

リンク機構を教材とした、数学的活動を高める授業の研究

プラジオグラフを用いた、図形の回転移動の学習—

筑波大学大学院修士課程教育研究科 1年

田中 真樹子

章構成

1. はじめに
2. 研究目的・研究方法
3. プラジオグラフの教材化について
4. プラジオグラフを用いた授業概要
5. 考察
6. おわりに

要約

本研究は、シルベスターにより発明されたリンク機構である、プラジオグラフの仕組みを探究することを通して、中学3年生を対象に、数学的活動を高める授業を提案する。歴史の中で実際に使用された道具を教材化することで、探求心を高め、普段より複雑な証明活動にもねばり強く取り組む姿勢を確認できた。また、未習事項である回転移動を、約半数の生徒がその証明まで理解することができた。既習事項の発展として考察することはできなかったものの、発展的内容として学習できたことが確認された。

キーワード：数学的活動、証明、教具、回転、変換、移動

1. はじめに

通常、授業で語られている数学の世界は、整然と学びやすく、体系的に整えられている。教科書は、効率よく学ぶための工夫に満ちている。まず、基本的な計算について学び、その法則を理解すると、いくつかの問題を解き、計算に慣れる。次に計算を使って解く応用問題が提示される、という具合に少しずつステップアップしながら数学の世界を知るように作られているわけである。

だが、実際に数学の歴史を紐解いてみると、教科書に並んでいる順番に発明や発見がなされたわけではない。1つ1つの題材・記号・定理等は、それが生み出されて然るべき時代背景や文化を担っていることがわかる。生徒たちは普段、そういった文化や時代背景を想像することもなく、数学を整然と体系的に学んでいくわけである。今回、道具を教材として用いることで、数学を歴史の流れに引き戻して生徒たちに提示してみたいと考えた。

磯田(2003)は、道具を教材として用いる意義について「数学化の手段」「認識の変容」「メタファの提供」「他者の立場の想定」の4点を述べている¹⁾。本論ではこの磯田の立場にたって授業に道具を取り入れる。即ち、道具を探究することを通じて数学を追究し、道具

が背景に持つ歴史・文化に触れながら数学について考えたり、説明したりする作業を通してある時代（道具がその背景に持っている時代）の人々の営みと向き合うことを目指す。それは、教科書に書いてあることを暗記したり、手順に従って計算する学問であるというイメージを数学に持ちながらも、数学と自分たちの学習する意義を模索する生徒たちにある答えをだすことになると信じるからである。

さらに文科省学習指導要領ⁱⁱでは、数学的活動について次のように述べられている。「単にでき上がった数学を知るのではなく、事象を観察して法則を見つけて事柄の性質を明らかにしたり、具体的な操作や実験を試みることを通して数学的内容を帰納したりして、数学を創造し発展させる活動を通して数学を学ぶことを経験させ、その過程の中に見られる工夫、驚き、感動を味わい、数学を学ぶことの面白さ、考えることの楽しさを味わえるようにすることが大切である。」今回の活動は道具を作り、その操作をしながら、その背後にある数学の構造に迫っていく形で行われる。これはまさに、数学的活動であるといえよう。また学習指導要領において、発展的活動が選択学習には期待されているが、その実際は授業者の手に委ねられており、授業展開はさまざまである。実態として、3年生の場合受験の準備の時間に充てられている学校も多い。その原因としては、時間数の全体的な減少が大きな理由なのであるが、発展的学習の指導の型が存在せず、指導者に任されているのも一因であるようだ。本研究では、今回の改訂で未習事項となった図形の回転移動について発展的内容の授業の提示例となることを目指す。

2. 研究の目的・研究方法

(1) 研究の目的

本研究では、「道具を使った数学的活動」を通じて生徒たちが道具の背後にある数学史に触れ、数学への興味・関心を高めると同時に、発展的内容を学習することを目的とする。その目的を達成するために、以下の課題を設定する。

