

# 数学史とそれにちなんだ道具を用いた授業研究

## 「クロススタッフ」を題材として

筑波大学大学院修士課程教育研究科

御子柴俊一

### 章構成

1. はじめに
2. 研究目的・研究方法
3. 「クロススタッフ」の教材化
4. 「クロススタッフ」の数学的解説
5. 「クロススタッフ」の授業概要
6. 議論
7. おわりに

### 要約

本研究では、数学史とそれにちなんだ道具を用いた授業によって生徒が数学を人の営みとして捉え、数学への興味・関心をもち、創造性の基礎を培うことができるかを考察した。今回行った授業の中で生徒は、原典解釈と実際道具を使う数学的活動を通して、道具に数学が盛り込まれていることに気づき、数学を人の営みとして捉えることにより、数学に興味・関心をもち、創造性の基礎を培うことができた。

**キーワード：**数学的活動、数学史、道具、クロススタッフ

## 1. はじめに

文部省(1999)は高等学校学習指導要領解説の中で、高等学校における数学教育の意義の一つとして、「数学を用いた他者とのコミュニケーションを通して、客観的・論理的に物事を説明できる力が育成される」ことを挙げ、「このような力は、国際化や情報化が進展する今日のような時代においてとりわけ重要な能力である。」(1999,p.20)としている。しかしながら、「高等学校では、数学に興味・関心等をもたない生徒が少なからずいることも事実である。」(1999,p.21)と指摘している。それを受けて「今回の改訂では数学を学習する意義、数学的な見方や考え方のよさ、数学の美しさ、文化や社会生活において数学が果たしている役割などを理解させることにより、数学への興味・関心をもたせ、学習への意欲を高めることを大切にし」、「数学的活動を通して創造性の基礎を培うという視点を重視した。」(1999 p.21)としている。

これらの記述に対して、筆者は「客観的・論理的に物事を説明できる力」に着目した。その育成のために、まずは数学への興味・関心をもたせることが第一段階であると考えた。その上で「数学的活動を通して創造性の基礎を培う」ことが次の段階であり、これが「客観的・論理的に物事を説明できる力」の育成につながると筆者は考えている。

文部省(1999)は数学への興味・関心をもたせるために、「文化や社会生活において数学が果たしている役割」の理解を挙げているが、それに対し礪田は「実際の歴史上の原典を開

き、その原典を記した人の立場や考えを想定し、その人の心情を重ねて解釈すると、今、自分たちの学ぶ数学が、異なる時代・文化背景に生きた人々によって、まるで異なる思考様式で研究され、表現されていたことが体験できる。それによって自分たちが学ぶ数学も生き生きとした人間の営みとして改めて認めなおせるのである。」(2002a, p.9-10)と、数学史原典解釈を数学教育の中に入れる意義について述べている。また磯田は「道具を実際に利用してみると、人は、その道具の開発者・利用者が何故それを用いたのか、彼らが実際どのように考えたのかを知るきっかけをえることができる。」(2003, p249)と述べている。これらのことから数学史とそれにちなんだ道具を授業に取り入れることで、生徒が数学への興味・関心を持つことができると考えられる。

また、数学史とそれにちなんだ道具を用いた授業の先行研究として、諏佐(2004, p.94)はガリレオの比例コンパスを題材として、「数学史とそれにちなんだ道具を用いることによって、創造性の基礎を培うことができる。」と述べている。比例コンパスには何種類もの目盛りがあり、目盛りの取り方自体に多くの数学が含まれているが、筆者が取り上げるクロススタッフは道具そのものが極めて単純な構造である点が異なっている。また、道具が単純なため、生徒は取りかかりやすいと考えられる。また、会田・磯田(2004)が、クロススタッフの魅力と工夫について述べている。他には、丸山(2004)が福田理軒の進退法を題材とした授業で、生徒の興味関心を高めることができたと報告している。これと類似した進退法がクロススタッフで測量を行う際にも利用される。

