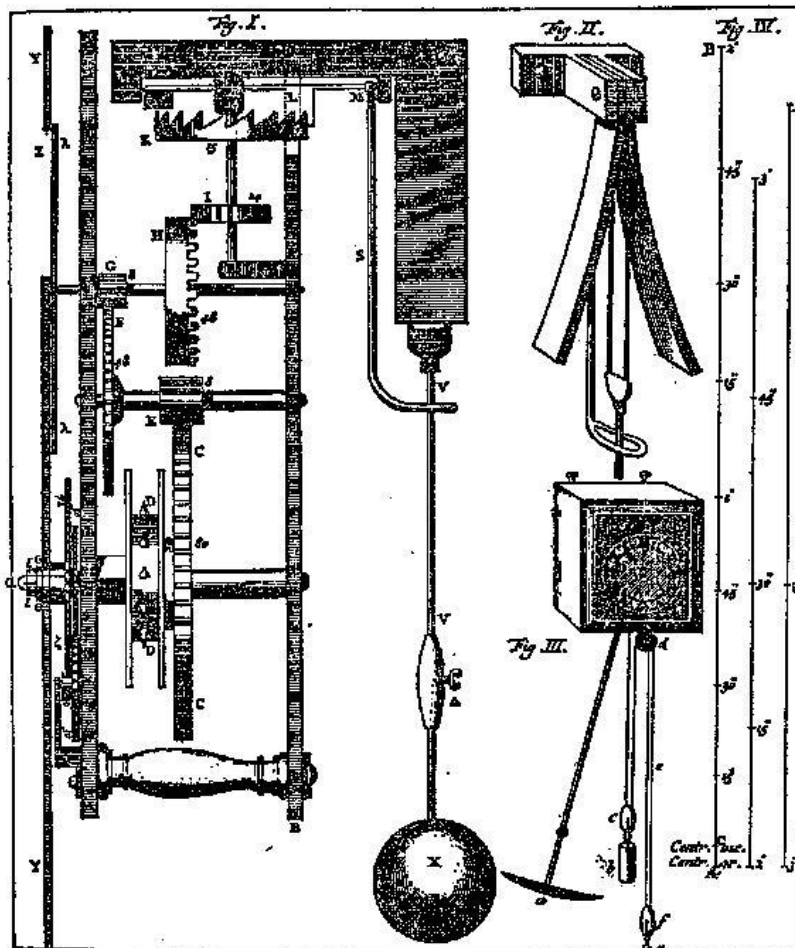


授業資料 2 時間目

# 授業資料

『ホイヘンスの数学』

～ 振り時計を解明しよう！！～



氏名 \_\_\_\_\_

授業者：筑波大学大学院修士課程教育研究科数学教育コース 1 年  
能登誉光

## 1、復習

**伸開線** . . . 糸などを曲線に沿って、ピンと張ったまま、はがしていくときの端の軌跡。

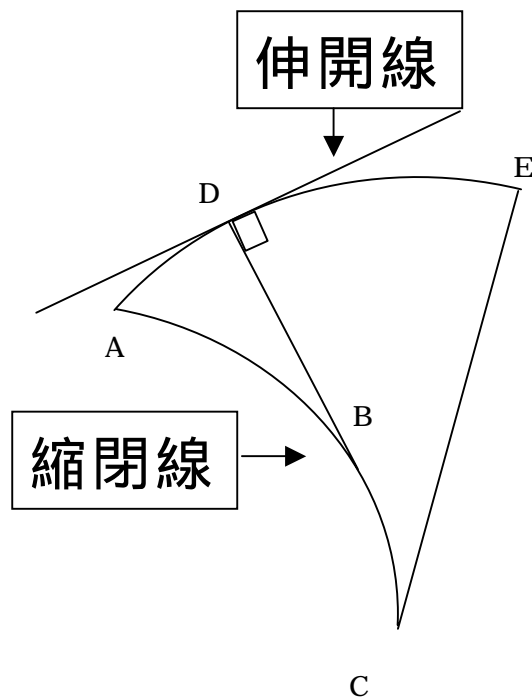
たくさん存在する。

**縮閉線** . . . 糸などは、常に縮閉線の接線である。

ただ1つ存在する。

### 命題

全ての縮閉線の接線は、伸開線と直角に交差する。



## 2、振子時計

ホイヘンスの業績で有名なのがこの振子時計である。

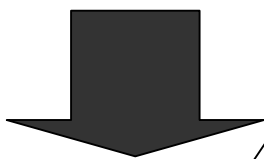
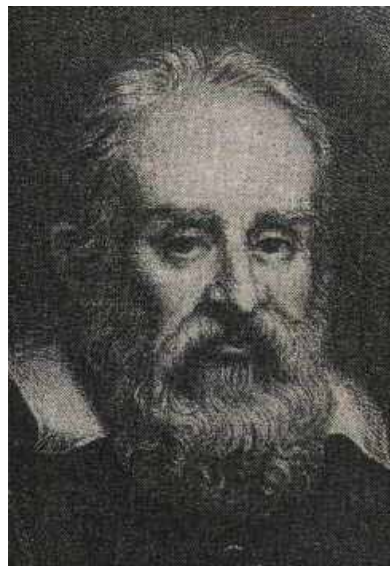
では、振子時計って何だろう？

糸などのひも状のものに重りをつるして振子の等時性を利用して時間を計り時計とすること。

**等時性とは**

振動する振子の振幅が大きくても小さくても、周期すなわち1往復に要する時間は同一であるということ。

これは、ガリレオ・ガリレイが1581年に発見した法則です。しかし、等時性が保たれるのは、実際は振子の振幅が小さいときだけ、ということが分かってくる。すると、等時性を保ちながら時間を正確に測るために振幅を小さくすると、空気抵抗などの影響を受けて振子は止まってしまう。ここでガリレオ・ガリレイは、振子時計うまく作ることができなかった。



