だと思った。

生徒⑫：今やっていた数学がすべてだと思っていたけれど、今に至るまで、先人の努力があったからこそ、数学が発展したもの。もっと数学に興味が持てるような気がする。

生徒⑬：挑戦することによって新しい見方が生まれると思うようになった。

生徒⑭：数学はもう決まっているものだと思っていたけれど、デカルトの話を聞いたり、解いたりして、まだまだ数学には発見の余地があることが分かった。

生徒⑮：昔の人がどうやって今私たちが学んでいる数学の解法を見つけていたのかがわかり、今までより歴史の重みを感じた。

生徒⑯：昔の人の考えをすごいと思いました。今の数学はこういう考えを基にできているんだと感心した。

出典：中学校・高等学校数学科教育課程開発に関する研究(11)
発行：筑波大学数学教育学研究室、pp.136-150、2004年3月

生徒⑰：今も昔も数学は変わらずに存在するものだけれども、見方と考え方によって、数学の幅がずいぶんと広がるものだと感じた。

生徒⑱：今学んでいる数学は、昔の人が苦労して積み上げげたものを上辺だけ学んでいるが、昔の人は自分自身で数学を開発していてすごいと思った。

生徒⑲：自分たちがやっている数学は、方程式にしても実際に何をやっているのかわかりにくいが、昔の人々は$x^2+6x=91$などもそうだが、図に表して意味を理解して数学を考えているのにおどろいた。

生徒⑨、生徒⑩、生徒⑫、生徒⑮の感想からは原典解釈を通して数学の発展を追体験することによって、数学が昔の人々の試行錯誤によって発展してきたものであると考えることで、数学が人の営みであると捉えていると考えることができる。また、生徒⑫については、数学をそのように捉えることによって、数学に対して興味を持つようになったことが示されている。

生徒⑪、生徒⑬、生徒⑭の感想からは、数学を創造的に捉えているといえる。なぜなら、生徒⑪はデカルトは考え方を変えることによって数学を変えたことを追体験したことで、解法を多面的に考えることの必要性を感じるようになったからであると考えられる。また、生徒⑬、生徒⑭はデカルトの考えを追体験することで、考え方を変えることによって新しいものが得られるという数学の創造性を感得することができたと見ることができる。それによって、まだ数学には発展の余地があると考えるようになっているということが考えられる。

生徒⑯、生徒⑰、生徒⑱、生徒⑲の感想からは、追体験によって得られた経験を現在の数学と結びつけて考えていることが分かる。生徒⑯は、昔の人の考えをもとに現在の数学ができていると知ることによって、数学を人の文化的営みとして捉えている。生徒⑱、生徒⑲は、追体験を通すことによって、現在の自分の学んでいる数学と対比することが可能になり、現在の自分の学んでいる数学を見直している。また、生徒⑰は、デカルトの考えを追体験することによって、考え方を変えることによって数学の幅が広がると創造的に捉えることができており、それは今も昔も数学という点では同じであると感じていると考えられる。

以上から、追体験することによって、数学が人の文化的営みであると捉え、数学を創造的に捉えることができているのではないかと思われる。

以上の議論より課題 1、課題 2 が達成できていることが示された。したがって、本研究の目的は概ね達成されたと考えられる。

7．おわりに

本研究では、『幾何学』を題材として道具に着目した解釈学的営みを行なう授業実践によって、数学が人の文化的営みであることを生徒が知り、数学観の変容を促すことを目的とした。本研究においては、特に、道具を用いて考えることが、現在自分たちが学んでいる

数学と当時の数学を比較するために有効に働くということが、強く示されているのではないだろうか。

今回は生徒全員分の道具を用意できなかったため作図ツールを用いたが、道具は当時の人が用いていた道具に近いほど、それを用いた人の立場が分かるのではないだろうか。生徒一人一人が自分の手で道具を操作して考えられるようにすることが、より望ましかった。また、今回用いた道具であるメソラボス・コンパスは、方程式の解の作図にデカルトが用いていることからも、今回とはまた別の授業展開も考えられる。これについては今後の課題としていきたい。

謝辞

授業の実施に際し、埼玉県立春日部高等学校の渡辺正弘先生、金子豊先生、増田大作先生、早乙女勤先生をはじめとする数学科の先生方には、多大なるご協力と共に、貴重なご指導をいただきました。心より御礼申し上げます。