以上のことから、クロススタッフを題材として、数学史とそれにちなんだ道具を用いた数学的活動を中心とした授業を行った。

## 2. 研究目的・研究方法

### (1) 研究目的

数学史とそれにちなんだ道具を題材とした授業を行うことで、生徒が数学を人の営みとして捉え、数学への興味・関心をもち、創造性の基礎を培うことができるかを考察する。

目標達成のため以下の課題を設定する。

課題1：原典解釈および、実際に使ってみることで道具の構造・原理を理解し、道具の中にある数学を見出し、数学を人の営みとして捉えることができるか。

課題2：課題1の達成により、創造性の基礎を培うことができるか。

### (2) 研究方法

数学史とそれにちなんだ道具を用いたオリジナルの教材を作成し、授業を行う。その授業のビデオと事前・事後のアンケートに基づき考察する。

## 3. 「クロススタッフ」の教材化

本授業研究で題材とするクロススタッフは、距離、物の大きさや、太陽の高度などの角度を測るための道具である。クロススタッフはもともと、紀元前400年ころにカルデアの天文学者が使用していたと言われている。1328年にカタロニアのユダヤ人 Levi ben Gerson がクロススタッフについての最初の記述を残している。本授業研究では、Levi ben Gerson の著書のラテン語訳 *Milhamot adonai* の英語訳 *The Wars of the Lord* の chapter7 の一部を原典

として扱う。

クロススタッフは、大航海時代には海上での使用が盛んに行われていたため便宜上目盛りの取り方が工夫されていたが、Levi の記述したクロススタッフには、等間隔の目盛りのみしか使われていない。したがって見た目の構造は極めて単純である。このような単純な道具の中に数学が用いられていることに気づくことで、より一層数学への興味・関心を喚起することができると考え、本授業研究の題材とした。

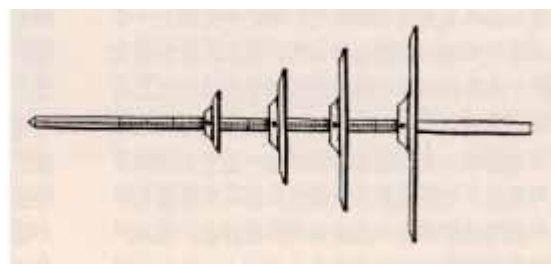


資料 1：Milhamot adonai

#### 4. 「クロススタッフ」の数学的解説

クロススタッフを用いて、長さや角度を測ることができる。以下で順に解説する。まず、目盛りの取り方を解説する。クロススタッフは、スタッフと呼ばれる長い棒を、プレートと呼ばれる板に通したものをいう。スタッフには等間隔も目盛りがつけられている。Levi の記述によると、スタッフの長さは  $6\text{span}$ (約 138cm)である。そのスタッフに、 $1\text{span}$  ごとに等間隔の目盛りをつける。さらに、各  $\text{span}$  を 8 等分し、そのひとつひとつを  $\text{unit}$  と呼ぶ。さらに、 $\text{unit}$  を 60 等分する。プレートは、 $24\text{unit}$ ,  $16\text{unit}$ ,  $8\text{unit}$ ,  $4\text{unit}$ ,  $2\text{unit}$  のものを角度の大きさによって使い分けていた。目盛りは等間隔にとれば構造上の問題はないので、生徒にはスタッフを縮小し、 $\text{unit}$  より小さな目盛りを省略したものを配布した。

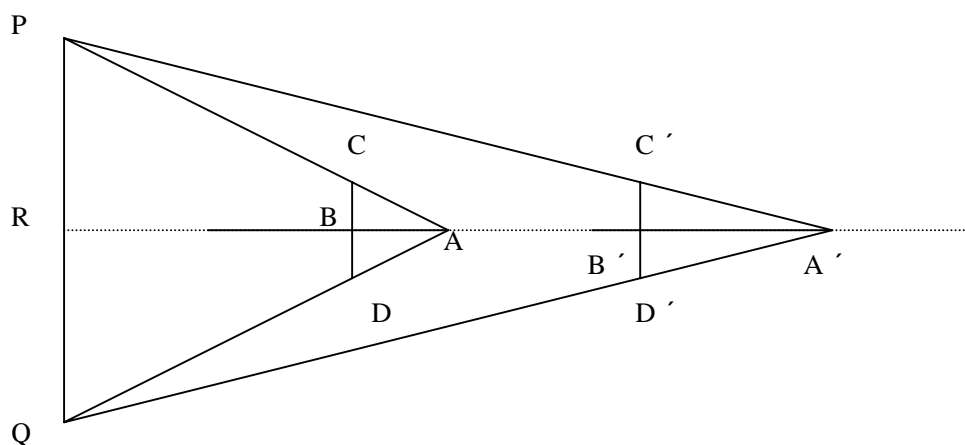
プレートは  $16\text{unit}(2\text{span})$ のみ扱った。また、Levi は人間の視覚の中心は個人差はあるがおおよそ、目の表面から  $1/20\text{span}$  であることを見いだしていたので、観測者の側を  $1/20\text{span}$  切り取ったスタッフを用いていた。