課題1：自分たちで道具を作り、その道具の仕組みや道具の生み出された背景に興味を持つことを通じて、自ら考え、探究する姿勢が生まれるかどうか。

課題2：道具の仕組みを探究することを通して、中学生の苦手意識の強い分野の1つである証明を中心とした数学的活動に興味を持って取り組む機会を提供できるか。

課題3：未習である回転移動を発展的内容として学習することができるか。

(2) 研究方法

リンク機構を教材化し、それを使用して授業を行う。授業テキスト（ワークシートを含む）とビデオカメラによる授業記録、生徒たちが毎回の授業で行う振り返り活動をもとに考察する。

3. プラジオグラフの教材化について

プラジオグラフは、1875年にアメリカのJ.J.Sylvesterによって発見されたリンク機構である。機構学においては、パンタグラフ（縮図器）の1種として分類されているⁱⁱⁱ。本論は、

シルベスターの論文「On The Plagiograph aliter The Skew Pantigraph」^{iv}を原典として用いている。シルベスターは従来の相似変換に使われたパンタグラフを変形させていくことで、回転移動や回転移動+相似変換を可能にする道具である、プラジオグラフを発見するに至った。

この道具を教材化した先行研究として、リンク機構の教材化という視点からMaria G. Bartolini Bussi & Marcello Pergolaが高校2年生を対象としたプラジオグラフの教材化の研究^vを行っている。その他、小関勝則(1998)^{vi}、が四節リンク機構の教材化を題材に、北島茂樹、坂本正彦たち(2000)^{vii}がレゴを用いて線対称、回転移動について中学1年生を対象にその効果を検証する実践報告をしている。また、川野邊晃一(2002)^{viii}は数学的活動と結びつけてLEGOを用いた授業研究を行っている。

筆者はこのプラジオグラフを初めて見た時、なぜ、このような形で回転移動の図が描けるのか大変不思議に感じた。さらに、その証明に触れ、中学生の学習範囲で十分証明が可能なのに驚きを感じた。生徒にも是非この感動を味わってほしいと考え、中学校の教材としてプラジオグラフを導入したいと考えた。ただ、中学生には証明まですべて自力で行うのは大変困難が予想される。従って、今回の授業では、図2のように、プラジオグラフの中でも正三角形と平行四辺形を組み合わせたもので、結果として60°の回転移動を描く道具を用いた。証明の際に、直観的な方向付けをやすくすることを狙ったためである。本来のプラジオグラフについては、発展として最後の時間に紹介するにとどめた。

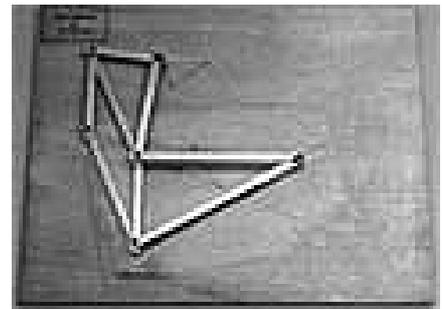


図 1 プラジオグラフ
 (<http://130.158.186.230/museum/MathematicalInstruments/macchine/00lab.htm>)