注)

本研究は、平成 15 年度科学研究費、特定領域研究(2)課題番号 15020214「数学用機械とJAVA による移動・変換と関数・微積ハンズオン教材の WEB 化研究」(研究代表者礒田正美)において開発された歴史的道具を前提にして、平成 15 年度科学研究費、基盤研究(B)(2)課題番号 14380055「数学の文化的視野覚醒と新文化創出のための教材・指導法開発研究」(研究代表者礒田正美)の一環として行われた。

参考・引用文献

(1) 文部省 (1999). *中学校学習指導要領解説: 数学編.* 大阪書籍.

(2) 礒田正美 (2001). 異文化体験からみた数学の文化的視野の覚醒に関する一考察: 隠れた文化としての数学観の意識化と変容を求めて. *筑波数学教育研究*, 20, 39-48.

(3) 礒田正美 (2002). 解釈学からみた数学的活動論の展開: 人間の営みを構想する数学教育学へのパースペクティブ. *筑波数学教育研究*, 21, 1-10.

(4) Grugnetti, L. and Rogers, L. (2000). Philosophical, multicultural and interdisciplinary issues. Fauver, J. and Massen, J. (eds.). *History in Mathematics Education* (pp.39-62). Kluwer Academic Publishers.

(5) 阿部千里 (2002). デカルトの「幾何学」による生徒の数学観の変容: 数学史原典から数学の発展を学ぶ. 筑波大学数学教育学研究室. *中学校・高等学校数学科教育課程開発に関する研究(9): 教育評価の転換と歴史文化志向の数学教育* (pp.151-164).

(6) 礒田正美(2003). なぜ道具を数学教育で活用する必要があるのか: 道具を使ってこそ学べる数学の教育的価値を明かすためのパースペクティブ. *日本数学教育学会第36 回数学教育論文発表会:「課題別分科会」発表集録: 今後の我が国の数学教育研究*, 246-249.

出典：中学校・高等学校数学科教育課程開発に関する研究(11)
発行：筑波大学数学教育学研究室、pp.136-150、2004年3月

(7) Descartes, R. (2001). 方法序説 (三宅徳嘉, 小池健男共 訳). *デカルト著作集 1*. 白水社. (原典 1637).

(8) Descartes, R. (2001). 幾何学 (原亨吉 訳). *デカルト著作集 1*. 白水社. (原典 1637).

(9) Descartes, R. (1950). 精神指導の規則 (野田又夫 訳). 岩波書店. (原典 推定 1618 年頃).

(10) Cardano. G. (1993). *Ars Magna or The Rules of Algebra*. (Witmer,R tr.). New York: Dover Publicacations. (原典 1545).

(11) 礒田正美 (2001). デカルト. *教科教育: 数学教育 11 月号* (pp.46-49). 明治図書.

(12) 片野善一郎 (1995). *教職数学シリーズ実践編 7: 数学史の利用*. 共立出版.

(13) 佐々木力 (2003). *コレクション数学史 1: デカルトの数学思想*. 東京大学出版会.

(14) Heath, T. (1959). *ギリシア数学史* (平田寛, 菊池俊彦, 大沼正則 訳). 共立出版. (原典 1931).

(15) Hollingdale, S. (1993). *数学を築いた天才たち (上): ギリシア数学からニュートンへ* (岡部恒治 監訳). 講談社. (原典 1989).

(16) *ユークリッド原論* (1971). (中村幸四郎, 寺阪英孝, 伊東俊太郎, 池田美恵 訳). 共立出版.

(17) 小松孝太郎 (2003). 複素数の歴史にみる虚数を実体化する学習: 歴史的原典を利用した解釈学的営み. 筑波大学数学教育学研究室. *中学校・高等学校数学科教育課程開発に関する研究(10):「確かな学力」の育成と歴史文化志向の数学教育: 個に応じた指導, 数学史・道具* (pp.153-166).

(18) Dennis, D. and Confrey, J. (1997). Drawing Logarithmic Curves with Geometer's Sketchpad: A Method Inspired by Historical Sources. King, J. and Schattschneider, D. (ed.) . *Geometry Turned on!: Dynamic Software in Leaning, Teaching, and Research* (pp.148-156). THE MATHEMATICAL ASSOCIATION OF AMERICA.