資料 2：クロススタッフ

##### (1) 長さについて

長さを測るときには、 $\text{span}$  の目盛りを使う。まず、プレートを目から  $2\text{span}$  のところに置く。スタッフを水平に持って測りたいものとプレートを同時に見ながら、測りたいものがちょうどプレートに隠れる位置まで移動する。その位置で、プレートを  $4\text{span}$  のところに置く。再び、測りたいものとプレートを同時に見ながら、後ろに下がっていき、測りたいものがプレートに隠れるところに止まる。このとき、後ろに下がった距離と測ったものの長さが等しくなっている。



資料3：進退法の証明に用いた図

(証明)

後ろに下がる前のクロススタッフを ABCD、後ろに下がった後のクロススタッフを A' B' C' D' とする。測る長さを PQ とし、PQ の中点を R とする。このとき、 $AB:BC=2:1$  より、 $AR:PR=2:1$  ……

このことから、 $PQ=AR$  ……

また、 $A' B':B' C'=4:1$  より、 $A' R:PR=4:1$ 。……

、 から、A は A' R の中点であり、このことと から、 $PQ=AA'$

## (2) 角度について

角度を測るときには、すべての目盛りを使う。まず、観測する場所を決めたら、長さを測るときのように動かない。その場所から測りたい 2 つのもの(星など)とプレートの両端がちょうど重なるところまで、プレートを動かす。このとき、プレートの端から観測者の目までの距離を三平方の定理で計算する。この結果を corrected radius という。プレートの長さ常に 16unit だが、同じ比で、プレートの端から観測者の目までの距離を 60 としたときのプレートの長さを計算する。この結果を corrected chord という。プトレマイオスの弦の表から、corrected chord に近い値を探す。これに対応する角が、観測者の目を中心とした、2 つのものなす角である。

弧	弦	差の 1/30
23° 0'	23° 55' 27"	0° 1' 1" 33"
23 30	24 26 13	0 1 1 30
24 0	24 56 58	0 1 1 26
24 30	25 27 41	0 1 1 22
25 0	25 58 22	0 1 1 19
25 30	26 29 1	0 1 1 15
26 0	26 59 38	0 1 1 11
26 30	27 30 14	0 1 1 8
27 0	28 0 48	0 1 1 4
27 30	28 31 20	0 1 1 0
28 0	29 1 50	0 1 0 56
28 30	29 32 18	0 1 0 52
29 0	30 2 44	0 1 0 48
29 30	30 33 8	0 1 0 44
30 0	31 3 30	0 1 0 40
30 30	31 33 50	0 1 0 35
31 0	32 4 8	0 1 0 31
31 30	32 34 22	0 1 0 27
32 0	33 4 35	0 1 0 22
32 30	33 34 46	0 1 0 17
33 0	34 4 55	0 1 0 12
33 30	34 35 1	0 1 0 8
34 0	35 5 5	0 1 0 3
34 30	35 35 6	0 0 59 57
35 0	36 5 5	0 0 59 52
35 30	36 35 1	0 0 59 48

資料4：プトレマイオスの弦の表

## 5. 「クロススタッフ」の授業概要

### (1) 授業環境

日時：平成16年10月21日、22日、25日、26日 (65分×3時間)