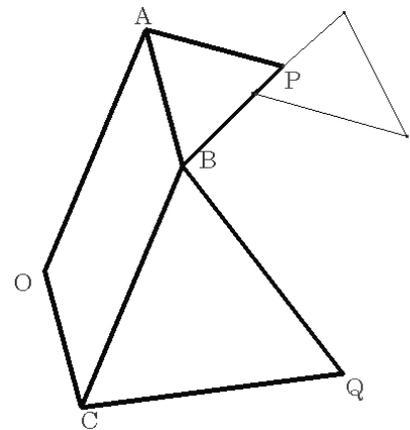


図 2

* プラジオグラフが回転変換をする証明

図3で、AOPとCQOは、 $OC=BA=PA$ 、 $AO=BC=CQ$ ・・・

$BAO=BCQ$ (平行四辺形の対角)、 $PAB=BCQ$ ・・・より、

$OAP=QCO$ ・・・

、、より2辺挟角相等で、 $\triangle AOP \cong \triangle CQO$

よって $OP=OQ$ 、 $\angle APO=\angle COQ$ (対応する辺・角)・・・

また、 $\angle OAB+\angle BAP+\angle AOP+\angle APO=180^\circ$

$\angle OAB+\angle POQ+\angle AOP+\angle COQ=180^\circ$ で、より

$\angle BAP=\angle POQ$

よって、 $\triangle POQ$ は常に一定。一定の角度($\angle BAP$ 分)と長さを保った変換なので、回転移動となる。

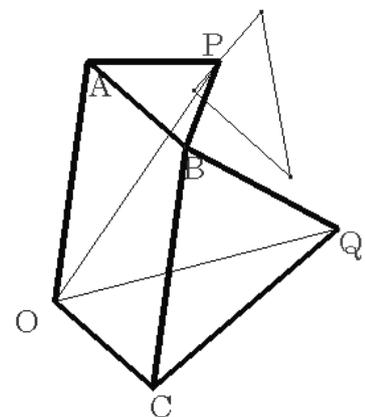


図 3

4. プラジオグラフを用いた授業概要

(1) 授業環境

日時：平成15年11月20日、27日、12月4日、11日の計4日間。(1授業50分)

対象：つくば市立谷田部東中学校 第3学年 26名

本研究は、選択数学の時間に行った。当校では、選択数学を基礎コースと発展コースに分けて実施している。この授業では、中学生にとってかなり難解な証明活動を行うことが予想されたため、発展コースの生徒たちを対象として行った。平行して、図形の相似の単元の導入として同じリンク機構の1つである、パンタグラフの授業を全6クラス対象に2時間扱いで行い、パンタグラフについての知識とリンク機構を考察する体験を全員が共有した状態で行った。

準備：テキスト、ワークシート、作図ツール(Cabri Geometry)、コンピュータ(提示用)、ビデオプロジェクター、実物投影機(ビデオカメラ利用)、プラジオグラフキット(紙製のリンク棒、割りピン、画鋏)、シルベスターの変形パンタグラフ説明用道具(黒板提示用)

(2) 授業展開

<1> プラジオグラフについて知る。(1時間目)

2人1組でプラジオグラフのキットを組み立て、何のための道具なのか考察した。数学の時間にパンタグラフによる学習を体験しているので、相似な図形が描けるのではないかと予想して取り組んでいる生徒もいる。「合同な図形が描けそうだ。」という意見はでたが、なかなか回転移動となることがみつけれない。ヒントで点Oに着目することで、ようやく「点Oの周りを描いた図形が回っている」という見方ができる。

【対話】

T：どんな図形になりましたか？

S1：合同な図形になると思います。

T：ただの合同かな？

S2：なんか・・・回ってる・・・

T：立ってみんなに発表してくれる？

S2：合同は合同なんだけど、回ってる気がする。

T：どんな風に回ってるの？

S2：わからない。

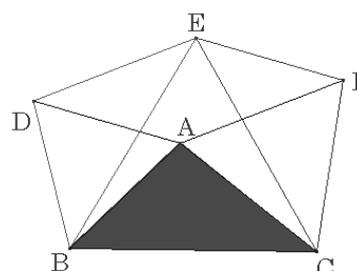
T：点Oに注目してみると・・・？

S3：あ、Oの周りを回っているんだよ。



図4 二人で息を合わせて・・・なかなかうまくかけない。

図5 宿題



上の図のように、ABCの各辺をそれぞれ1辺とする正三角形ABD, BCE, ACFをつくる。次の問いに答えなさい。

ABCと合同な三角形はどれですか。

四角形ADEFはどんな四角形ですか。

S2,S3 との対話を元にコンパスを使って図形が回転移動していることを確認する。しかしクラス全員で共有するまで至らず、一部の生徒は合同な図形になるという見方で落ち着いてしまう。カブリを使ってトレースして見せることで、回転移動になることを画面で確認した。