そこで、ホイヘンスは、等時性に注目して研究を進めていくと、サイクロイドという曲線が等時性を保つということ発見し、

**サイクロイド**を

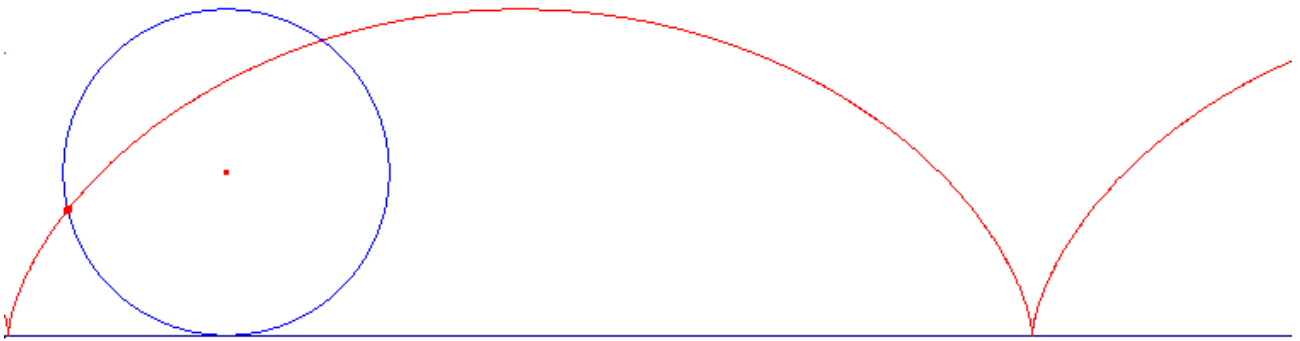
利用した時計を考え始めた。

### 3、サイクロイド

サイクロイド(cycloid)とは

固定した直線上を円が滑らずに転がる時、  
回転円上の固定点のなす軌跡。

\*cycloid...cycle(円)と oid(~に似た)に由来



### 4、サイクロイドの性質

#### 4 - 1、サイクロイドの伸開線

では、まずサイクロイドの伸開線を書いてみよう！  
どんなものが書けたかな？

#### 4 - 2、サイクロイドの縮閉線

なぜ縮閉線を考えるか？



伸開線を考えると1つの縮閉線に対して、  
糸の長さや書き始める位置の違いによって

の伸開線が存在する。

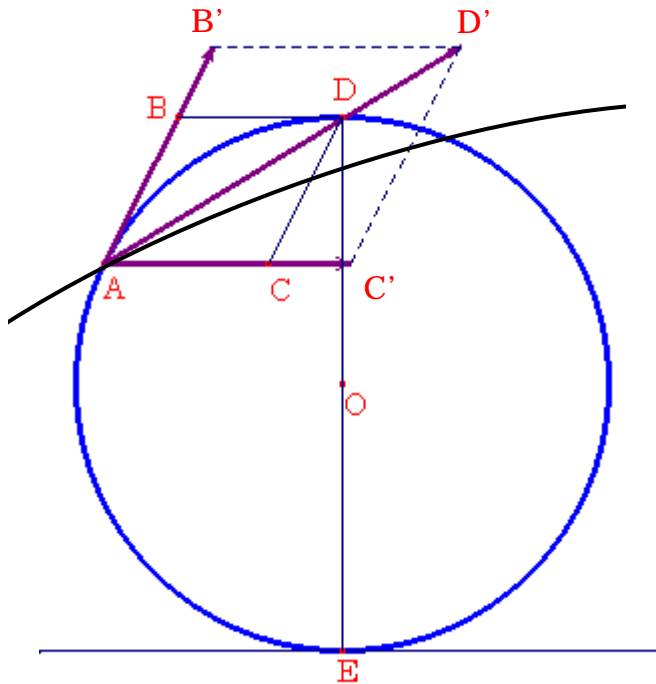


サイクロイドの縮閉線を考えれば、  
縮閉線は  なので考えやすい。



サイクロイドの伸開線も理解することができる。

# サイクロイドの性質



## 性質 1

サイクロイドの 1 点から接線を引くと生成円の頂点を通る。

## 証明

まず生成円の 1 点から接線を引いて考える。

生成円の頂点を通して、生成円が転がる線に平行な線を引く。