対象：埼玉県立高校 第二学年

準備：コンピュータ(Windows)、作図ツール(Cabri Geometry)、Microsoft Power Point、Microsoft Visual Basic、プロジェクタ、実物投影機、デジタルビデオカメラ、クロススタッフ(実物大教師用と縮小版生徒用)、長さを測れるひも、事前・事後アンケート、授業資料等

### (2) 授業展開

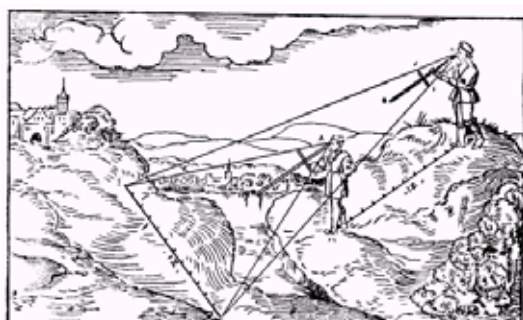
1時間目

#### 【ねらい】

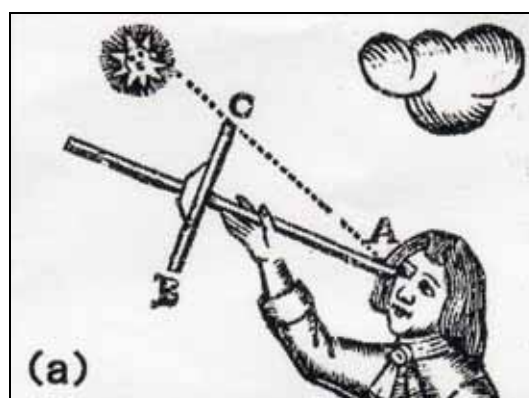
クロススタッフを実際を使って物の大きさ(友達の身長)を測ることにより道具のよさを感じる。また、なぜクロススタッフで物の大きさや距離が測れるかを、証明によって確かめることによりクロススタッフに数学が盛り込まれていることに気づく。

#### 【授業の流れ】

まず始めに何の説明もなく、下の資料5と資料6をスクリーンに提示した。



資料5：長さを測っている絵



資料6：太陽の高度を測っている絵

教師：この2つの絵を見てください。この絵を見て気づいた点をあげてみてください。

(しばらく生徒に考える時間を与える。)

生徒1：なんか、角度を測っているように見えます。

生徒2：右の絵は太陽の高度を測っているように見えます。

生徒から、左の絵が長さを測っている様子だという意見が出なかったため、教師が説明した。

次に、クロススタッフの歴史を説明した。クロススタッフは、紀元前4世紀ころから天文学者に使われていたこと、1328年に Levi ben Gerson によって初めて記述され、16世紀ころから海上使用が盛んになった。

クロススタッフを使うと、先にでてきた資料5、資料6で見たように長さや角

度が測れそうだとことを確認した。今日の授業では長さについて調べていこうということで、進退法による長さの測り方を実際に一人の生徒(希望者)の身長を測りながら説明した。

その後、進退法はどのような状況で有効かという発問をした。生徒側からは、「高いものを測るとき」などの意見が出た。それぞれホワイトボードに絵を描きながら説明するように指示した。補足として、直接測りに行けない場所で有効であることを教師が付け加えた。

次に、生徒に配布していただいたクロススタッフを使って友達の身長を測る活動を行った。測り終わった後に、結果を発表し、実際の身長と大きく異なっている生徒には、原因を考えるよう指示した。スタッフの先を体の中心に向けていなかったために結果に狂いが生じた生徒が多く見られた。測っている途中で「スタッフはどこに向ければいいんですか」と質問してきた生徒がいたので、「測りながら自分で考えてみよう」と、その場では答えておいた。

最後に、進退法で長さが測れる理由を、Cabri の図を使いながら証明し授業を終えた。

2 時間目

【ねらい】

原典解釈によって、当時の角度の測り方を学び、今の数学との違いに気づく。

【授業の流れ】

まず、1 時間目と同じ資料 5 を見せて、この絵が太陽の高度を図っているところであることを確認した。

次に原典を読み、クロススタッフの大きさ、スタッフの目盛りの取り方を確認した。その中で、unit を 60 等分してその目盛り一つ一つを minute と呼ぶという内容の記述が出てきたので、当時は数値を 60 進法で表していたことを説明した。また、観測者の目の側が  $1/20$ span 小さい理由を、生徒の意見を聞いた後に Cabri で説明した。

