

授業資料 2 日目

古代への旅

2 時間目 ~ 四角数とピタゴラス数 ~



3 年 組 番 名 前

授業者：筑波大学修士課程教育研究科

数学教育コース 1 年 林 亜規子

前回の復習

- ・ インドの文献『シュルバーストラ』 縄だけで長方形が作図できる。
- ・ **ピタゴラス数**………**三平方の定理を満たす 3 つの自然数の組。**
例：(3,4,5) $3^2+4^2=5^2$ 、(5,12,13) $5^2+12^2=13^2$
- ・ ピタゴラス数や三平方の定理が、古代の世界各地で発見され利用されていた。

今日は、四角数を探究していくことによって、古代の人々のものの考え方を探っていきたいと思います。

1. ピタゴラス

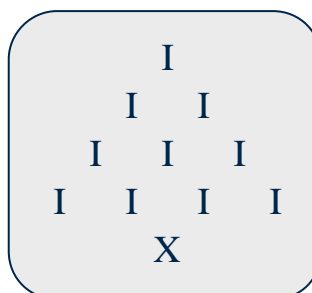
ピタゴラス

- ・ 紀元前 570 年代～前 490 年代の人物。
- ・ ギリシアのサモス島に生まれた。
- ・ 紀元前 532 年に南イタリアのクロトンに移住し、学校を創設し、算術・幾何・天文・音楽の四科目を教えた。
- ・ 数学者、哲学者、音楽家、天文学者。
- ・ 「万物は数である」を根本思想として、**ピタゴラスの定理・ピタゴラス音階・完全数・図形数** について数々の功績を残した。



ピタゴラス自身は著作を残しておらず、現代に伝えられている物は、実はすべてピタゴラス学派（ピタゴラスの教えを信じる人々）によるものです。そのためどれがピタゴラス自身の発見であるのかは分かりません。（前回学んだピタゴラスの定理も！）しかし、数々の成果を残したピタゴラス学派の創始者として、ピタゴラスの功績は多大であったと思われます。

ピタゴラスを含め、古代ギリシア人はみな数を図形として捉え、理解していました。その特徴を非常によく表しているものが「**図形数**」という考え方です。図形数には**三角数**（右図：表紙の黒板に書いてある絵）や**四角数**というものがあり、今回は四角数について学んでいきます。その前に、数を図形で捉えて理解するとはどういうことなのかを知るため、まずは古代の人の考え方に触れてみましょう。

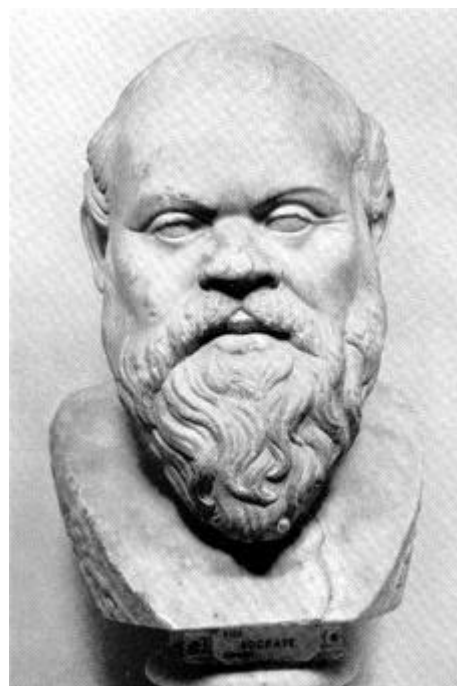


2. 古代の人の考え方

古代の人の考え方に触れるため、もう一人、古代の有名人を紹介します。

ソクラテス

- ・ 紀元前 469 年～ 399 年の人物。
- ・ ギリシアのアテナイに生まれた。
- ・ 政治家、哲学者、数学者。
- ・ プラトンの師。
- ・ 「無知の知」
- ・ 「国の認める神々を認めず、青年に害毒を与える」というかどで告発、死刑を求刑される。友人たちの国外逃亡のすすめをしりぞけ続け、毒杯を仰いで刑死した。（70 歳で死去）



ソクラテスもまた、自身の著作を残しませんでした。しかし、彼の弟子であったプラトンは、ソクラテスを主役とする、ソクラテスと当時の哲学者たちとの対話集をたくさん残しています。その膨大な対話集から、当時の人々の考え方を垣間見ることができます。

では、プラトンの残した、ソクラテスの対話を見てみましょう。

テアイテス 数を全体として私たちは二つに分けました。その一つは、等しいものの掛け合わせとなることができるもので、図形でいえば正方形に比すべきものとしまして、これを私たちは正方形数とか等辺数などという名前と呼ぶことにしました。

ソクラテス うん、それはまたうまい呼び方だ。

テアイテス 次はその中間にはさまれている数で、そのうちには 3 もありますし、また 5 もあります。つまり等しいものの掛け合わせとなることができず、あるいは大きい数に小さい数を掛けたものとなり、あるいは小さい数に大きい数を掛けたものがすべてそうなのでして、これを囲む辺は常に一方が大きくて、他方が小さくなるようなものなのですから、これを別にまた私たちは長方形に比すべきものとして、長方形数と名づけました。

(『プラトン全集 2 テアイテス』より抜粋)

テアイテスは、一体何を言っているのでしょうか？ 読み慣れない文章ですが、よく味わって考えてみてください。

(Hint. テアイテスは、ここでは自然数を分類しています。)

では、

Question 1 .