円の接線の性質より

$$AB = \square$$

よって ABDC は、 $\square$  である。

サイクロイド上の 1 点の接線を考える。

サイクロイドという運動は、その場で円が回転する運動と水平方向に動く運動の合成である。

円が 1 周する距離と円が転がった距離が等しく、時間の場合も同様に等しいので、速さが等しい。

2 つの運動の合成は平行四辺形を作り、しかも、今速さが等しい。

よって AB'D'C' は、 $\square$  である。

より

サイクロイドの接線は、生成円の頂点を通る。

Q.E.D

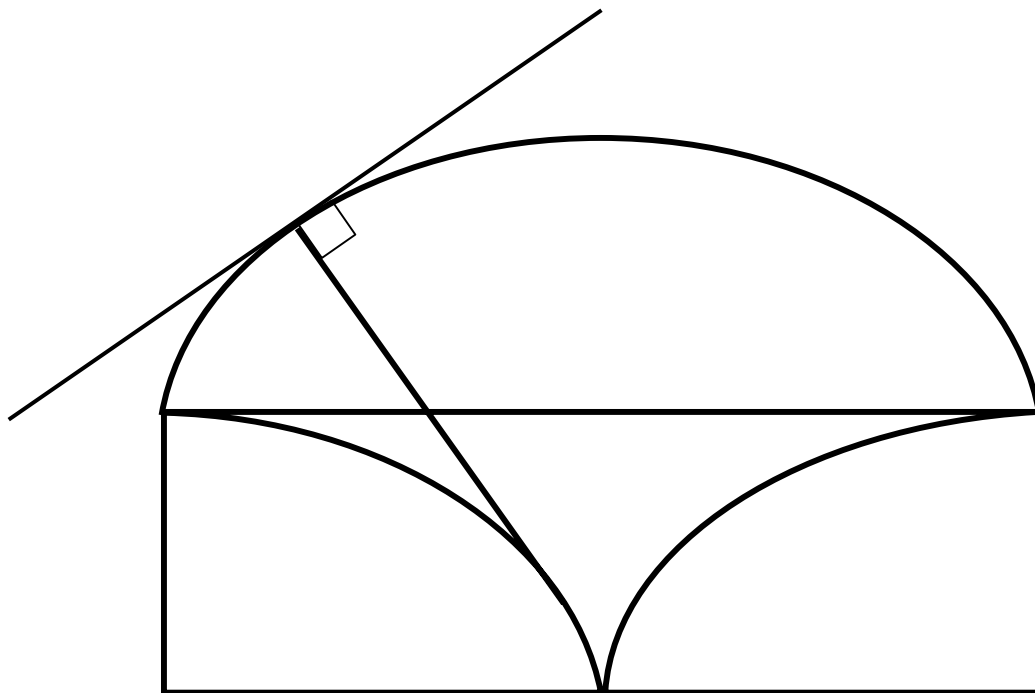
### Proposition V

If a straight line touches a cycloid at its vertex and we construct on this straight line as base another cycloid, similar and equal to the first then, beginning at the vertex mentioned, an arbitrary tangent to the inferior cycloid will be normal to the superior cycloid.