次に原典からクロススタッフを使って角度を測る方法を読み取った。測りたいものがプレートの両端にあたるように、プレートを動かすこと、距離を測るときはプレートを固定して自分の足を動かしたが、角度の場合は観測者は立ち止まったまま、プレートを動かすことを確認した。



写真 1: 身長を測っている様子

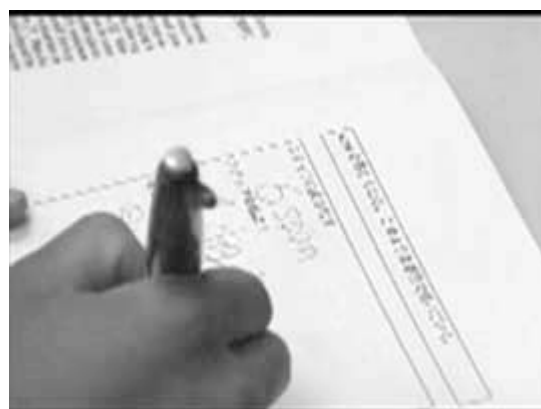
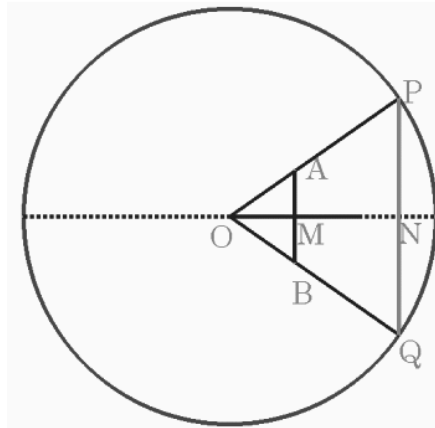


写真 2: 原典解釈をする様子

ここでプレートの位置の目盛りを読み取り、corrected radius、corrected chord を計算して、プトレマイオスの弦の表で角度を調べるという方法を説明した。このとき、corrected radius、corrected chord とはそれぞれ何かという発問をしたが、理解できていた生徒は非常に少なかった。その後、教師が決めた具体的な数値で corrected radius、corrected chord 計算し、角度を調べた。



資料 7: corrected chord の説明に用いた図

最後に、corrected radius、corrected chord の計算の中で平方根の計算が必要であることを確認し、当時は計算機がなかったことから、開平法を用いていたと予想されるため、開平法の計算方法を説明した。開平法の計算問題を宿題とした。

### 3 時間目

#### 【ねらい】

原典解釈とクロススタッフを使って実際に角度を測る活動を通して、数学を人の営みとして捉える。

#### 【授業の流れ】

最初は 2 時間目の復習から始めた。まずは、開平法の計算方法をもう一度説明して、練習問題を解いた。開平法は教育課程に含まれていないため、ほぼ全員が初めて見るものだったので、苦労している生徒が多かった。

次に、角度の測り方を復習した。これも、2 時間目で原典を読む過程で、原典の長さや難しさに苦労した生徒が多く、説明しただけでは理解できて

いない生徒が多くいたが、この後の実際に測る活動の中で理解することを期待して、次に進めた。次にクロススタッフで角度を測る活動を行った。教室のホワイトボードの両端にあらかじめ角度を測る対象物を貼っておき、一人一人が教室内の自分で決めた場所からクロススタッフを通して対象物を覗き、対象物がちょうどプレートの端に重なるところのスタッフの目盛りを記録した。