図 6 証明は難しい・・・

授業の最後に、次時の証明の際スムーズに図形を見る素地となるよう、2年時の教科書(大日本図書)より復習問題(図5)を宿題として考えてくるように指示した。

< 2 > 回転移動について知る・ラジオグラフで回転移動が描ける理由について考える。(2時間目)

回転移動について未習のため、回転移動とは何かをカブリの図を用いて説明した。その上でなぜ、ラジオグラフを使うと回転移動した図が描けるのか考察した。しかし、回転移動について「ある点の周りを図形が移動する」とは知ったものの、ではラジオグラフがなぜ回転移動を描くのかという問いには生徒たちは答えられなかった。即ち、回転移動と判断するための条件が生徒たちには答えられないのである。これは、回転移動について未習だったので当然といえば当然なのだが、Oの周りを図形が回転するという図形の見方ができないということだ。結局授業者が、回転移動を表すということは、「点Oからの距離がそれぞれ等しい。POQが一定である。」ということをもとめ、そのためにラジオグラフの中に合同な三角形を見つけることを指示した。APOとCOQが合同であることから、OP=OQを導き出した生徒の発表を聴いて、合同な三角形を見つけられなかった生徒もAPO COQまでを理解したところで時間切れとなった。まだ、自分たちが今している証明がなんのために行い、次にどのようにつながっていくのかという全体構造がなかなか把握できず、難儀している生徒が目立った。

< 3 > ラジオグラフで回転移動が描ける理由を証明をする。(3時間目)

時間が30分ほどしかなかったため、証明を十分に行えなかった。前回に引き続き、回転移動であるための条件についてまとめ、証明を行う。ほとんどの生徒が三角形の合同については理解した様子であった。しかし、

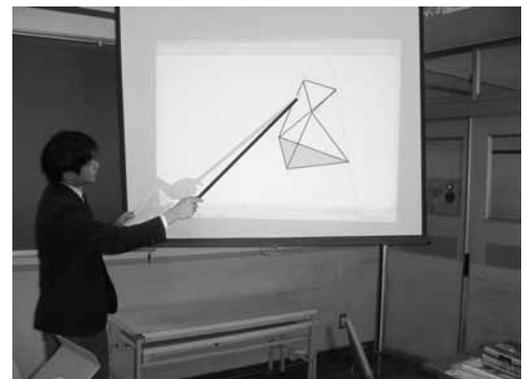
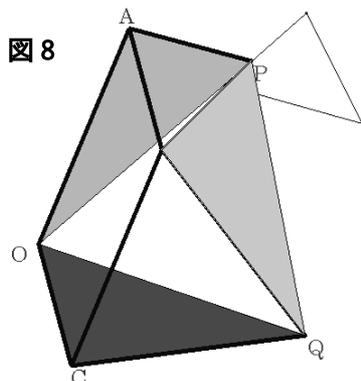


図 7 2つの三角形の合同から角POQが一定を導く



POQが一定になるとい

う部分で難儀する。わかった生徒が繰り返し画面の図

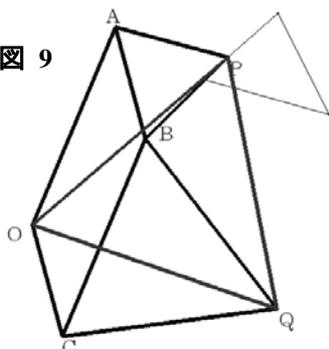
を使って説明する(図7)が、「わかった」という手応えが得られない。OAP QCOからPOQが一定だということが納得できないまま授業は時間切れとなった。

生徒の証明の方向づけには次の3つのパターンが見られた。

BPQ、APO, COQの3つの三角形が合同であることに着目して証明しようとしたもの。(図8) この発想で取り組んだ生徒は1人だった。宿題になっている問題をもとにした発想と思われる。