和訳)

命題

もし直線がサイクロイドの頂点でサイクロイドに接し、触れた頂点を起点とし、基本とするこの直線上に、最初のサイクロイドと同様で、等しく、もうひとつのサイクロイドを作図するならば、下のサイクロイドの任意の接線は、上のサイクロイドの法線である。



### 証明の方針

まず、サイクロイド上の点から接線を引く。



接線上の点がサイクロイドの定義と一致した場合  
接線上の点は、サイクロイドを描く。

### サイクロイドの定義

固定した直線上を円が滑らずに転がるとき、回転円上の固定点のなす軌跡。



ここで  
性質 1

サイクロイドの 1 点から接線を引くと生成円の頂点を通る。



よって

下のサイクロイドの任意の接線は、上のサイクロイドの法線である。

**命題 の証明**

Let us suppose that the straight line AG [Fig. 6] touches the cycloid at its vertex A and that on this line as base is constructed another cycloid AEF with vertex F. Let BK be a tangent to the cycloid ABC. I claim that this tangent, continued to the cycloid AEF, will meet it at right angles. Indeed, let us describe about AD, the axis of the cycloid ABC, the generating circle AHD, which intersects BH, parallel to the base, at H. Let us draw the line HA. Since BK is tangent to the cycloid at B, it is parallel to this line HA, hence AHBK is a parallelogram and  $AK = HB$ , that is, equal to the arc AH. Let us now describe the circle KM, equal to the generating circle AHD, tangent to the base AG at K and intersecting the continued line BK at E. Since BKE is parallel to AH, and hence  $\angle EKA = \angle KAH$ , it is clear that the continued line BK cuts from the circle KM an arc equal to the arc which AH cuts from the circle AHD. The arc KE is therefore equal to the arc AH, that is, to the line HB, hence to the line KA. But it follows from this equality, from a property of the cycloid (since the generating circle MK is tangent to line AG at K), that the point which describes the cycloid AEF has passed through E. The line KE therefore meets the cycloid at E at right angles, that is, KE is no other line than the continuation of BK. Q.E.D.