写真 3: 道具と見比べて原典解釈をする様子

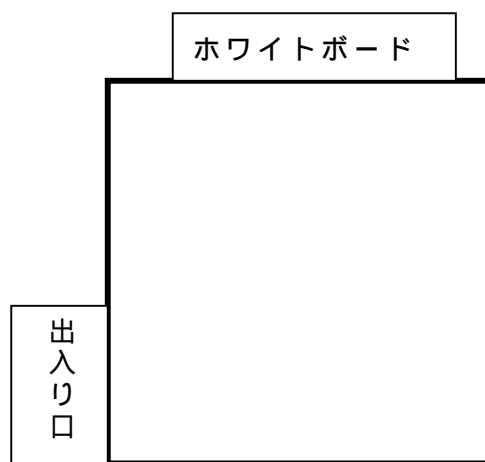


写真 4: 開平法の発表をしている様子

スタッフの目盛りをもとに、corrected radius、corrected chord を順に計算し、それをもとにプトレマイオスの弦の表で角度を調べた。個々の生徒が計算した corrected chord を、筆者が Microsoft Visual Basic で作成したソフトで確認した。

次に再び図 を見せ、この方法で太陽の行動を測った場合に問題がないかという発問をした。

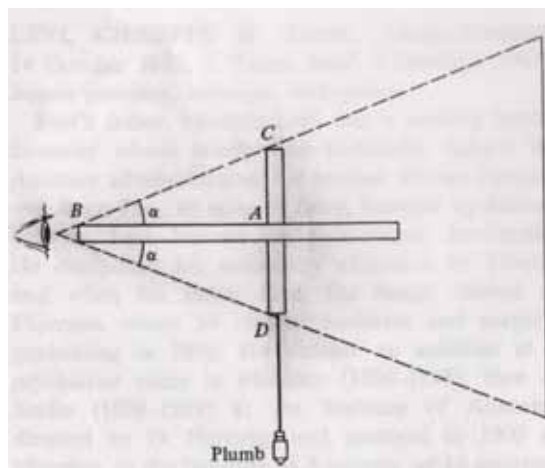
その後、図の方法だと水平線がわかりにくいことを教師側から指摘し、解決方法を Levi の原典から解釈した。プレートにおもりを付けて鉛直方向に垂らすことにより、スタッフを水平方向に向けて、太陽の高度 を測るのに、 $2\alpha$  を求めてからそれを  $1/2$  倍する方法を説明した。



資料 8：観測点を記録する図



写真 5：角度を測っている様子



資料 9：おもりを付けたクロススタッフ

最後にまとめとして、クロススタッフで長さや角度が測れること、相似・三平方の定理、弦の表などの数学が使われていることを確認した。クロススタッフは単純な道具だが、John Davis がこの計器によればいかなる不確かさも含まれないとし、「船乗りにとってはクロススタッフにかわる他のいかなる計器もありえない」と述べたことを説明した。単純なのに不確かさがないのは、この道具に数学が活かされているからである、ということで授業を終えた。

## 6 . 議論

### ( 1 ) 課題 1 に対する議論

課題 1：原典解釈および、実際に使うことで道具の構造・原理を理解し、道具の中にある数学を見出し、数学を人の営みとして捉えることができるか。



事後アンケート：昔の人が書いたことを読む必要性、授業の感想に対する生徒の答え（生徒の記述をそのまま抜粋）

昔の人は計算機もないのにクロスとかいろいろなものを駆使して物を測っていたことはすごいと思いました。

学校の授業で学ぶことのないことを学ぶことができました。クロススタッフを考えた昔の人は素晴らしいと思った。楽しかったです。

昔の人はクロススタッフをよく発明したと思う。こういうことができる人物もいるのに驚いた。

昔の人は、生活のためとはいえ、よく数学を使いクロススタッフのようなものを作って、測ったりして頭がいいなあと思った。

いつもは普通の授業で使うかどうかわからないものを行っている気がするが、このような授業ならより実践的で良いと思った。

数学の実用性を知ることができました。

数学の目的を理解できる。

どんなものでもそれをした目的などがわかればそれを使う際にイメージしやすい。

数学が人類が生きていく上で必要なものだと思った気がする。

は昔の人が、数学が盛り込まれている道具を使っていたことを認識し、感動している。 、 、 は昔の人が生活のために数学を用いて道具を発明したことを認識し、感動している。 、 、 、 は数学の目的・実用性を認識している。ここでいう数学の目的は、原典解釈から認識されるものであり、実用性は道具を実際に使ううちに、道具に盛り込まれている数学に気づくことから認識されているといえる。 は数学が人の生活に必要なものであることを認識している。