APO COQに着目したもの。(図8) 机間指導で、難儀している生徒にOPとOQに補助線を引くように指示したためか、多くの生徒がこの方法で取り組んだ。

図9



POQが大きな正三角形になることからPO = QOを導き、POQ = 60°であることを証明しようとしたもの。(図9) 何人かの生徒がこの図に着目していた。ただ、多くはPOQが正三角形だと証明できず、苦労していた。

授業では、このパターンで進めていき、こんな考え方をしてる人もいと、授業者から紹介した。

< 4 > シルベスターの発見について知る(4時間目)

再度、証明について復習した後、シルベスターが当時使われていたシャイナーのパンタグラフを変形させていくときに一定の角度を見出したこと、その結果をもとにプラジオグラフが生み出されたことを、シルベスターの”On The Plagiograph aliter The Skew Pantigraph”に書かれていることを原典としてカブリと黒板提示用道具を用いて追体験した。本来なら、相似条件などを利用して、シルベスターの証明まで踏み込むべきであったのだろうが、生徒たちが証明をすることで混乱したり、証明を追うことだけを目的としたくなかったので、今回はシルベスターがこの発見に至るには機構学が盛んになった時代背景が深く関係していたことを話し、シルベスターが行った証明そのものについては触れなかった。



図10 シルベスターの発見について説明

< 5 > 回轉變換がプラジオグラフの大きさにはよらないことを経験的に調べ、証明の一般性について考える。(4時間目)

リンクの長さをすべて等しくした道具にしたなら、描かれる図形はどうなるか考えてみた。予想では26人中14人の生徒が描かれる図形に変化はないと答えた。(全く異なる図形になると予想した生徒が2人、片方の正三角形が小さくなったため、描かれる図形が小さくなると予想した生徒が2人、無答の生徒が8人であった。) 道具を2種類使って描いてみて、さらにカブリの図を用いて確認した。リンクの長さを変えても正

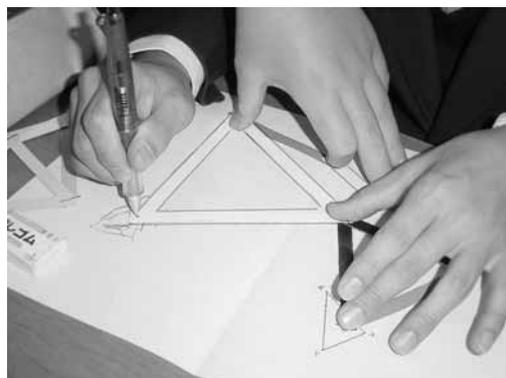


図11 重なると思うんだけど、上手く描けないなあ (2種類の道具で図を描き比べて)

三角形を保っていれば、同じ証明になり、結果同じ図が描かれることを確認。2年生で学ぶ星型五角形の頂点の角度の和がどのよう

に描いても 180° になることを想起させ、証明の一般性を導いた。証明の一般性については振り返りで 25 人中 20 人の生徒が理解できたと答えている。さらに発展として、より一般化した道具である、相似変換 + 回転移動のプラジオグラフや、 60° 以外の回転変換を行うプラジオグラフ（正三角形の部分を二等辺三角形にしたもの）について考察したかったが、時間切れとなり、紹介するにとどめた。

5. 考察

(1) 課題 1 について：「自分たちで道具を作り、その道具の仕組みや道具の生み出された背景に興味を持つことを通じて、自ら考え、探究する姿勢が生まれるかどうか。」