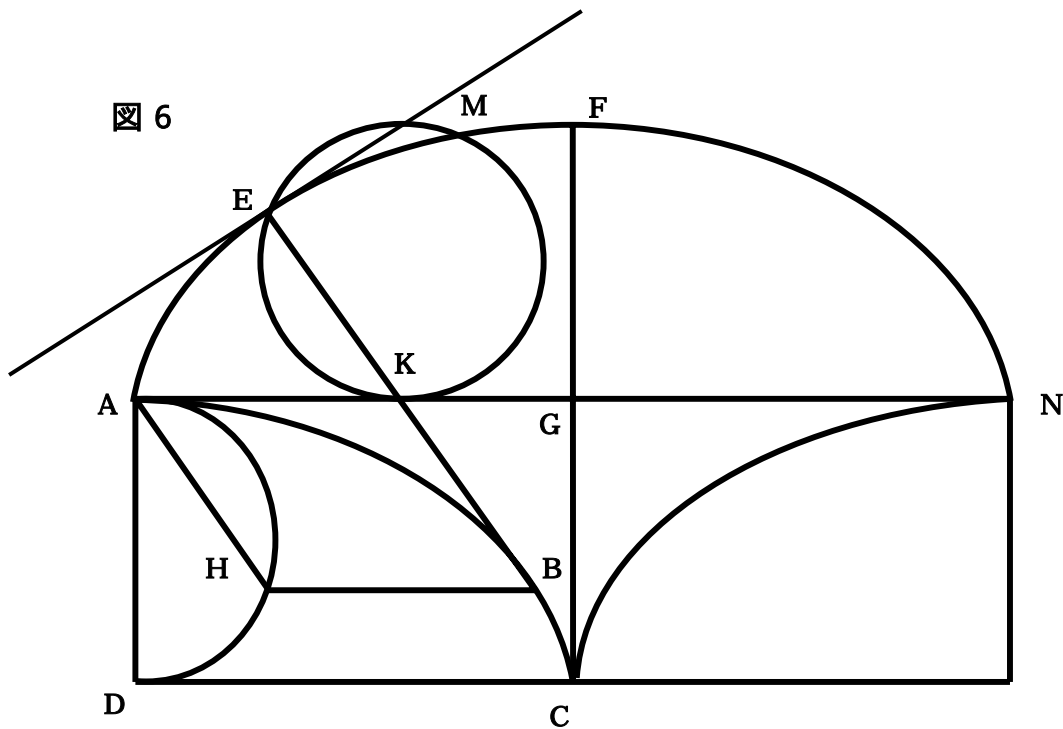




図 6 において、直線AGはサイクロイドの頂点Aでサイクロイドに接し、基本とするこの線上で頂点Fを持つ別のサイクロイドAEFを作図することを考えなさい。BKはサイクロイドABCに接するとしなさい。サイクロイドAEFに延びているこの接線はサイクロイドAEFと直角に交わると主張する。実際に、サイクロイドABCの軸であり、点Hで基本とするAGに平行であるBHと交わる生成した円AHDの軸でもある、ADを書きなさい。HAを書きなさい。<sup>性質 1</sup> BKは点Bでサイクロイドに接するので、この線HAに平行であり、したがって、AHBKは平行四辺形であり、AK=HB、つまり、弧AHと等しい。今、生成した円AHDに等しく、点Kで基本とするAGに接し、そしてBKを延長した線と点Eで交差する円KMを書きなさい。BKEはAHに平行なので、したがって、EKA= KAHである。BKを延長した線が円KMから切り取った弧はAHが円AHDから切り取った弧に等しいことは明らかである。それゆえに、弧KEは弧AHに等しい、つまり、直線HBに等しく、したがって、線KAに等しい。しかし、この等式と、サイクロイドの特性(生成された円MKは点Kで線AGと接するので)からサイクロイドAEFを描く点が点Eを通ることはわかる。それゆえに、線KEは点Eでサイクロイドと直角に交わる、つまりKEはBKの延長線以外のなにものでもない。Q.E.D

### 命題

サイクロイド AEF に延びているこの接線はサイクロイド AEF と直角に交わると主張する。

### 証明

AG//  . . .

HA//  . . .

より

AHBK は、 . . .

とサイクロイドの定義より

AK = HB = 弧  . . .

より

BKE//AH

したがって

EKA=

このことから

弧 KE = 弧  . . .

より

. . .

とサイクロイドの定義より

点 E は、サイクロイド AEF 上にある。

サイクロイド上の点 E から接線を引くと性質 1 より

接線は生成円の頂点を通る。 . . .