「等しいものの掛け合わせとなることができるもの」

「図形でいえば正方形に比すべきもの」

「正方形数」 「等辺数」

とは、どんな数でしょう？

Question 2 .

「その中間にはさまれている数」 「3 や 5」

「等しいものの掛け合わせとなることができない」

「大きい数に小さい数を掛けたものとなり、あるいは小さい数に大きい数を掛けたものすべて」

「これを囲む辺は常に一方が大きくて、他方が小さくなるようなもの」

「長方形に比すべきもの」 「長方形数」

とは、どんな数でしょう？

実は、テアイテトスがこの時行っている行為、これこそがまさに数を図形として捉え、理解するという行為なのです。

このような考え方は現代の我々にとって非常に奇妙に思えますが、当時のギリシアでは至極当然のものとして扱われていました。古代ギリシアの知識人たちにとって、数を図形で捉え、理解するという考え方は、王道であり、そのような考え方ができることは常識でした。

今の私たちは、もちろんこのような考え方、表し方はしません。例えば、正方形数などと言わずに、 n^2 と表すと思います。

どちらが分かりやすい、あるいは理解しやすいでしょうか？

おそらく現代の考え方でしょう。

では、なぜわざわざ n^2 のように簡単に表さずに、正方形数などと面倒な表し方をしたのでしょうか？

それは、この時代はまだ文字で表す習慣がなかったからなのです。

「正方形数」を考えると、文字で表すことができない、それは転じて、図形数でないとは表せない、図形数でしか考えられないということになります。

当時の人々にとって、図形数は常識でもあり、また唯一の考え方でもあった！！

3. 四角数

・・・の前に

正方形数

前の章で皆さんが発見したとおり、正方形数とは「等しいものの掛け合わせ」、つまり $1=1\times 1$ 、 $4=2\times 2$ 、 $9=3\times 3$ など、同じ数を掛け合わせてできる数のことでした。そして、テアイテスが正方形数あるいは等辺数と定義したこれらの数が、現代では**四角数**あるいは**四角形数**と呼ばれているものなのです。

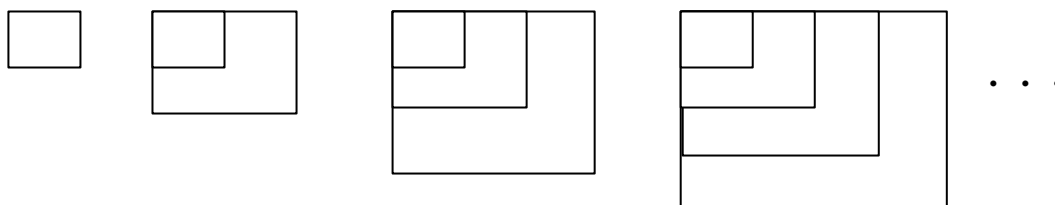
ピタゴラスは丸い小石を並べて、四角数を探究しました。そして、あることを発見したのです。

その「あること」を、今回の授業で皆さんにも発見してもらいます。

4. 四角数の特徴

まずは、実際にピタゴラスと同じように、四角数を作ってみましょう。(皆さんが並べるのは小石ではなく、おはじきです。)

1つ目のおはじきから始めて、周り2辺に順々におはじきをつけて並べていくことによって、四角数を図形的に捉えることができます。(周り2辺につけて並べるL字型に並べられたおはじきを、**グノモン**といいます。)



上のように四角数は順々に作っていくことができます。色部分がグノモンです。

「グノモン」はとても古い言葉であり、本来は「日時計」の意味や、大工道具のL字型の定規である「曲尺(かねじゃく)」の意味で使われていました。

左から順に 1 つ目の四角数、2 つ目の四角数、・・・と呼ぶことにすると、

Question1. 順々に足していくグノモンは、何個のおはじきからできていますか？

(1 個から) ____ 個、 ____ 個、 ____ 個、・・・
1 から始まる ____ の列をつけていっている。

Question2. それぞれの四角数は全部で何個のおはじきから作られていますか？

(1 個から) ____ 個、 ____ 個、 ____ 個、・・・

Question3. どんどん作っていったら、(例えば n 個目の四角数について) 上の Question2. の答はどうなりますか？

Question3. の解答

よって、 n 個目の四角数は ____ 個のおはじきからできている。

上の Question 1 ~ 3 を合わせて考えると、1 から始まる ____ の列をつけていく、つまり足していくと、その四角数の 1 辺を作っているおはじきの個数の ____ になっていることが分かります。

また、1 つ目のおはじきにグノモンを順々に足していくことで四角数ができていることから、

式 : _____

で表せることが分かります。

5. 四角数の探究

- ・ところで、4 個目の四角数を作って注目してみてください。
この四角数は_____個のおはじきからできています。
- ・そして、一回り大きい5 個目の四角数を作って注目してみてください。
この四角数は_____個のおはじきからできているグノモンを足すこと
によってできています。また、この四角数は全部で_____個のおはじ
きからできています。

さあ、これらの四角数とグノモンの関係を見て、ピタゴラスの発見した「ある
こと」を、みなさんも発見できるでしょうか？

分かったこと

6. 本日のまとめ

7. 次回は・・・

「ピタゴラス数をもっと見つけられないかな？」ということ調べていきたく
いと思います。