普段、授業の中で道具を手作りし、動かしてみることはなかなかないことである。生徒たちは、楽しそうに道具作りに取り組んでいた。授業の生徒の感想は以下のようである。

振り返りより（生徒の言葉をそのまま抜粋）

授業の感想を自由に書いてください。（1 時間目の振り返り）

「知識が増えた。」「プラジオグラフはすごいね。自分でも発見してみたい。」

「プラジオグラフを造るのはちょっと難しかったけれど、回転図なんて初めて描いたからとても楽しかった。」

「はじめはまったく意味がわからなかったけど、自分たちで発見できたことがあって楽しかった。」

「紙だからあまり動かせなかった。面白く学べた。」

「よくわかった。プラジオグラフというみたことのない初めてのことが知れてよかった。」「なんでもかいらないけどこのような図形が描けるのは不思議。」

4 時間目の授業の感想より

「証明はややこしかったけれど楽しかった。」「今までとはちがったことをやって面白い。」

「かなり難しかったけど面白かった。」「今までやったことのない問題ができて楽しかった。」

「結構難しかったけど自分で考えることができた。」

「証明は難しかったけど新しい考え方を学んだ。」「数学の深さがわかった。」

シルベスターの発見に至った方法についてどのように感じましたか（4 時間目の振り返り）

「シルベスターはすごいね。」「シルベスターさんも苦労したんだな」「自分ではなかなか思いつかないと思った。」「数学的だと思った。」「自分たちの証明はまだまだ子供だ。」

上記より、道具の仕組みや動かすことに興味を持ち、なぜなのかという探究心を高めることができたことがわかる。また、振り返りの他の記述で「プラジオグラフのような図形を描く道具はほかにもあるのか」と書いた生徒もあり、さらに探求したいという意欲が読み取れる。また、「自分たちの証明はまだまだ子供だ」という生徒の感想からは、シルベスターの証明に触れることにより、授業で受身的に取り組んでいた証明からさらに一步踏み出した証明活動へと証明のイメージをふくらませることができたことが読み取れる。

ただ、探究しようとする姿勢は生まれたものの、この後の証明の困難さに粘り強く立ち向かえなかった生徒もでた。証明のところで「わかりづらい」「証明が難しい」

という感想が数多くでてしまい、せっかくの「なぜ？」という姿勢が最後まで持続しきれなかった生徒がでたのは反省点である。また、今回私が用いた紙製のリンク棒は強度が弱く、道具が紙から浮いてしまい、正確な図を描くことが困難であった。自分たちが描いた図形は出来上がりを予想する程度で、実際はカブリのトレース機能を使って確認していく形となったのが、改善を要する点であった。

(2) 課題2について：「道具の仕組みを探究することを通して、中学生の苦手意識の多い分野の1つである証明を中心とした数学的活動に興味を持って取り組む機会を提供できるか。」

Bussi らの先行研究でこの教材は高校2年生を対象としているが、平行四辺形、三角形、合同等証明に使われる1つ1つの定理は中学校の既習内容で構成されているため、今回中学3年生で授業を試みた。通常、中学生の段階での証明活動は、1つの命題に対して証明に使用する定理が1つの場合がほとんどで、今回のように、1つの命題を証明するために、いくつもの段階をふんで証明することはほとんどない。そのため生徒たちには、最終的に証明しようとしていることと、今証明していることとの間の関係づけが上手くできずに混乱し、苦勞している場面が多々見られた。しかし、生徒たちは意外と証明活動に興味を持てたようだ。中には「規則性を見つけるのが楽しかった。」という記述も見られた。困難さを感じながらも証明活動の大切さや面白さを感じることができたことがわかる。生徒たちの声は以下のようなものである。(前述の振り返りの4時間目の感想も参考にしてほしい。)

振り返りより(生徒の言葉をそのまま抜粋)

授業のどのようなところに興味を持ちましたか。(回答22名)

興味をもてる場所があった	20名	興味を持てなかった	2名
(内訳) 道具に興味を持った	・・・8名	(理由) 難しかったから	・・・1名
証明に興味を持った	・・・6名	なんとなく	・・・1名
移動に興味を持った	・・・2名		
記述なし	・・・4名		