また、アンケート「日常生活で三角形の相似が利用されていると思いますか。」という質問に対して、「ア：そう思う・イ：そう思わない」の選択式とした。

事前アンケートでは、アが 41%・イが 59%に対して、事後アンケートでは、アが 51%・イが 49%であった。この結果から、授業によって、日常生活で三角形の相似が利用されていることを認識し、数学を人の営みとして捉えた生徒がいるといえる。

以上から、課題 1 は達成できているといえる。

## （ 2 ） 課題 2 に対する議論

課題 2：課題 1 の達成により、創造性の基礎を培うことができるか。

事後アンケート：授業の感想に対する生徒の答え

長さを求めた時の証明がおもしろかった。思わず「ほお～」と言ってしまった。あんなに単純な道具で 3 時間も授業してもらえとは思わなかった。数学の歴史を感じた。

昔の人のひらめきがよく分かった。

昔の人がこんなに頭がいいとは思わなかった。数学で何でも解けさえな気さえした。

簡単な道具で、角度や距離が測れるとは思いませんでした。それなりの計算が伴いますが、古人の発想に感服です。

クロススタッフという簡単な道具の中に、数学がたくさん使われていることを知って驚かされました。まだまだ自分の知らない数学の奥深い世界をかいまみることができました。

普段、教科書やワークと戦っているだけの数学が、新たな知識を得たことによって、少し、数学に関して幅広い教養が身についたと思う。

他にも数学が使われていることを知りたいと思いました。

創造性の基礎とは、「多面的にもものを見る力や論理的に考える力」、「学習に興味・関心をもち、数学的に考察処理する力」、「数学的な表現・処理の美しさや数学的な見方や考え方のよさを認識する豊かな感性」などを言う(文部省 1999)。

は証明に対しておもしろさを感じていることから、興味・関心をもてたこと、また、証明を学ぶことで、論理的に考えることができたことがいえる。は見た目が単純な道具に多くの数学が盛り込まれていることから、数学の歴史の深さを感じていると思われる。数学的な見方や考え方のよさを認識しているといえるは昔の人のひらめきから、多面的な見方があることを感じ取っていると思われる。

も数学のよさや美しさを感じているといえる。は簡単な道具で角度や距離が測れることに驚いていることから、興味・関心を喚起できているといえる。また、古人の発想から多面的な見方を感じ取っているといえる。は数学の奥深さを知り、興味・関心がもてたといえる。にも同様のことが言える。はクロススタッフ以外のことに対しても興味・関心を広げることができているといえる。以上から課題 2 は達成できたといえる。

(1)(2) から、数学史とそれにちなんだ道具を題材とした授業を行うことで生徒が数学を人の営みとして捉え、数学への興味・関心をもち、創造性の基礎を培うことができるといえる。

## 7. おわりに

本研究を通して、数学史とそれにちなんだ道具としてクロススタッフを題材として取り上げ、授業を行うことで、生徒が数学を人の営みとして捉え、数学への興味・関心をもち、創造性の基礎を培うことができることがいえた。しかしながら、原典解釈に対する否定的な意見や、道具に対して「当時の人が使っていたことはわかったが、現代は使われていない」という意見もアンケートに書かれていた。

授業においては、1. はじめにで話題にした、数学を用いた他者とのコミュニ

ケーションを重視し、教師側からの説明よりも、生徒が自分の考えをまとめて発表する場面、また生徒が自分の体を動かして数学的活動をする場面を多く取り入れた。そのような場面を多く取り入れた「1, 3時間目はよかった」という感想があった。授業をしながら観察した生徒の様子からもそれが見てとれた。2時間目は原典解釈に多くの時間を割いた。原典の後に発問し、まとめるなど生徒が活動できるように工夫したが、原典と道具とを見比べながら理解しようとする生徒がいる一方で、文量と難しさから諦めてしまう生徒が多く見られた。「2時間目の内容はいらなと思った」という感想さえもあった。Leviの原典から授業に必要な部分だけを抜粋したが、それでもかなりの文量となった。最終的には筆者がまとめたものを提示し、それをもとに道具を使う活動を行ったが、最初からこれをしたのでは生徒が原典解釈を行ったことにならないし、当時の数学として捉えることができない。原典の扱い方に課題が残った。