と円の直径の性質より

サイクロイド AEF に延びているこの接線はサイクロイド AEF と直角に交わることが証明できた。

**命題**

全ての縮閉線の接線は、伸開線と直角に交差する。

**命題**

サイクロイド AEF に延びているこの接線はサイクロイド AEF と直角に交わると主張する。

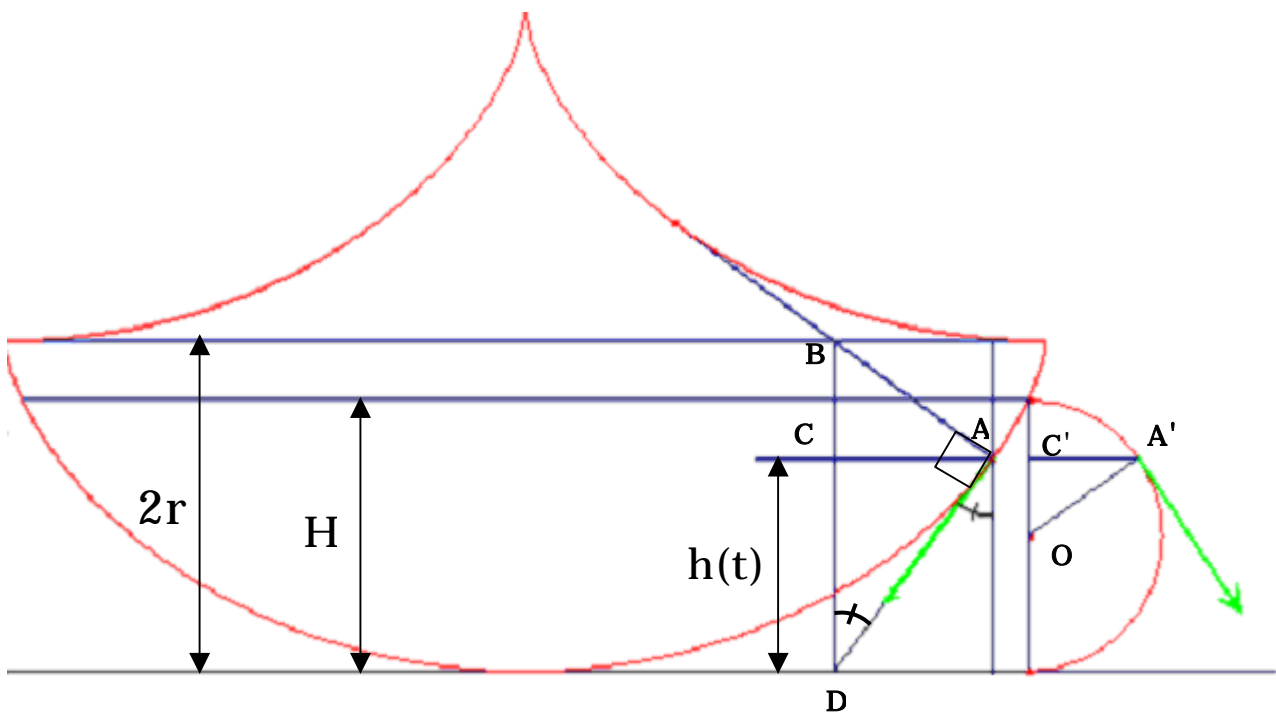
命題 と命題 より

# サイクロイドの伸開線は、サイクロイドになることが分かった!!

## 4 - 3、等時性

ホイヘンスは、振り時計を考えるために「上下逆さの」サイクロイドに沿って質点がいかに回転するかを研究した。サイクロイドの特性に注目して円との関係を使うことに上手く解決することが出来た。

質点・・・質量だけあって大きさのない点状の物体、すなわち抽象体。物体の運動や位置を考える際、物体をその重心に全質量が集まった点と見なしたもの。



r を生成円の半径とし、円上の質点を H = 2r の高さから回転させる。h(t) を時間 t における質点の高さとし、その点における速さを V(t) とする。h(0)=H とすると、速度の大きさはエネルギー保存則によって決定される。

力学的保存の法則

$$\frac{1}{2} m v_0^2 + m g h_0 = \frac{1}{2} m v^2 + m g h$$

|V(t)| =  . . .

速度の向きはサイクロイドの接線方向である。接線を延長することに関する上の規則を用いてその速度の垂直成分を考えよう。

任意の点 A において、接線 AD を延長し、C を A の垂直方向への射影とするなら、|CD|=h(t)となる。この図では

V<sub>vert</sub> = |V(t)|  . . .

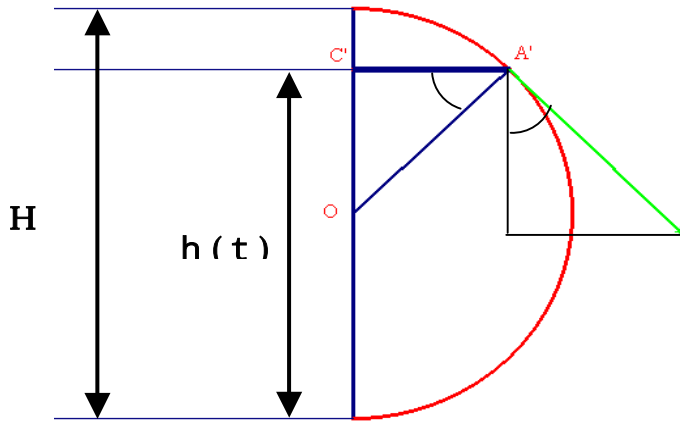
\*verticality . . . 垂直

$\cos ADC = \frac{\text{[ ]}}{\text{[ ]}} = \frac{\text{[ ]}}{\text{[ ]}}$	$h(t) = \text{[ ]}$ $= \text{[ ]}$
$\cos ADC = \frac{\text{[ ]}}{\text{[ ]}} = \frac{\text{[ ]}}{\text{[ ]}}$	

↓  
 $\cos ADC = \frac{\text{[ ]}}{\text{[ ]}} . . .$

より

V<sub>vert</sub> =  . . .