4日間の授業を受けて自分にとって大事だと思ったことを書きましょう。

「小さな証明を重ねればむずかしいものもできる。」

「面倒くさがらずに証明をやること。」

「図形を描くだけでなく、なぜ図形が描けるかの証明も大切だと思った。」

「いろいろ考えてみること・やってみること。」

「プラジオグラフの証明」「発想の転換」「難しいけど証明できたこと。」

「今まで勉強した図形の性質を使って何が考えられるかということ。自分で発見し、考えること。」
「数学のいろいろな考え方」「集中力・気合い」

「小さな証明の積み重ねが大事なんだと思った。」

このような証明には普段ついていけない生徒も、最後までねばり強く取り組めた理由は道具にあると考えられる。生徒の目標は、「数学の練習問題を解くこと」ではなく、「リンク機構(プラジオグラフ)の仕組みを明らかにする」ということだった。

前の課題1で述べたように、はじめの「なぜ？」という疑問の気持ちだけでは乗り越えられなかった部分を「を明らかにする」という目標で引き継いだといえよう。これは、まさに文科省のいう、数学的活動にほかならないと考える。達成感を十分感じてもらうためにも、証明を助ける手立てにもう一工夫必要であったという反省と同時に、数学的活動に興味を持って取り組む機会を提供できたという実感を持てた。

(3) 課題3について：「未習である回転移動を、発展的内容として学習することができるか。」

生徒たちは今回、プラジオグラフを通して、回転移動について学習した。振り返りに記入した生徒23人中の17人が回転移動について理解できたと答えており、14人が回転移動の条件について理解できたと答えている。それ以外の生徒でも、プラジオグラフの特徴として回転移動をすることが理解できた生徒が20人であったことを考えると、未習事項を学習できたと考えられよう。

学習指導要領によると、「(今回の改訂で) 図形の平行移動・回転移動・対称移動などの用語は扱わないが、小学校での学習や日常生活の中で図形を「ずらす」「まわす」「裏返す」などの操作を自然と行っており、これによって形が変わらないことを認めている。」^{ix}という記述がある。確かに今回、図形が合同であることを直観するのに時間はかからなかったため、小学校段階の図形の見方はクリアしている。しかし、図形を構成する点がすべてOの周りを同じ角度で回っていることや、図形を構成する点と回転の中心との距離が移動前と移動後で同じになるといった見方はできないのである。ここまで見方を引き上げないと証明まで持って行くことはできない。回転移動を知るといえることは、その条件を知り、条件に沿って図形見ることができるといえることなのである。今回、道具の仕組みを探究することを通じて、生徒たちは回転移動について既習の発展として考察することはできなかった。また、宿題から発展させて道具の動きについて探究できた生徒が1人しかいなかったことから、既習内容の発展として道具を探究することができた生徒もほとんどいなかったことがわかる。しかし一方で、生徒たちは新しい図形の見方を体験し、学ぶこととなった。これは選択学習の目的の1つである発展的内容にふさわしいものであると考える。Bussiの研究では、さらに多くの設問がなされ、リンクの中の動点についての考察が求められ、グループに分かれて討論する形で授業が進行していく。中学生の段階ではまだ、そこまでは難しいであろうが、グループ学習など意見交換を通してお互いの考えを深め合う活動を取り入れることで、さらに効果的な数学的活動が可能となる。

授業の反省としては、普段より複雑な証明と、新しい知識の獲得を同時に狙ったために困難を感じてしまった生徒も多かったということが挙げられる。また、発問を工夫することで既習内容からの発展なのだという意識を高めることができたのではないかと考える。未習事項を発展的内容として扱う時には段階的な指導を工夫して計画するのが大切であることがわかった。

6. おわりに

リンク機構に代表される道具を教材として、授業の中に探究活動を取り入れることが、生徒の意欲を高め、数学と向き合う気持ちを高めること、生徒の内にある数学の幅を歴史の軸を導入することで広げられることが確認できた。それは、ワーチ的な見方をすれば、媒介手段としての道具を導入することで、教科書を学ぶ数学から、自ら探究し、その過程で数学を学ぶという認識の枠組みを変えることを意味する。