また、数学を当時の人の営みとして捉えてはいるが、現代の人の営みではないことから、昔の人の苦勞、昔の人の発想に感動しながらも、今の自分たちの生活に必要なだとは感じることもできないことも課題である。

さらに、数学史とそれにちなんだ道具を用いた授業という括りの中でも、扱う題材による違い、同じ題材でも授業の進め方による違い、同じ題材・同じ進め方での授業者を変えることによる違いがあると予想できる。今後の研究課題としたい。

## 謝辞

授業研究の実施に際して、埼玉県立春日部高等学校の早乙女勤先生、片野秀樹先生をはじめ、数学科の先生方、その他多くの先生方から多大なるご協力と供に、貴重なご指導ご指摘をいただきました。心から感謝申し上げます。

## 注

本研究は平成16年度科学研究費、特定領域研究(2)課題番号15020214「数学用機械とJABAによる移動・変換と関数・微分ハンズオン教材のWEB化研究」(研究代表者磯田正美)において開発された歴史的道具を前提にして、平成16年度科学研究費、基礎研究(B)(2)課題番号14380055「数学の文化的視野覚醒と新文化創出のための教材・指導法開発研究」(研究代表者磯田正美)の一環として行われた。

## 引用・参考文献

- 【1】文部省(1999). 高等学校学習指導要領解説 数学編 理数編. 実教出版
- 【2】磯田正美(2002a). 数学的活動を楽しむ心を育てる. 課題学習・選択学習・総合学習の教材開発. 明治図書.
- 【3】磯田正美(2003). なぜ道具を数学教育で活用する必要があるのか:道具を使ってこそ学べる数学の教育的価値を明かすためのパースペクティブ.

日本数学教育学会第36回数学教育論文発表会「課題別分科会」発表集録.

- 【4】 諏佐洋一(2004). 歴史的道具「比例コンパス」を用いた数学的活動による授業研究:ガリレオの軍事コンパスを題材として. 確かな学力の育成と道具を用いた数学教育. 中学校・高等学校数学科教育課程開発に関する研究(11),p.83-96. 筑波大学数学教育研究室.
- 【5】 Bernard R. Goldstein(1985). *The Astronomy of Levi ben Gerson (1288-1344): A Critical Edition of chapters 1-20 with Translation and Commentary. Studies in the history of mathematics and physical sciences 11.* Springer Verlag
- 【6】 ユークリッド原論(1977). (中村幸四郎 ほか 訳). 共立出版.
- 【7】 Singer Charles(1963). 技術の歴史(平田寛 ほか 訳). 筑摩書房.
- 【8】 安藤洋美(1999). 高校数学史演習. 現代数学社.
- 【9】 Klaudios Ptolemaios(1982). アルマゲスト(藪内清 ほか 訳). 恒星社厚生閣.
- 【10】 Charles Coulston Gillispie ほか(1973). *Dictionary of Scientific Biography Volume8.* CHARLES SCRIBNER SON'S
- 【11】 会田英一,磯田正美,高橋秀樹(2004). 高さや傾き、距離測定の後にある数学と文化.教育科学. 数学教育 4,p.94-98. 明治図書.
- 【12】 飯田善郎(1984). 航海術史.出光書店.
- 【13】 茂在寅男(1967). 航海術:海に挑む人間の歴史. 中央公論社.
- 【14】 会田英一,磯田正美(2004). 測量器を作って野外で数学を楽しむ. 教育科学. 数学教育 8,p.94-98. 明治図書.
- 【15】 丸山洋幸(2004). 福田理軒『測量集成』の体験学習を通じた生徒の数学観の変容:量尺・量地儀を使った三角比・対数の授業. 確かな学力の育成と道具を用いた数学教育. 中学校・高等学校数学科教育課程開発に関する研究(11),p.203-217. 筑波大学数学教育研究室.