次にサイクロイド上の質点の運動をひとまずおいて、速度  $V_{\text{vert}}(t)$ 、初期条件  $h(0)=H$  の直線運動  $h(t)$  を考えればよい。  $h(t_1)=0$  となる値  $t=t_1$  を見つけねばならない。これは典型的な微分方程式の問題であるが、ホイヘンスはある巧妙な方法を思いついた。彼は今 1 つの補助運動を考察した。質点が直径  $(2r$  ではなく)  $H$  の円のまわりを速度  $W$  で頭頂点から出発し、一様に移動するとする。時間  $t$  では質点は高さ  $h(t)$  の点  $A'$  にある。この点における速度の垂直成分を求めることは困難ではない。実際、

$$W_{\text{vert}} = \boxed{\phantom{000000}} \dots$$

$$\begin{aligned} \cos \angle C'A'O &= \frac{|C'A'|}{OA'} \\ &= \frac{2|C'A'|}{H} \\ &= \boxed{\phantom{000000}} \dots \end{aligned}$$

より

$$W_{\text{vert}} = \boxed{\phantom{000000}} \dots$$

ここで、 $O$  は中心、 $O'$  は  $A'$  の鉛直方向の直径への射影である。

より

もし  $2|W| = \boxed{\phantom{000000}}$  なら、円のまわりを回転する点の鉛直方向への射影は、サイクロイドのまわりを回転する点の鉛直方向への射影と同じように運動するであろう。

とくに双方の点は時間

$$t_1 = \frac{\text{道のり}}{\text{速さ}} = \frac{\boxed{\phantom{000000}}}{\boxed{\phantom{000000}}} = \boxed{\phantom{000000}}$$

で底に達する。ここで  $H$  は除去され、こうして注目すべき事実が現れる。

つまり、サイクロイドに沿って回転する点が底に到達する時間 $t_1$ は、その始点の高さ $H$ には関係なく  $\sqrt{\frac{r}{g}}$

に等しい。こうしてサイクロイドは等時曲線である。

### サイクロイドの等時性

この曲線の頂点を下に向け、底辺が水平となるように位置させるとき、その弧に沿って落下する質点は、弧上のどの点から運動を始めても、最低点に達するまでに同一の時間を要することを言う。

ここでホイヘンスは、サイクロイドの性質を用いることで振子の重りが円弧ではなくてサイクロイド上に揺れるようにできれば、等時的な振子時計できると考えた。そこで振子の両側にサイクロイドの当て板をつけて振子の等時性を保つようにした。



サイクロイド振子の  
完成

## 5、振子時計の完成

ホイヘンスのサイクロイド振子時計は動くには動いたものの、設計のために採用した数理は非常に巧妙だったが、空気抵抗などを無視することはできず、誤差が蓄積するのを防ぐことはできなく、組み立てるとなるとこの余分の難点があって、精度不足は絶望的になった。最終的には、振子の非等時性の問題は、振子そのものを改良するのではなく、脱進機に一定の往復運動を与える動力源を用いることによって解決された。安定した動力源が、振子が一定の振幅で触れるようにすることによって、振動の周期を一定に保つことができた。1800年頃には見事な精度の振子時計が使えるようになった。ただサイクロイドが計時装置から消えつつあったようなそのときに、産業革命による要求から、サイクロイドは別の応用で姿を見せるようになった。

**歯車**である。

2枚の歯車を、一方が相手を回転させるときに歯がすべることなく相手の歯を転がるようにする方法はあるだろうか。当然、そのような歯車は四角形や三角形に削ったのではまずく、曲線にしなければならない。サイクロイドはそれ自身の伸開線だから、かみ合う2つのサイクロイドは、確かにお互いをすべることなく転がるような形にすることができる。おまけに、サイクロイド歯車の歯は、ある1組の歯が離れたときには次の歯がすでに接しているような間隔にすることができる。

「脱進機」は時計に使われている振子などは、そのままにしておくともだんだんとその動きが弱くなって、止まってしまう。だから、ほんの少しの力を、振子などにあたえつづけて、そのうえ正しい速度で動くようにする働きをしているのが「脱進機」である。

このようにして、

# 振子時計

は完成した。

## 6、まとめ

### ホイヘンスの数学

- ・ 伸開線と縮閉線
- ・ サイクロイドの研究
- ・ サイクロイドの伸開線がサイクロイドになる。

### 振子時計

ホイヘンスの伸開線の定義から、はじまりガリレオの等時性の発見をさらにサイクロイドの性質を利用することによってどんどん数学は進化していった。そして等時性を完全に保つことはできなかったが、歯車という形でまたサイクロイドが関係し解決できなかったことが解決できるようになった。このようにして今でも使われている振子時計の製造過程にはたくさん科学の研究が見られた。