また同時に、発展的内容の扱いには段階的に指導していくための十分な準備が必要であり、そうすることで、生徒のねばり強く考える姿勢、自ら課題を発展させていく力が高まることがわかった。選択の授業だけでなく、普段の授業の中にもこのような数学的活動を取り入れることで活性化される場面が多々考えられる。そしてそれを実現するには、私たち教師自身に、数学史的な教養を持って教科書をもう一度別の視点で眺め直すことが要求されるということを痛感した。

謝辞) 授業研究の実施に際して、つくば市立谷田部東中学校の杉田慶也先生・石川泰隆先生をはじめ、数学科の諸先生方には多大なるご協力と共に、貴重なご意見・ご指導を賜りましたことをこの場を借りて厚く御礼申し上げます。

注) 本研究は、平成 15 年度科学研究費、特定領域研究(2)課題番号 15020214「数学用機械とJAVAによる移動・変換と関数・微積分ハンズオン教材のWEB化研究」(研究代表者磯田正美)において開発された歴史的道具を前提にして、平成 15 年度科学研究費、基盤研究(B)(2)課題番号 14380055「数学の文化的視野覚醒と新文化創出のための教材・指導法開発研究」(研究代表者磯田正美)の一環として行われた。

ⁱ 磯田正美(2003). なぜ道具を数学教育で活用する必要があるのか. *日本数学教育学会第36回数学教育論文発表会「課題別分科会」発表収録* pp.246~249

ⁱⁱ 文部省(1999). 中学校学習指導要領解説 - 数学編 -. 大阪書籍株式会社. p.14

ⁱⁱⁱ 「新編 機械の素」機械の素復刊委員会編 理工学社(1966) p.86

^{iv} J.J.Sylvester(1895). On The Plagiograph aliter The Skew Pantigraph. *Nature*,12 pp.214~216

^v Maria G. Bartolini Bussi & Marcello Pergola(1996). History in the Mathematics Classroom: Linkages and Kinematic Geometry. *Studien zur Wissenschafts-, Sozial- und Bildungsgeschichte der Mathematik Band 2*.

Maria G. Bartolini Bussi(1993). Geometrical Proof and Mathematical Machines an Exploratory Study *Psychology of Mathematics Education:PME XVII, July 18-23*, pp.430~437

^{vi} 小関勝則(1998). 4節リンク機構における曲線の探究~LEGO dactaと作図ツールを用いた他教科との関連教材. *中学校・高等学校数学化教育課程開発に関する研究(5)*, 筑波大学数学教育研究室. pp.212~218

^{vii} 広井徳文、北島茂樹、坂本正彦(2000). 回転作図器の授業におけるレゴの効果に関する一考察 - LEGO dactaを利用した平面図形の探究活動 -. *中学校・高等学校数学化教育課程開発に関する研究(7)*, 筑波大学数学教育研究室. pp.89~100

小島泰一、北島茂樹、坂本正彦(2000). 線対称作図器の授業に関する一考察 - LEGO

dacta を利用した平面図形の探究活動 - . 中学校・高等学校数学科教育課程開発に関する研究(7), 筑波大学数学教育学研究室 . pp.101 ~ 108

viii 川野邊晃一(2003). 数学的活動を活かした図形指導に関する研究 ~ 対称図形作図器 (LEGO) を利用した発展的な学習を通して ~ . 中学校・高等学校数学科教育課程開発に関する研究(10), 筑波大学数学教育学研究室 . pp.220 ~ 252

ix 文部省 (1999). 中学校学習指導要領解説 - 数学編 - . p.78

上記以外の参考文献

磯田正美(2000). 道具が媒介する図形における「観察・操作・実験」型探究の楽しさ . 教育科学数学教育 No.510, 明治図書 . pp.9 ~ 13

磯田正美(2002). 解釈学から見た数学的活動論の展開 人間の営みを構想する数学教育学へのパースペクティブ - . 筑波数学教育研究 第21号

J . V . ワーチ (2002). 行為としての心 . 佐藤公治、田島信元、黒須俊夫、石橋由美、上村佳世子訳 , 北大路書房 .

http://130.158.186.230/museum/MathematicalInstruments/macchine/_00lab.htm